Université Joseph Fourier
Année universitaire 2006/2007
Licence Sciences et Technologies (L2)
Unité MAT233b
Examen final de décembre 2006 (première session)
- durée 2 heures -

Aucun document n'est autorisé, ni calculatrice

Exercice 1. Soit $P(t)$ un polynôme à coefficients réels en une variable t et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la courbe paramétrée donnée par $t \mapsto (t, P(t))$. Déterminer la limite de la courbure de f quand $t \to +\infty$ et $t \to -\infty$.

Exercice 2. Soit (*) $x' = f(x)$ une d'équation différentielle en une variable avec une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ qui est périodique de période $T > 0$ et $f(0) = 0$. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution de (*). Montrer (par un argument d'unicité) que φ est stationnaire ou il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $kT < \varphi(t) < (k+1)T$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Donner un exemple (graphique) pour f où il existe une solution stationnaire, mais différente de kT pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 3. Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$ deux nombres réels. Déterminer, en fonction de a, b, des nombres A, B de telle sorte que la fonction $H(x,y) := Ax^2 + By^2$ est une intégrale première du système d'équations différentielles sur $\mathbb{R}^2$

$$x' = ay,$$

$$y' = -bx.$$

Tracer les solutions pour $a = 1$ et $b = -1$.

Exercice 4. On considère le système d'équations différentielles (*) sur $\mathbb{R}^2$

$$x' = -y + (1 - x^2 - y^2)x,$$

$$y' = x + (1 - x^2 - y^2)y.$$

a) Montrer que l'on a $rr' = r^2(1-r^2)$ et $\theta' = 1$ en coordonées polaires (r, θ).

b) Résoudre l'équation différentielle $r' = r(1 - r^2)$ et déterminer le comportement asymtotique des solutions. Tracer les orbites du système (*).

c) Montrer que (*) possède une seule solution stationnaire et une unique solution périodique.

d) Montrer que (*) n'admet aucune intégrale première.

⁂

Université Joseph Fourier
Année universitaire 2007/2008
Licence Sciences et Technologies (L2)
Unité MAT237
Examen final (première session)
- durée 2 heures -

Calculatrice et documents: non autorisés

Exercice 1. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on pose $C_a := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = a\}$.

a) Donner (au moins) un système non trivial d'équations différentielles linéaires sur $\mathbb{R}^2$ (en les coordonnées cartésiennes (x, y))

(*) $x' = f(x, y)$, $y' = g(x, y)$

tel que pour chaque solution φ de (*), il existe un $a \in \mathbb{R}$ satisfaisant $image(\varphi) \subset C_a$.

b) Montrer que (*) possède toujours une intégrale première.

c) Soit $\omega := \frac{1}{x^2y}dx + \frac{1}{xy^2}dy$. Calculer l'intégrale curviligne $\int_{C_a} \omega$ pour une orientation convenable de C_a.

Exercice 2. On considère, en coordonnés polaires (r, θ), le système d'équations différentielles (*) sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, donné par

$$r' = \frac{r}{2}\sin(r^2),$$

$$\theta' = 1.$$

a) Transformer le système (*) en coordonnées cartésiennes (x, y) sur $\mathbb{R}^2$

(**) $x' = f(x, y)$, $y' = g(x, y)$,

(i.e. déterminer les fonctions f et g).

b) Transformer la première équation de (*) en l'équation différentielle

$u' = \sin(e^u)$.

Montrer que

c) chaque solution non stationnaire de (**) est une courbe régulière,

d) chaque solution de (**) est bornée,

e) le système (**) possède une infinité de solutions périodiques situées sur des cercles et déterminer toutes les solutions stationnaires et périodiques,

f) le système (**) n'admet aucune intégrale première.

⁂

Université Joseph Fourier
Année universitaire 2008/2009
Licence Sciences et Technologies (L2)
Unité MAT237
Examen terminal (première session)
Durée: 2 heures

Documents et calculatrices non autorisés

Exercice 1. Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction en deux variables réelles de classe au moins $\mathcal{C}^2$. On considère le système d'équations différentielles (*) dans le plan $\mathbb{R}^2$

(*) $x' = \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$, $y' = -\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)$.

a) Montrer que F est une intégrale première de (*).
b) Montrer que chaque solution de (*) est une courbe paramétrée régulière si $\nabla F(x, y) \neq 0$ partout où $\nabla F = (\partial F/\partial x,\ \partial F/\partial y)$.
c) Montrer que le système dynamique donné par (*) conserve l'aire.
d) Soit $F(x, y) := xy^2$. Décrire en détail une méthode pour résoudre (*) explicitement dans ce cas.

Exercice 2. Soit $F(x, y) := ((x-1)^2 + y^2)((x+1)^2 + y^2)$. Pour $a \in \mathbb{R}$ on pose $C_a := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = a\}$.
a) Montrer que $F(x, y) = (x^2 + y^2 + 1)^2 - 4x^2$ et déterminer les propriétés de symétrie de C_a.
b) Exprimer F en coordonnées polaires (r, θ). En déduire que chaque C_a est une partie bornée de $\mathbb{R}^2$.
[réponse possible: $r^2(r^2 - 2\cos(2\theta)) + 1$]
c) Tracer (qualitativement) les ensembles C_a pour $a = 0$, $a = 1$ et pour a très grand.
d) Trouver un paramétrage $\varphi(\theta) = (x(\theta), y(\theta))$, $\theta \in [0, 2\pi]$, de C_1 en utilisant la réponse à (b).
e) Calculer $\varphi^*(dx)$ et $\varphi^*(dy)$.

- On considère désormais le système d'équations différentielles (*) de l'exercice 1 pour notre fonction F -

f) Quels sont les points stationnaires de (*) ? Justifier votre réponse.
g) Tracer (qualitativement) les solutions de (*) en profitant du fait que F est une intégrale première.
h) Indiquer un argument qui montre que les solutions de (*) situées sur les courbes C_a, pour $a > 0$, et $a \neq 1$ sont fermées, i.e. périodiques.

Exercice 3. Tracer pour chaque cas qui suit, via des flêches et des orbites bien positionnées, un système dynamique (de classe $\mathcal{C}^1$) dans le plan $\mathbb{R}^2$ avec

a) un seul point stationnaire attractif/répulsif,

b) exactement deux points stationnaires,

c) exactement deux solutions périodiques.

⋇

EXAMEN MAT237

11 janvier 2010

Documents, calculatrices et téléphones portables interdits.

Exercice 1

1. Etudier les branches infinies et les points singuliers de la courbe :

$$x(t) = t^2 + t^5,\ y(t) = t^3 + t^4.$$

2. Tracer la courbe.

Exercice 2

1. On considère la courbe

$$x(t) = e^t \cos t,\ y(t) = e^t \sin t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Calculer la longeur d'arc qui correspond à la partie $t \in]-\infty, 0]$.

2. On considère la courbe

$$x(t) = t,\ y(t) = \sin \frac{1}{t},\ t \in]0, \infty[.$$

Calculer la courbure $\kappa(t)$ de la courbe en tout point. Trouver une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.q.

$$\lim_{n\to\infty} t_n = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \kappa(t_n) = \infty.$$

Exercice 3

Résoudre l'équation différentielle

$$x' = \frac{(x-2)(x-1)}{t}, \quad x(1) = 3/2.$$

Problème

On considère le système de Lotka-Volterra, qui décrit une situation proies-prédateurs :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u'(t) & = & u(t)(1 - v(t)), \\ v'(t) & = & \alpha v(t)(u(t) - 1), \\ (u(0), v(0)) & = & (u_0, v_0). \end{array} \right. \tag{1}$$

On suppose $\alpha > 0$, $u_0 > 0$, $v_0 > 0$.

1. a) Montrer que pour tout $u_0 > 0$, $v_0 > 0$ le système (1) possède une solution unique sur un intervalle de temps $I =]-a, a[$ avec $a > 0$.
b) Montrer que $(u, v) = (1, 1)$ est une solution stationnaire de (1).

2. Soit $(u(t), v(t))$ la solution de (1). On pose $f(x) := x - \ln x$.

a) Montrer que

$$f(t) \geq 1 \quad \forall t \in]0, \infty[$$

b) Montrer que $H(u, v) = \alpha f(u) + f(v)$ est une intégrale première de (1) et que

$$\forall u > 0,\, v > 0 \quad H(u, v) \geq 1 + \alpha = H(1, 1).$$

c) En déduire que $u(t) > 0$ et $v(t) > 0$ pour tout t.

3. On pose $u = 1 + x$ et $v = 1 + y$.

a) Ecrire le système d'équations différentielles pour x, y. Argumenter que des solutions proches de la solution stationnaire $(1, 1)$ sont bien décrites par les solutions du système linéaire :

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

b) Donner la solution générale du système (2).

c) Montrer que les solutions de (2) sont périodiques avec période $2\pi/\sqrt{\alpha}$.

d) Montrer que $E = \alpha x^2 + y^2$ est une intégrale première de (2). Quelle forme ont les courbes de niveau de E ?