# MATHS 110C
# CHAPITRE VII : EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

## 1. Equations différentielles du premier ordre

Les équations différentielles permettent de rendre compte de bon nombre de phénomènes naturels. Par exemple, comme nous le verrons plus tard, des évolutions de population (population pris en un sens large). Le but de ce chapitre est de décrire quelques aspects théoriques et numériques des équations différentielles du premier ordre, et aussi de donner quelques exemples de modélisation.

1.1. **Un bref aperçu de la zoologie des équations différentielles.** Une équation différentielle du premier ordre est une équation qui met en jeu une relation entre une fonction et sa dérivée, et dont la solution est une fonction dérivable. De façon (un peu) plus précise, une équation différentielle du premier ordre se présente sous la forme

$$u' = F(t, u),$$

où $F$ est une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Une solution sur un intervalle $I$ est une fonction $u$ qui est dérivable sur $I$ et telle que, pour tout $t \in I$, $u'(t) = F(t, u(t))$. Ici, la variable pour la fonction $u$ est $t$, car comme nous le verrons dans la paragraphe suivant, une équation différentielle modélise parfois l'évolution d'un système (par exemple, l'évolution de la taille $u$ d'une population) en fonction du temps $t$.

**Exemple 1.** Considérons l'équation $u' + 5u = t$. Nous pouvons encore l'écrire $u' = -5u + t$. Donc, $u' = F(t, u)$ où $F(x, y) = -5y + x$. Une solution sur $\mathbb{R}$ est $u(t) = (1/5)t - 1/25$. En effet, $u'(t) = 1/5 = -5u(t) + t$.

**Exemple 2.** Considérons l'équation $u' + 5tu = t^2$. Nous pouvons encore l'écrire $u' = -5tu + t^2$. Donc, $u' = F(t, u)$ où $F(x, y) = -5xy + x^2$. Les solutions sont, comme nous le verrons plus tard, un peu plus difficiles à écrire.

Les équations données dans les exemples 1 et 2 sont des équations linéaires du premier ordre. Rappelons qu'une fonction linéaire $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de la forme $f(x) = kx$. Oublions dans $F$ le terme qui ne contient que des $x$. Dans le premier cas, nous obtenons $g(y) = y$ et dans le deuxième cas, nous obtenons $g(y) = (-5x)y$. Dans les deux cas, $g$ est linéaire en $y$. Dans le premier exemple, le coefficient devant $y$ est indépendant de $x$. On dit que cette équation est linéaire à coefficients constants. Dans le deuxième exemple, la fonction $g$ est linéaire en $y$ si nous supposons que $x$ est fixé. En effet, le coefficient devant $y$ n'est pas indépendant de $x$. On dit que cette équation est linéaire à coefficients non constants.

**Exemple 3.** Considérons $u' = u^2 + 5t$. Alors, $F(x,y) = y^2 + 5x$. Si nous oublions la variable $x$ dans $F$, nous obtenons $g(y) = y^2$ qui n'est pas linéaire. L'équation en question est dite non linéaire. Nous verrons que dans certains cas, nous pouvons écrire une formule explicite donnant toutes les solutions (comme dans le cas des équations linéaires). Cependant, ce n'est pas toujours le cas et nous décrirons des méthodes permettant d'avoir une bonne idée de ce à quoi ressemble une solution.

1.2. **Taux de croissance d'ue population.** Notons $N(t)$ la taille d'une population à l'instant $t$. Nous nous intéressons dans ce paragraphe à l'évolution de cette population au cours du temps, en particulier à la variation de la taille de cette population. C'est pourquoi nous introduisons le taux moyen de croissance de la population. Il représente la variation du nombre d'individus par unité de temps et par individus présents et est donné par

$$\frac{\Delta N(t)}{N(t)\Delta t}$$

où $\Delta N(t) = N(t + \Delta t) - N(t)$ est la variation du nombre d'individus entre le temps $t$ et le temps $t + \Delta t$. Ce taux peut être mesuré de façon expérimentale. Souvent, il est supposé que $\dfrac{\Delta N(t)}{N(t)}$ ne dépend pas de $t$, c'est à dire qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $t$,

$$\frac{\Delta N(t)}{N(t)\Delta t} = \frac{k}{\Delta t}.$$

Ainsi, le taux d'accroissement moyen pendant un intervalle de temps $\Delta t$ est $\dfrac{k}{\Delta t}$. Reprenons la formule

$$\frac{\Delta N(t)}{N(t)\Delta t} = \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t}\frac{1}{N(t)},$$

et faisons tendre $\Delta t$ vers 0. Nous obtenons alors à la limite le taux instantané d'accroissement $\dfrac{N'(t)}{N(t)}$. Parfois (par exemple en physique), la dérivé $N'(t)$ se note $\dfrac{dN}{dt}(t)$. Nous reviendrons plus tard sur cette notation. Si nous supposons ce taux constant, la fonction $N(t)$ satisfait

$$(E_1)\ N'(t) = kN(t).$$

Ceci est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coeffcients constants. Nous verrons dans le prochain paragraphe que la solution de $(E_1)$ est donnée par $N(t) = N_0 e^{kt}$. Ce modèle est très grossier. Nous pouvons ajouter un terme de mortalité due, par exemple, à la compétition. Il est naturel de supposer que ce taux est proportionnel à la population. Nous obtenons alors que $N$ satisfait

$$\frac{N'(t)}{N(t)} = k - bN(t),$$

ce que nous pouvons encore écrire

$$(E_2)\ N'(t) = kN(t) - bN^2(t).$$

Cette équation différentielle est beaucoup plus dure à étudier à cause du terme non linéaire $N^2(t)$. Une équation du type $(E_2)$ est, comme nous l'avons vu plus haut, non linéaire à coefficients constants.

Nous pouvons aussi imaginer que la taux de croissance dépendent du temps, ceci afin de tenir compte des saisons. Par exemple, $N$ peut satisfaire

$$(E_3)\ N'(t) = (2+\cos t)N(t) - 1/2N^2(t).$$

Dans ce modèle, le taux de croissance reste positif, ce qui signifie que la population croit. Le terme $1/2N^2(t)$ est du à la compétition. S'il n'y a pas de compétition, nous obtenons l'équation

$$(E_4)\ N'(t) = (2+\cos t)N(t).$$

Cette équation ressemble à $(E_1)$, à la différence essentielle que $k(t) = 2+\cos t$ dépend de $t$. Une équation différentielle du type $(E_4)$ est, suivant la terminologie du paragraphe précédent, linéaire à coefficients non constants.

Dans la suite, nous étudierons en détails les équations différentielles linéaires. Nous discuterons ensuite de quelques exemples d'équations non linéaires ou à coefficients non constants. En particulier, nous croiserons des équation dont nous ne pourrons pas déterminer explicitement les solutions. Dans ces cas, nous présenterons des méthodes numériques ou quantitatives qui nous permettront d'avoir une bonne idée de à quoi doit ressembler la solution.

### 1.3. **Equations différentielles linéaires à coefficients constants.**

1.3.1. *Equations sans second membre.* Soit $a \in \mathbb{R}$. Une solution de l'équation différentielle

$$u' - au = 0$$

est une fonction $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$u'(x) - au(x) = 0.$$

Nous pouvons facilement vérifier que la fonction nulle et que la fonction $u(x) = e^{ax}$ sont solutions. Peut-on en trouver d'autres ?

**Théorème 1.** *Les solutions de l'équation différentielle $y' - ay = 0$ sont les fonctions $u(x) = \lambda e^{ax}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.*

On détermine $\lambda$ grace à une condition initiale. Par exemple, nous pouvons imposer la valeur de $u$ en 0. Si nous fixons $u(0)$, alors la solution de notre équation est unique. En effet, cette condition impose que la contante $\lambda$ doit être égale à $u(0)$. Ainsi, si nous fixons la valeur en 0 de la solution $u$, il y a unicité de la solution $u$. Ceci est important et nous verrons plus tard que c'est un fait général pour les équations différentielles "gentilles" du premier ordre.

Notons que si $u$ est une solution, alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, il en de même de $\alpha u$. De même, si $u$ et $v$ sont solutions, il en est de même de $u + v$.

*Démonstration.* Notons tout d'abord que les fonctions de la forme $u(x) = \lambda e^{ax}$ sont solutions de l'équation différentielle

$$u' - au = 0.$$

Supposons que $u$ soit une solution et posons $v(x) = u(x)e^{-ax}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors,

$$v'(x) = u'(x)e^{-ax} - au(x)e^{-ax} = e^{-ax}(u'(x) - au(x)) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, la fonction $v$ est constante. Donc, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $v(x) = \lambda$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ceci peut encore s'écrire

$$u(x) = \lambda e^{ax}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

□

1.3.2. *Equations avec second membre.* Nous considérons dans ce paragraphe les équations différentielles du type

$$(E)\ u' - au = h$$

où $a \in \mathbb{R}$ et $h$ est une fonction définie sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$. Nous lui associons une équation différentielle linéaire sans second membre "en oubliant le terme après le signe =", c'est à dire l'équation différentielle

$$(E')\ u' - au = 0.$$

Cette équation s'appelle équation homogène associée. Ainsi, l'équation homogène est obtenue en "éliminant" les termes ne contenant que la variable $t$.
**Exemple.** L'équation homogène associée à l'équation (avec second membre) $u' = 6u + t^2$ est $u' = 6u$.

Supposons que l'on connaisse deux solutions $u_0$ et $u_1$ de $(E)$. Alors, formellement,

$$(u_1 - u_0)' - a(u_1 - u_0) = (u_1' - au_1) - (u_0' - au_0) = h - h = 0.$$

Donc, $u_1 - u_0$ est solution de $(E)$ et donc, d'après la section précédente, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$u_1(x) - u_0(x) = \lambda e^{ax},\ \forall x \in I,$$

ou encore

$$u_1(x) = u_0(x) + \lambda e^{ax},\ \forall x \in I.$$

*Bilan : si nous connaissons une solution particulière $u_0$ de $(E)$, alors toutes les solutions de $(E)$ sont de la forme*

$$u(x) = u_0(x) + \lambda e^{ax},\ \forall x \in I.$$

Notre problème va être maintenant de trouver la solution particulière $u_0$. Notons que si nous connaissons la valeur de la solution en 0, alors la solution est unique.

La méthode rapide (d'après Euler, 1750)

L'idée est de chercher la solution $u_0$ sous une forme proche du second membre $h$.
**Exemple 1.** Considérons l'équation

$$u' = u + t^2.$$

L'équation homogène associée est $u' = u$ dont la solution générale est $\lambda.e^t$ d'après le paragraphe précédent. Nous allons chercher la solution particulière $u_0$ sous forme d'un polynôme du second degré

$$u_0(t) = at^2 + bt + c.$$

Nous cherchons donc $a$, $b$ et $c$ dans $\mathbb{R}$ tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$2at + b = at^2 + bt + c + t^2,$$

soit encore

$$(a+1)t^2 + (b-2a)t + c - b = 0.$$

Donc, $a = -1$, $b = -2$ et $c = -2$ sont solutions. Donc, une solution particulière de $(E)$ est

$$u_0(t) = -t^2 - 2t - 2, \forall t \in \mathbb{R},$$

et la solution générale de $(E)$ est

$$u(t) = \lambda e^t - t^2 - 2t - 2, \forall t \in \mathbb{R}.$$

**Exemple 2.** Considérons l'équation

$$u' + u = 4\sin t + 3\cos t.$$

L'équation homogène associée est $u' = u$ dont la solution générale est $\lambda.e^t$ d'après le paragraphe précédent. L'idée est de chercher une solution particulière $u_0$ sous la forme

$$u_0(t) = a\sin t + b\cos t, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Nous laissons le soin au lecteur de vérifier que $a = 7/2$ et $b = -1/7$ convient, et donc que la solution générale de l'équation différentielle est

$$u(t) = \lambda e^{-t} + 7/2\cos t - 1/7\sin t.$$

**Exemple 3.** Considérons l'équation

$$u' + u = 2e^t.$$

Il est naturel de chercher la solution sous la forme $ae^x$. Quelques calculs montrent que $a = 1$ convient. La solution générale de l'équation différentielle est

$$u(t) = \lambda e^{-t} + e^t.$$

**Exemple 4.** Considérons l'équation

$$u' + u = 4\sin t + 3\cos t + 2e^t.$$

Une solution particulière est obtenue en ajoutant une solution particulière $u_1$ de l'exemple 2 et une solution $u_2$ de l'exemple 3. Ceci s'appelle la méthode de superposition des solutions. Pour voir cela, notons que (sans faire de calculs)

$$(u_1 + u_2)'(t) + u_1(t) + u_2(t) = (u_1'(t) + u_1(t)) + (u_2'(t) + u_2(t)) = 4\sin t + 3\cos t + 2e^t.$$

Donc, la solution générale de l'équation est

$$u(t) = \lambda e^{-t} + 7/2\cos t - 1/7\sin t + e^t.$$

<u>Méthode de variation de la constante</u>

Reprenons l'équation $(E)$ $u' - au = h$ et son équation homogène associée $(E')$ $u' - au = 0$. Nous avons vu que les solutions de $(E')$ sont de la forme $u(t) = \lambda e^{at}$. La méthode de variation de la constante consiste à chercher une solution de $(E)$ sous la forme $u(t) = \lambda(t)e^{at}$, c'est à dire, comme le nom l'indique, de faire varier la constante $\lambda$ dans la solution générale de $(E')$. Nous cherchons donc une fonction $\lambda(t)$ telle que

$$\lambda'(t)e^{at} + +a\lambda(t)e^{at} - a\lambda(t)e^{at} = \lambda'(t)e^{at} = h(t).$$

Donc, $\lambda$ est une primitive de $h(t)e^{-at}$.
Si $h$ est continue, alors $t \to h(t)e^{-at}$ est continue, donc une primitive de cette fonction existe. Il en résulte qu'il existe une solution de l'équation différentielle considérée. Si nous fixons l'image en 0, alors cette solution est unique.

*Exemple 1.*
Parfois, comme $h$ n'est pas continue (voir même définie sur $\mathbb{R}$), nous devons nous restreindre à des intervalles.

*Exemple 2.*

1.4. **Equations linéaires à coefficients non constants.** Soit $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$. Nous dirons que la fonction $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une solution de l'équation différentielle

$$u' = a.u$$

si $u$ est dérivable sur $I$ et pour tout $t \in I$,

$$u'(t) = a(t)u(t).$$

Les solutions de cette équation sont relativement faciles à déterminer. En effet, nous avons la

**Proposition 2.** *Supposons que la fonction $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soit continue sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ et soit $A$ une primitive de $a$ sur $I$. Alors, les solutions de $y = a.y$ sont les fonctions $t \to \lambda e^{A(t)}$ où $\lambda \in R$.*

Rappelons que nous avons vu au chapitre 7 qu'une primitive $A$ d'une fonction continue $a$ sur un intervalle $I$ existe sur $I$. Donc, il y a bien existence des solutions de l'équation considérée.

*Démonstration.* Le principe de preuve est le même que celui que nous avons vu dans le paragaphe précédent dans le cas où $a$ est une fonction constante. Tout d'abord, si $u(t) = \lambda e^{A(t)}$ pour $t \in I$, alors

$$u'(t) = \lambda(A'(t)e^{A(t)}) = \lambda(a(t)e^{A(t)}) = a(t)u(t).$$

Donc, $u$ est solution de $u' = au$. Réciproquement, soit $u$ une solution de $u' = au$. Posons, pour $t \in I$, $v(t) = u(t)e^{-A(t)}$. Alors,

$$v'(t) = u'(t)e^{-A(t)} - u(t)A'(t)e^{-A(t)} = e^{-A(t)}(u'(t) - A'(t)u(t)) = e^{-A(t)}(u'(t) - a(t)u(t)) = 0.$$

Donc, $v$ est constante sur $I$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $v(t) = \lambda$, soit encore $u(t)e^{-A(t)} = \lambda$ pour tout $t \in I$. Il s'en suit que $u(t) = \lambda e^{A(t)}$ pour tout $t \in I$. $\square$

Donnons un exemple et considérons l'équation $y' = ty$. Ici, nous choisissons $I = \mathbb{R}$, puisque la fonction $a(t) = t$ est "gentille" partout. Une primitive de $A(t) = t^2/2$. Donc, les solutions de l'équation différentielle $y' = ty$ sont donnés par

$$u(t) = \lambda e^{t^2/2} \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Que se passe-t-il si l'équation a un second membre ? Nous considérons l'équation $y' - ay = h$. Commençons par répéter la discussion de la section précédente. Nous lui associons une équation différentielle linéaire sans second membre "en oubliant le terme après le signe =" (ou de manière équivalente en oubliant les termes en $t$ seulement), c'est à dire l'équation différentielle (appelée équation homogène associée)

$$(E')\ y' - ay = 0.$$

Supposons que l'on connaisse deux solutions $f_0$ et $f_1$ de $(E)$. Alors, formellement,

$$(u_1 - u_0)' - a(u_1 - u_0) = (u_1' - au_1) - (u_0' - au_0) = h - h = 0.$$

Donc, $u_1 - u_0$ est solution de $(E)$ et donc, d'après ce qui précède, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$u_1(t) - u_0(t) = \lambda e^{A(t)},\ \forall t \in I,$$

ou encore

$$u_1(t) = u_0(t) + \lambda e^{A(t)},\ \forall t \in I.$$

*Bilan : si nous connaissons une solution particulière $u_0$ de $(E)$, alors toutes les solutions de $(E)$ sont de la forme*

$$u(t) = u_0(t) + \lambda e^{A(t)},\ \forall t \in I.$$

Pour trouver la solution particulière $u_0$, les méthodes sont les mêmes que dans le cas où $a$ est constante. Discutons la méthode de variation de la constante. Nous cherchons donc une solution de $u' = au + h$ sous la forme $u_0(t) = \lambda(t)e^{A(t)}$. Ainsi, $\lambda$ doit vérifier

$$\lambda'(t)e^{A(t)} + A'(t)e^{A(t)} = a(t)e^{A(t)} + h(t),$$

soit encore, puisque $A' = a$,

$$\lambda'(t) = h(t)e^{A(t)}.$$

Donc, $\lambda$ est une primitive sur $I$ de $h.e^A$.
*Exemple.* (en insistant sur l'unicite).

1.5. **Quelques exemples d'équations non linéaires.** Nous allons considérer dans ce paragraphe des équations générales du premier ordre. Rappelons qu'elles sont de la forme

$$(EG)\ u' = F(t, u)$$

où $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Une solution de l'équation différentielle (EG) sur l'intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ est une fonction $u$ dérivable sur $I$ telle que, pour tout $t \in I$,

$$u'(t) = F(t, u(t)).$$

Dans certains cas, il est possible de trouver explicitement les solutions de (EG). En général, ceci n'est pas possible. La première chose à faire est alors de démontrer qu'il existe une solution, puis (si c'est le cas), que la solution est unique. Ceci se fait grace au théorème de Cauchy-Lipschitz. Grosso modo, ce théorème dit que si $F$ est "gentille" et si nous fixons $t_0$ et $u_0$, il existe une unique fonction $u$ solution de (EG) telle que $u(t_0) = u_0$. Un énoncé précis est au-delà des objectifs de ce cours. De plus, la démonstration de ce théorème est beaucoup trop délicate pour être exposée. Nous avons vu dans les premiers paragraphes de ce chapitre que l'unicité, si on se donnait une condition initiale, était vrai (modulo des conditions de continuité) pour les équations linéaires.

Nous supposerons dans la suite que, dans tous nos exemples, ce théorème s'applique. C'est d'ailleurs ce que font les physiciens, les chimistes,... En effet, (EG) est censé modéliser pour eux une situation bien définie, d'où l'existence et l'unicité d'une solution.

**Exemple.** Considérons une population dont le nombre d'individus au temps $t$ est $u(t)$ qui satisfait l'équation d'évolution

$$u' = (2 + \cos t)^2 u.$$

Supposons que nous connaissons le nombre d'individus en 2004, c'est à dire $u(2004) = k$ ($k$ donnée expérimentale) et que nous voulons connaitre le nombre d'individus en 2010. Si l'équation avec donnée initiale $u(2004) = k$ avait aucune solution ou plusieurs solutions, nous ne pouvons soit pas connaitre le nombre d'individus en 2010, soit avoir plusieurs choix possibles ! Ce qui ne rend pas trés crédible notre modèle ! Heureusement, le théorème de Cauchy-Lipschitz nous prédit une unique solution au temps $t = 2010$ (mais il ne dit pas que notre modèle décrit avec précision l'évolution de la population considérée ! ! ! ! ! !).

Nous allons maintenant décrire des méthodes qui vont nous permettre d'imaginer à quoi ressemble les solutions d'une équation différentielle, même si nous ne pouvons pas les décrire à l'aide d'une formule.

1.5.1. *Méthodes qualitatives.* Nous allons décrire des méthodes qui permettent de visualiser les solutions d'une équation différentielle que nous ne savons pas résoudre. Ces méthodes peuvent être implémentées sur ordinateur (mais l'auteur de ces lignes en est incapable ....).

Soit $u$ une solution de (EG). Donc, pour tout $t \in I$,

$$(*)\ u'(t) = F(t, u(t)).$$

Nous pouvons la représenter par son graphe (en fonction de la variable $t$) :

$$G_u = \{(t, u(t)), t \in I\}.$$

Alors, le coefficient directeur de la tangente à $G_u$ en $(t_0, u(t_0))$ est $u'(t_0)$, soit, d'après $(*)$, $F(t_0, u(t_0))$. Si $u$ est la solution correspondant à la donnée initiale $(t_0, u_0)$, le coefficient de la tangente au point $(t_0, u(t_0))$ est $F'(t_0, u_0)$ (puisque $u_0 = u(t_0)$).

**Exemple.** Soit $u_0$ l'unique solution de l'équation

$$u' = (1 + e^t)u$$

qui vaut 1 en 1. Alors, le graphe de $u_0$ passe par $(1, 1)$ et la tangente en ce point au graphe a pour coefficient directeur $1+e$. En effet, $u' = F't, u)$ où $F(t, x) = (1+e^x)y$. Donc, $F(1, 1) = 1 + e$.

Soit $(x, y)$ (les coordonnées) d'un point du plan. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, nous avons le
*Principe d'unicité. il existe une unique solution de l'équation (EG) dont le graphe passe par* $(x, y)$.

C'est l'unique solution $u$ qui vaut $y$ en $x$, c'est à dire $u(x) = y$ (ou en d'autres termes, avec les mêmes notations que dans le paragaphe précédent, nous avons fixé $t_0 = x$ et $u(t_0) = y$). Le champs des directions associé à l'équation $u' = F(t, u)$ est en chaque point du plan de coordonnées $(x, y)$ la pente $F(x, y)$ qui est le coefficient directeur au point $(x, y)$ de la tangente au graphe de l'unique solution de (EG) passant par ce point. Comment visualiser ce champs des directions ?

**Méthode de la grille.** On prend une "grille", c'est à dire un quadrillage du plan. Par exemple, les points dont les coordonnées sont des entiers. En chacun de ces points $(x, y)$, on trace le segment de coefficient directeur $F(x, y)$.

*Règle du jeu.* Tracer des graphes tels que
(i) Quand un de ces graphes rencontrent un point de la grille, il doit être tangent au segment correspondant.
(ii) Deux de ces graphes ne peuvent passer par un même point de la grille (d'après le principe d'unicité).

A vous de jouer ! Voici une grille et le champs des directions associé. Tracer l'allure des graphes des solutions.

**Méthodes des isoclines.** Une isocline est une courbe du plan sur laquelle le champs des directions a une direction donnée, c'est à dire la courbe est l'ensemble des points de coordonnées $(x, y)$ tels que $F(x, y) = c$ où $c \in \mathbb{R}$ est fixé.

Traçons les isoclines correspondantes aux valeurs $c = 0, \infty, +1, -1, +2, -2, +3, -3$.

*Règle du jeu.* Tracer des graphes tels que
(i) Lorsqu'un graphe rencontre une isocline associé a la valeur $c$, la tangente au graphe a pour coefficient directeur $c$ (pour les valeurs de $c$ données ci-dessus).
(ii) Deux de ces graphes ne peuvent passer par un même point (d'après le principe d'unicité).

Encore un jeu ! Voici les isoclines d'une équation. Tracer des graphes de solution.

1.5.2. *Schéma d'Euler.* Considérons l'équation différentielle $u' = F(t,u)$ avec comme condition initale $u(t_0) = u_0$ (où $t_0$ et $u_0$ sont des réels donnés. On pourra déja essayer de comprendre la méthode avec $t_0 = 0$ et $u_0 = 0$). Nous nous donnons un "pas" $h$ et nous voulons voir comment évolue la solution $u$ sur l'intervalle $[t_0, t_0 + h]$. Rappelons que léquation de la tangente $t_0$ à la courbe de $u$ au point d'abscisse $t_0$ est

$$y = u'(t_0)(x - t_0) - u(t_0).$$

Comme $u(t_0) = u_0$ et $u'(t_0) = F(t_0, u_0)$, nous obtenons

$$y = F(t_0, u_0)(x - t_0) - u_0.$$

Il est important de noter que cette droite $T_0$ est connue, puisque $F$, $t_0$, et $u_0$ sont donnés.

**Exemple.** Prenons l'équation $u' = tu + 1$ avec comme condition initiale $u(0) = 1$ (c'est à dire $F(x,y) = xy + 1$, $t_0 = 0$ et $u_0 = 1$). Alors, comme $F(0,1) = 1$, l'équation de la tangente en $(0,1)$ au graphe de $u$ ($u$ unique solution de léquation différentielle avec la condition ci-dessus) est

$$y = x - 1.$$

Posons $t_1 = t_0 + h$. La solution $u$ de notre équation part à l'instant $t_0$ du point $(t_0, u_0)$. A l'instant $t_1$, elle se trouve au point de coordonnées $(t_1, u(t_1))$. Si $h$ est assez petit et si la fonction $u$ est raisonable, ce point de coordonnées $(t_1, u(t_1))$ ne devrait pas être (et on peut le montrer de façon rigoureuse) du point ayant même abscisse $t_1$

et situé sur la tangente $T_0$. Ainsi, $u(t_1) \sim F(t_0, u_0)(t_1 - t_0) + u_0$. Comme $t_1 - t_0 = h$, nous obtenons

$$u(t_1) \sim F(t_0, u_0)h + u_0.$$

Posons $u_1 = F(t_0, u_0)h + u_0$. Soit $t_2 = t_1 + h = t_0 + 2h$. Nous pouvons supposer, à une approximation près, que la solution repart à l'instant $t_1$ du point $(t_1, u_1)$ (et non du point $(t_1, u(t_1))$. Alors, le même raisonnement montre que la solution ne devrait pas être trop loin du point $(t_2, F(t_1, u_1)h + u_1)$. Ce qui est le cas si $h$ est assez petit. Nous posons alors $u_2 = F(t_1, u_1)h + u_1$ et nous pouvons recommencer. De cette façon, nous sommes amenés à considérer les suites définies

$$t_n = t_0 + nh$$

$$u_n = u_{n-1} + F(t_n, u_n)h.$$

Les réels $t_0$ et $u_0$ sont nos données de départ. Une approximation de notre solution est alors obtenue en joignant les points $(t_n, u_n)$.

**Exemple.** Soit l'équation $u' = \sin(tu)$ avec comme conditions initiales $u(0) = 3$. En prenant le pas $h = 0, 1$, nous obtenons

Il est recommandé d'essayer de programmer ces calculs.

## 1.6. Quelques exemples d'équations non linéaires.

1.6.1. *Equations à variables séparables.* Ce sont des équation du type

$$u' = h(t)g(u)$$

c'est à dire $F(x, y) = h(x)g(y)$. Le nom vient que l'on peut séparer dans $F$ les variables $x$ et $y$. Il y a deux exemples particuliers, l'un quand $F(x, y)$ ne dépend que de $x$ (exemple 1 suivant), l'un quand $F(x, y)$ ne dépend que de $y$ (exemple 2 suivant).

**Exemple 1.** $u'(t)h(t)$. Alors, $u$ est une primitive de $h$. Donc, les graphes des solutions sont obtenues en translatant celui d'une solution donée.

**Exemple 2.** $u' = g(u)$ (équation autonome). Par exemple, $u' = u^2 - 3u$.

Donnons une idée de la méthode pour résoudre des équations à variables séparables. Dans les cas particuliers, il faudra justifier les calculs faits.

L'équation $u' = h(t)g(u)$ peut sécrire

$$\frac{u'(t)}{h(u(t))} = g(t)$$

ou encore

$$\int \frac{u'(t)}{h(u(t))} dt = \int g(t) dt.$$

Si $H$ et $G$ sont des primitives de $1/h$ et $g$ respectivement, alors $H(u) = G(t) + C$ (où $C$ est une constante réelle). Ceci permet dans certains cas de déduire $u$ en fonction de $t$. La constante $C$ est comme d'habitude donnée par la condition initiale que l'on se donne. Souvent, par exemple en physique, la méthode précédente s'écrit

$$\frac{du}{dt} = h(u)g(t)$$

puis

$$\frac{du}{h(u)} = g(t)$$

ou encore

$$\int \frac{du}{h(u)} = \int g(t) dt,$$

et finalement (avec les mêmes notations que ci-dessus),

$$H(u) = G(t) + C.$$

Donnons deux applications.

**Exemple 1.** Considérons $u' = g(t)u$. Notons tout d'abord que $u = 0$ est une solution évidente. Ecrivons

$$\frac{1}{u} du = g(t)$$

ou encore

$$\ln |u| = \int g(t) dt,$$

et finalement,

$$|u| = e^{\int g(t) dt}.$$

Si $G$ est une primitive de $g$, alors les autres primitives sont de la forme $G + C$, et donc toutes les solutions sont de la forme (en posant $M = +/- e^C$)

$$u(t) = +/- e^C e^{G(t)} = M e^{G(t)}.$$

**Exemple 2 (Equation logistique).** Considérons l'équation $u' = au - bu^2$ (où $a$, $b \in \mathbb{R}$). Notons qu'il y a deux solutions "évidentes", à savoir les fonctions constantes $u_1 = 0$ et $u_3 = A/b$. Pour trouver les solutions, écrivons

$$\int \frac{du}{au - bu^2} = \int dt.$$

En décomposant en éléments simples le membre de gauche, il vient

$$1/a \ln \left| \frac{u}{a-bu} \right| == t + C \ (C \in \mathbb{R}),$$

puis, en posant $M = e^{aC}$,

$$\left| \frac{u}{a-bu} \right| = Me^{at}.$$

Les solutions sont donc

$$\begin{aligned}
u_0(t) &= \frac{aMe^{at}}{bMe^{at}-1} \text{ définie pour tous les } t \text{ tels que } u(t) < 0; \\
u_1(t) &= 0 \text{ définie sur } \mathbb{R}, \\
u_2(t) &= \frac{aMe^{at}}{bMe^{at}-1} \text{ définie pour tous les } t \text{ tels que } 0 < u(t) < a/b, \\
u_3(t) &= a/b \text{ définie sur } \mathbb{R}, \\
u_4(t) &= \frac{aMe^{at}}{bMe^{at}-1} \text{ définie pour tous les } t \text{ tels que } u(t) > a/b.
\end{aligned}$$

1.7. **Equations de Bernouilli.** Ces équations s'écrivent sous la forme

$$u' + P(t)u = Q(t)u^n$$

où $P$ et $Q$ sont des fonctions continues et $n$ est un entier ($\neq 0$, $n \neq 1$). L'idée est de poser $v = u^{-n+1}$ et de voir que $v$ est solution d'une équation linéaire. Le mieux est de donner un exemple.

## 2. Un exemple de systèmes d'équations différentielles : le modèle de Volterra

Nous ne savons pas résoudre toutes les équations différentielles, alors pourquoi s'attaquer à des systèmes d'équations différentielles ? Nous allons juste présenter un modèle d'évolution dynamique de population, qui est fort instructif et très amusant. Notre analyse s'arretera assez vite, dans la mesure où, même si le modèle est très élémentaire, son étude est trop complexe.

Umberto d'Ancona qui était un des responsables de la pêche italienne pendant la première guerre mondiale avait remarqué (en regardant les données statistiques en sa possession) que la proportion de requins et autres prédateurs que l'on attrapait était supérieure pendant la guerre à ce qu'elle était avant et après la guerre, période où la pêche est alors réduite. Ses données étaient les suivantes (à titre de comparaison, la proportion était supérieure à 11 pour cent avant 1914 et après 1923).

Vito Voltera, qui avait été contacté par D'Ancona, proposa, au début des années 1920, l'explication suivante. Soit $u(t)$ le nombre de poissons comestibles (pour nous, des sardines) et $v(t)$ le nombre de prédateurs (pour nous, des requins). Supposons que

(i) Les sardines ont assez de nourriture et seuls les requins s'opposent à la croissance de leur population.

(ii) Le nombre de requins dépend du nombre de sardines dont ils disposent pour manger.

De plus, Volterra suppose qu'en l'absence de requins, le nombre de sardines croit exponentiellement, c'est à dire $u$ satisfait $u' = au$ $(a > 0)$ et que le nombre de requins, en l'absence de sardines, décroit exponentiellement, c'est à dire $v$ satisfait $v' = -bv$ $(b > 0)$. Comment traiter leur "vie commune" ? Le nombre de rencontres est supposé dépendre du produit $uv$, il est défavorable pour les sardines et favorables pour les requins. Donc, il existe $c > 0$ et $d > 0$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u' & = & au - cuv \\ v' & = & bv + duv \end{array} \right.$$

Les solutions de ce système ne sont pas connues. De plus, le modèle de Volterra est assez discutable. Mais, d'autres modèles plus fiables ne sont pas connus.

## 3. Un bref aperçu historique

Les équations différentielles du premier ordre apparaissent dans la *Methodus fluxionum* de Newton (1671, publié en 1731). On cherchait la solution sous la forme d'une série entière (c'est à dire d'un polynôme infini). Les méthodes pour résoudre les équations à variables séparées ont été introduites par Leibniz (1691). Celui-ci, par des changement de fonctions continues, ramenait l'étude des équations linéaires à celle des équations à variables séparées (1692). La méthode de variation de la constante a été développée par Jean Bernouilli (1697).

L'équation de Bernouilli a été introduite par ..... Bernouilli (mais lequel ? car les mathématiciens ne manquaient dans cette famille) Jacob en 1695. Celui-ci proposait une solution laborieuse (reposant sur la méthode de variation de la constante) et lançait un concours de celui qui obtiendrait la solution la plus simple. C'est son frère, Johann, qui proposa la méthode présentée dans le cours dès 1697 (il semble que cette méthode était déja connue de Leibniz).
Le théorème de Cauchy-Lipschitz a été démontrée par Cauchy dans son cours à l'École Polytechnique (1824) et redémontré (et amélioré) par Lispchitz en 1848 (le cours de Cauchy n'était pas encore publié).
Donnons maintenant une idée des problèmes de Physique qui motivaient l'étude à l'époque des équations différentielles. Galilée avait découvert qu'un corps qui tombe, suivant l'axe des $y$ et à partir de l'origine, prend de la vitesse selon $v = \sqrt{2gy}$ où $g$ est l'accélération due à la gravité. En 1687, Leibniz pose le problème suivant : trouver une courbe $y = f(x)$ telle que si le corps glisse sur cette courbe, sa vitesse $dy/dt$ soit égale à une constante donnée $-b$ ?
Leibniz avait proposé une solution, aussitôt critiquée par Huygens. Une méthode générale a été proposée par Jacob Bernouilli, qui annonce l'intense activité sur le sujet en Suisse : travaux des Bernouilli (Jacob, Johann et plus tard Daniel) et d'Euler.

## 4. Quelques exercices

**Vrai ou faux**

**1) La fonction $t \to \cos t$ est-elle solution de $u' - 10u = 0$ ?**

**2) La fonction $t \to \cos t$ est-elle solution de $u' - 10u = t$ ?**

**3) Quelle est l'équation homogène associée à $u' + 5u + t = 0$ ?**

**4) Quelle est l'équation homogène associée à $u' + (5 \cot t)u + t^2 - 1 = 0$ ?**

**5) Expliquer (sans calcul) pourquoi l'unique solution de $u' = 10u$ qui vaut $0$ en $0$ est la fonction nulle.**

**6) Les fonctions $f_1$ et $f_2$ dont les graphes sont**

**peuvent-ils être toutes les deux solutions d'une équation différentielle de la forme $u' = ku$ ($k$ constante réelle) ?**

**Exercice 1.** *Résoudre les équations suivantes (entre parenthéses, une condition initiale).*
*1)* $2u' - u = 0$ *(*$\lim_{t\to+\infty} u(t) = +\infty$*).*
*2)* $u' - u = t^2 + 3t - 1$.
*3)* $u' - 2u = e^t \cos t$ *(*$u(\pi/4) = 0$*).*
*4)* $tu' = 1$.
*5)* $3u^2 = u'^2$.
*6)* $u'/u = 5t$.
*7)* $tu' = u = 1$.
*8)* $u' - (2u/t + 1) = (t+1)^2$.
*9)* $u' - (\alpha u)/t = (t+1)/t$.

**Exercice 2.** *1) Résoudre l'équation différentielle*

$$u' - (1/2)u = 0.$$

*Déterminer la solution qui prend la valeur* $1/E$ *en* $t = 1$.
*2) Soit la fonction* $f$ *définie par* $f(x) = e^{(1/2)x - 3/2}$*. Calculer à l'aide d'une intégration par parties* $\int_0^1 xf(x)dx$.

**Exercice 3.** *Résoudre l'équation* $u' = e^t - u$*. Etudier, suivant la valeur de la constante d'intégration, le comportement des solutions à l'infini.*

**Exercice 4.** *Résoudre les équations de Bernoullli suivantes.*
*(a)* $(1-t^2)u' - tu - \alpha tu^2 = 0$.
*(b)* $u - u'\cos t = u^2 \cos t(1 - \sin t)$.

**Exercice 5.** *On considère sur* $]0, +\infty[$ *l'équation*

$$(*)\ u - tu' = frac2tt + 2.$$

*pour tout* $t \in ]0, +\infty[$, *on définit* $F(t) = f(t)/t$.
*1) Montrer que* $f$ *est solution de (*) si et seulement si* $F'(t) = 1/(t+2) - 1/t$ *pour tout* $t \in ]0, +\infty[$.
*2) En déduire les solutions de (*).*

**Exercice 6.** *Un solide dont la température est de* 70 *degré est placé dans une pièce dont la température est de* 20 *degré. Les dimensions du solide sont très faibles par rapport à celles de la pièce. On désigne par* $\theta(t)$ *la température du solide à l'instant* $t$ *(l'unité de temps étant la minute, celle de température le degré Celsius). La loi de refroidissement d'un corps, c'est à dire l'expression de* $\theta$ *en fonction de* $t$ *est la suivante : la vitesse de refroidissement* $\theta'(t)$ *est proportionnelle à la différence entre la température du coprs et la température ambiante.*
*1) Sachant qu'au bout de 5 minutes, la température du solide est de* 6 *degré, déterminer* $\theta$ *(rappel :* $\theta(0) = 70$*).*
*2) Quelle est la température du solide au bout de* 20 *minutes ?*
*3) Tracer le graphe de* $\theta$.
*4) La température de la pièce peut-elle atteindre celle de la pièce ? Qu'en conclure ?*

**Exercice 7.** *Un bloc de céramique est mis dans un four dont la température constante est de* 1000 *degré. Les variations de température* $x$ *du bloc en fonction du temps* $t$ *sont données par l'équation différentielle suivante (*$k$ *est une constante)*

$$x' = k(1000 - x).$$

*1) Résoudre cette équation.*
*2) Le bloc initialement à température* 40 *degré est mis dans le four au temps* $t = 0$. *Si la température du bloc au temps* $t = 1$ *est de* 160 *degré, quelle est sa temapérature au temps* $t = 3$ *?*

**Exercice 8.** *L'atome de radium, en se désintégrant, donne de l'hélium et une émanantion gazeuse, le radon, elle-même radioactive. La masse* $m(t)$ *d'une échantillon de radium est une fonction décroissante du temps (l'unité est l'année) . La vitesse de désintégration* $m'(t)$ *est proportionnelle à la masse de léchantillon à l'instant* $t$ *:*

$$m' = km \ (k \ \textit{constante rélle}).$$

*1) Résoudre cette équation.*
*2) On observe que la masse de radium diminue de* 0,043 *pour cent par an. Déterminer* $k$.
*3) Montrer qu'il existe* $T$ *tel que, pour tout* $t \in \mathbb{R}^+$, $m(t+T) = (1/2)m(t)$. *Le nombre* $T$ *s'appelle période du radium.*

**Exercice 9.** *1) Dans le plan muni d'un repère* $(O, \vec{i}, \vec{j})$ *tracer la courbe* $H$ *d'équation* $y = 1/x$ *pour* $x \in ]0, +\infty[$. *Soit* $M_0$ *le point de* $H$ *d'abscisse* $x_0$.
*1a) Déterminer la tangente* $T$ *à* $H$ *en* $M_0$.
*1b) Déterminer l'abscisse du point d'intersection de la tangente avec l'axe des* $x$.
*2) Réciproquement, on veut déterminer les fonctions* $f$ *définies sur* $]0, +\infty[$ *dont les courbes représentatives sont telles que la tangente au point d'abscisse* $x$ *rencontre*

*l'axe des abscisses au point d'abscissse* $2x$.
*2a) Démontrer qu'une telle fonction* $f$ *vérifie* $xf'(x)+f(x)=0$ *pour tout* $x \in ]0,+\infty[$.
*2b) Résoudre l'équation précédente et conclure.*

**Exercice 10.** *1) Trouver une courbe passant par le point de coordonnées* $(1,1)$ *telle qu'en tout point* $M$ *de cette courbe, la tangente ait un coefficient directeur proportionnel au carré de l'ordonnée de* $M$.
*2) Trouver une courbe passant par le point* $A(1,2)$ *telle que la tangente en chaque point* $M$ *de cette courbe ait un coefficient directeur double de celle de la droite* $0M$.
*3) Chercher les courbes* $C$ *telles qu'en tout point* $M$ *de* $C$, *la tangente à* $C$ *soit perpendiculaire à* $OM$.

**Exercice 11.** *Le but de l'exercice est détudier la charge d'une condensateur sous une tension constante avec résistor. On considère le circuit électrique ci-dessous.*

$R$ *est la résistance du résistor,* $C$ *est la capacité du condensateur (ce sont toutes les deux des constantes). Soit* $q(t)$ *la charge de l'armature du condensateur à l'instant* $t$. *dans le cours de physique, on prouve que* $q$ *vérifie*

$$R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=U$$

*avec* $q(0)=0$.

*1) Déterminer* $q(t)$.
*2) On observe à l'oscilloscope la tension* $u_r = R_i$. *aux bornes du résistor. Sachant que* $i(t)=\dfrac{dq}{dt}$, *donner l'expression de* $u_r$ *en fonction de* $t$.

**Exercice 12.** *Nous allons dans cette exercice considérer une équation du second ordre, c'est à dire faisant intervenir la dérivée seconde.*
*Soit la fonction* $f$ *définie, pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *par*

$$f(x)=(1+x)e^{-2x}.$$

*1) Etudier et représenter* $f$. *Unité de longueur : 2 cm. On précisera avec soin les points d'intersection avec les axes et les tangentes en ces points.*
*2) Soit* $a > -1$. *On note* $D_a$ *le domaine délimité par la droite d'équation* $x = a$, *l'axe des abscisse et la courbe de* $f$. *Calculer l'aire de* $D_a$ *en* $cm^2$ *en foncion de* $a$. *Quelle est la limite de l'aire de* $D_a$ *quand* $a \to +\infty$ *?*

*3a) Quels doivent être les coefficients* $a$ *et* $b$ *pour que* $f$ *soit solution de léquation différentielle*

$$(*)\ y'' + ay' + by = 0.$$

*3b) Démontrer que toutes les dérivées de* $f$ *satisfont (*). Calculer l'ensemble des primitives de* $f$ *et chercher si une des primitives vérife (*).*

**Exercice 13.** *1) Résoudre l'équation différentielle* $(1)\ u' + ku = 0$ *où* $k$ *est une constante réelle. Préciser la solution particulière* $u_1$ *correspondant à la condition initiale* $u_1(0) = 2$.
*2) Deux chercheurs ont constaté qu'après une injection intraveineuse de glucose, la glycémie (taux de glucose dans le sang) décroit à partir d'un certain instant choisi comme origine des temps selon la loi* $(2)\ g' + Kg = 0$. *où* $g$ *représente la fonction glycémique dépendant du temps* $t > 0$ *et* $K$ *une constante strictement positive appelée coefficient d'assimilation glucidique.*
*2a) Trouver l'expression de* $g(t)$ *à l'instant* $t$ *sachant qu'à* $t = 0$, $g(0) = 2$. *Etudier et représenter* $g$.
*Déterminer en fonction de* $K$ *l'abscisse* $T$ *du point d'intersection de la tangente à la courbe au point* $M(0, 2)$ *avec l'axe du temps.*
*2b) Trouver la formule donnant le coefficient* $K$ *en fonction de* $g_1 = g(t_1)$, $g_1$ *étant le taux de glycémie à l'instant* $t_1$ *donné et positif.*
*2c) La valeur moyenne de* $K$ *chez un sujet normal varie de* $1,06.10^{-2}$ *à* $2,42.10^{-2}$. *Préciser si les résultats du sujet* $X$ *qui a un taux de glycémie* $g_1 = 1,20$ *à l'instant* $t_1 = 30$ *sont normaux.*

**Exercice 14.** *(Datation au carbone* 14*)*
*1) Le carbone* 14 *contenu dans la matière vivante contient une infime proportion d'isotope radio-actif* $C^{14}$. *Ce carbone radio-actif provient du rayonnement cosmique de la haute atmosphère. Grâce à un processus d'échange complexe, toute matière vivante maintient une proportion constante de* $C^{14}$ *dans son carbone total, essentiellement constitué de l'isotope stable* $C^{12}$. *Après la mort, les échangent cessent et la quantité de carbone radio-actif diminue : elle perd* $1/8000$ *de sa masse chaque année. Cela permet de déterminer la date de la mort d'un individu. Ainsi, des fragments de squelette humain de type Néanderthal sont retrouvés dans une caverne en Palestine. L'analyse montrer que la proportion de* $C^{14}$ *n'est que de* $6,24$ *pour cent de ce qu'elle serait dans les os d'un être vivant. Quand cet individu a-t-il vécu ?*
*2) Quelle est la demi-vie du carbone* $C^{14}$ *(c'est à dire le temps au bout duquel la moitié du carbone* $C^{14}$ *est desintégrée) ?*
*3) En construisant une voie férrée à Cro-Magnon en 1868, on découvrit des restes humains dans une caverne. Philip van Doren, dans son livre Prehistoric Europe, from Stone Age to the early greeks, estime que cet homme vivait entre 30 000 et 20 000 ans avant JC. Dans quelle fourchette se situe le rapport entre la proportion de* $C^{14}$ *présent dans ce squelette et celui des os d'un être vivant ?*

**Exercice 15.** *Intégrer comme équation à variables séparables, puis comme équation de Bernouilli, l'équation logistique*

$$N' = rN\left(1 - \frac{N}{k}\right).$$

*Vérifier que l'on peut écrire les solutions sous la forme*

$$N = \frac{k}{1 + \frac{e^{-rt}}{C}}.$$

*Cette formule a été utilisée par R. L. Pearl et L. J. Read (Proceedings of the National Academy of sciences, 1920) comme un assez bon modèle rendant compte des données concernant la population des Etats-Unis entre 1790 et 1910. Ils évaluent les constantes* $r$*,* $k$ *et* $C$ *à partir des données concernant les années 1790, 1850 et 1910, et obtiennent*

$$N = \frac{197273000}{1 + e^{-0{,}0313395t}}.$$

*Complétez les lignes de recensement les plus récents. La formule est-elle toujours adaptée ? Peut-on l'améliorer en changeant les constantes ? Ou pensez-vous qu'il faut changer le modèle ?*

**Exercice 16.** *Une population de punaises vivant sur une surface plane se rassemble en une colonie ayant la forme d'une disque. Le taux d'accroisement naturel des punaises est* $r_1$ *; de plus, les punaises situés à la périphérie souffrent du froid et ont un taux de mortalité supérieur. Si* $N$ *est le nombre total de punaises, le nombre de* *celles de la périphérie est proportionnnelle à* $\sqrt{N}$*. On trouve donc que la population* $N$ *vérifie l'équation*

$$N' = r_1 N - r_2 \sqrt{N}.$$

*Dessiner quelques solutions de cette équation. Y a-t-il un état d'équilibre , c'est à dire une solution constante ? Est-il stable ?*

**Exercice 17.** *Des nutriments entrent dans une cellule à la vitesse constante de* $R$ *molécules par unité de temps et en sortent proportionnellement à la concentration : si* $N$ *est la concentration à l'instant* $t$*, le processus ci-dessus peut s'exprimer par l'équation*

$$\frac{dN}{dt} = R - KN.$$

*Résoudre cette équation. La concentration va-t-elle tendre vers un équilibre ? Lequel ? Est-il stable ?*

**Exercice 18.** *Datation absolue.*
*Cette exercice est tiré de "Problèmes résolus de sciences de la terre et de l'univers", sous la direction de Jean-Yves Daniel, Vuibert.*
*Introduction : Dans les sciences de la terre, la datation revêt une importance capitale. Avant la découverte de la radioactivité, les méthodes de datation étaient relatives et essentiellement basées sur la répartition des fossiles. La datation absolue à partir des isotopes radioactifs dès le début du XXe siècle a donc été une révolution dans les sciences de la terre. Aujourd'hui, les méthodes radioactives ne cessent de s'affiner. Grâce aux très nombreuses études réalisées, des méthodes compémentaires "relatives" ont pu être calibrées, calées dans le temps, et devenir ainsi des méthodes "absolues". Le "géologue" dispose ainsi maintenat d'une trés grande batterie de méthodes de datation (radiométrique, anomalies magnétiques fossiles, cycles cosmologiques, cosmonucléiques,...).*

*Un élément isotopique radiogénique (père) se transforme en un élément radiogénique stable (fils) avec production soit de particules* $\alpha$ *(noyaux d'hélium),* $\beta$ *(électrons), soit de rayonnement (photons). Soit* $N(t)$ *le nombre d'atomes instables dans un échantillon chimiquement isolé. Le nombre* $dN$ *d'atomes qui se désintègrent pendant un temps* $dt$ *obéit à la loi de désintégration*

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t)$$

*où* $\lambda$ *est la constante de désintégration propre à chaque élément radioactif.*
*1) Déterminer la fonction* $N(t)$*. On nommera* $N_0$ *le nombre initial d'atomes.*
*2) Soit* $T$ *la demi-période de désintégration (c'est à dire* $N_0/N(T) = 1/2$*). Sachant que pour le couple ? cette demi-période est de* $4,51.10^9 a$*, calculer* $\lambda$*.*
*3) L'analyse chimique d'un zircon a donné* $245.10^{-6} g$ *de ? pour* $180.10^{-6} g$ *de ?. Quel est l'age de ce minéral ? Comparez avec l'age de la terre.*

**Exercice 19.** *Température dans la lithosphère.*
*Nous donnons dans son intégralité le texte d'un exercice tiré de "Problèmes résolus de sciences de la terre et de l'univers", sous la direction de Jean-Yves Daniel, Vuibert.*

*Introduction. La température est une des grandeurs physiques les plus difficiles à évaluer de l'intérieur de la Terre. Après les premiers calculs "empiriques" de Buffon, ou ceux plus techniques de Lord Kelvin, on sait maintenant que l'intérieur de la Terre est un "réacteur nucléaire", qui apporte l'essentiel de l'énergie. Nous voyons par ce problème une modélisation qui rend compte de façon satisfaisante de la température dans la lithosphère en supposant un transfert thermique par conduction.*

*Prérequis. Les équations différentielles du second ordre que l'on manipule dans cet exercice peuvent apparaitre complexes pour des étudiants de premier cycle. Pourtant, la résolution est assez simple losqu'on se place dans un milieu à* $1$ *dimension (la verticale* $z$*). Si l'étudiant parvient souvent à traiter mathématiquement ces équations, il ne saisit pas leur sens physique. le gradient (la variation d'une grandeur scalaire) est assez bien compris. Mais, la variation d'une variation est une notion encore plus difficile à appréhender. Prenons le cas de la températrure en fonction de la profondeur. On conçoit aisément que la température va augmentre en fonction de la profondeur. Sa variation en fonction de la profondeur (le gradient vertical) n'est donc pas nulle. Mais, est-ce que cette augmentation est régulière ? Si elle l'est, alors le graident serait constant. On imagine que ce n'est pas le cas, car on arriverait à des températures trop extrèmes compte tenu du gradient de surface. Aussi, le gradient varie... Augmente-t-il avec la profondeur ? Là encore, nous aurions de températures trop fortes. Alors, on peut proposer que le gradient diminue avec la profondeur. On peut encore raffiner le modèle, en se demandant si la variation de variation de varie-t-elle pas en fonction de la profondeur. Ou encore, faire intervenir le temps... Mais non, n'ayez crainte, nous estimerons que la variation de la variation de la température avec la profondeur reste constante. Cette approche est bien assez réaliste.*

*Enoncé. On sait depuis longtemps que la température augmente avec la profondueur. par exemple, on a pu mesurer que dans les mines une augmentation de* $3$ *degré tous les* $100$ *m. On parle alors de gradient de température de surface, tel que*

$$\left|\frac{\partial T}{\partial z}\right| = 30 \textit{ degré par km (pour } z \textit{ proche de } 0).$$

*1) En supposant ce gradient de température constant, quelle serait la température de la Terre ? Cela vous parait-il raisonnable ?*

*Dans la lithosphère continentale, la production radiogénique de chaleur (par désintégration des isotopes de l'uranium, thorium, et potassium) et le transport conductif de la chaleur sont des processus thermiques dominants. Dans ce cas, et en négligeant* *les variations temporelles, la température obéit à*

$$K\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + A = 0$$

*où* $K$ *est la conductance thermique et* $A$ *est la production radiogénique. On posera* $A = A_0 e^{-\frac{z}{d}}$ *où* $d$ *est l'échelle de longueur de la décroissance de* $A$ *avec la profondeur. Comme le transport de chaleur est conductif, le flux de chaleur vertical* $q$ *peut s'écrire (loi de Fourier) :*

$$q = -K\frac{\partial T}{\partial z}.$$

*On remarque que le flux de chaleur est proportionnel au produit de la conductivité thermique* $K$ *et du gradient de température. Le signe moins est justifié par le fait que le flux de chaleur est dirigé vers le haut et que* $z$ *est dirigé vers le bas.*

*2) Trouver l'équation du flux de chaleur ? (On utilisera les conditions* $q = -q_r$ *pour* $z \to +\infty$ *où* $q_r$ *est le flux de chaleur à la base de la lithosphère et* $q = q_0$ *à la surface* $z = 0$*).*

*3) Trouvez l'équation de la température.*

*4) Tracez le profil de température jusqu'à 100 km (Applications numériques :* $q_r = 0,03 Wm^{-2}$*,* $q_0 = 0,068 Wm^{-2}$*,* $d = 10km$*,* $K = 3,35 Wm^{-1}K^{-1}$ *).*