Université Joseph Fourier
Année universitaire 2008/2009
Unité MAT237

Correction de Devoir surveillé No.1

Correction de l'exercice I

On considère la courbe définie en coordonnées polaires par $\rho(\theta) = 1 + \tan(\theta/2)$.

1. Déterminer le domaine de définition et la période de l'arc paramétré.

   Solution :

   La fonction n'est pas définie pour $\cos(\theta/2) = 0$, c'est-à-dire pour $\theta = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$.

   $$D_\theta = \mathbb{R} \backslash \{(2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

   La fonction $\rho(\theta)$ est 2π-périodique. Le domaine d'étude de la fonction est :

   $$D_\theta = [0, 2\pi] \backslash \{\pi\}$$

2. Etudier la branche infinie en $\theta = \pi$ et donner la position de la courbe par rapport à son asymptote.

   Solution :

   On a $\lim_{\theta \to \pi^+} \rho(\theta) = +\infty$ et $\lim_{\theta \to \pi^-} \rho(\theta) = -\infty$.

   $$x(\theta) = \rho(\theta)\cos(\theta) = (1 + \tan(\theta/2))\cos(\theta) = \cos(\theta) + \cos(\theta)\tan(\theta/2)$$
   $$y(\theta) = \rho(\theta)\sin(\theta) = (1 + \tan(\theta/2))\sin(\theta)$$

   L'equation de l'asymptote $Y = aX + b$, $a = \lim_{\theta \to \pi} \tan(\theta) = 0$

   $$y(\theta) - \tan(\pi)x(\theta) = y(\theta) = \sin(\theta) + \sin(\theta)\tan(\theta/2)$$

   On a donc $\lim_{\theta \to \pi} y(\theta) = 2$. La courbe a la droite $y = 2$ pour asymptote en $\theta \to \pi$.

   $$y(\theta) - 2 \quad = \quad 2 - (\theta - \pi) - (1/2)(\theta - \pi)^2 + (1/6)(\theta - \pi)^3 + O((\theta - \pi)^4); \qquad (1)$$

   La fonction $y(\theta) - 2$ est positive pour $\theta - \pi$ negative et proche de zéro et négative pour θ positive et proche de zéro. La courbe paramétrée d'équation polaire $\rho(\theta) = 1 + \frac{1}{\tan(\theta/2)}$ est donc au dessus de l'asymptote pour $\pi - \varepsilon < \theta < \pi$.

3. Même question en $\theta = -\pi$.

   Solution : La fonction $\rho(\theta)$ est 2π-périodique.

4. $y = \sin(\theta) + \sin(\theta)\tan(\theta/2) = 0$ pour $\theta = 0, -\dfrac{\pi}{2}$

   $$v = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tan(\theta/2)^2)[\cos(\theta), \sin(\theta)] + (1 + \tan(\theta/2))[-\sin(\theta), \cos(\theta)]$$

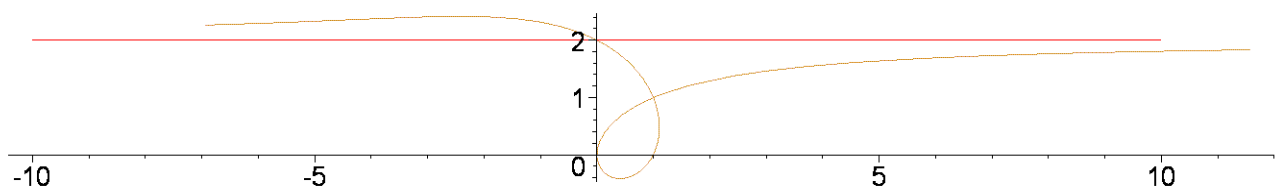
   Pour $\theta = 0$, $v(0) = [1/2, 1]$, Pour $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, $v(\dfrac{\pi}{2}) = [0, -1]$.

5. Voir la visualisation

Exercice 1.

On considère la courbe définie en coordonnées polaires par
rho(theta)=1+tan(theta/2)
1. Déterminer le domaine de définition et la periode de l'arc paramétrée.

```
> restart:with(plots):P1:=polarplot([1+tan(t/2),t,t=-19*Pi/20..9*Pi/10],color=gold,scaling=CONSTRAINED):
P2:=plot([t, 2, t=-10..10]):
display(P1, P2);
```




```
> restart:r:=(1+tan(t/2));rp:=diff((1+tan(t/2)),t);
>
```

$$r := 1 + \tan\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$rp := \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tan\left(\frac{t}{2}\right)^2$$

```
> x:=simplify(r*cos(t));  y:=simplify(r*sin(t));
```

$$x := -\frac{(-\sin(t) - 1 + \cos(t))\cos(t)}{\sin(t)}$$

$$y := -\cos(t) + \sin(t) + 1$$

```
> v:=rp*[cos(t),sin(t)]+r*[-sin(t),cos(t)];
```

$$v := \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tan\left(\frac{t}{2}\right)^2\right)[\cos(t), \sin(t)] + \left(1 + \tan\left(\frac{t}{2}\right)\right)[-\sin(t), \cos(t)]$$

```
> t:=0;v;t:=-Pi/2;v;
>
```

$$t := 0$$

$$\left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

$$t := -\frac{\pi}{2}$$

$$[0, -1]$$

```
> restart:limit((1+tan(t/2))*sin(t), t=Pi);
  limit((1+tan(t/2))*sin(t), t=-Pi);
```

$$2$$

$$2$$

```
> r:=(1+tan(t/2)):x:=simplify(r*cos(t));  y:=simplify(r*sin(t));
  taylor(y, t=Pi, 4);
```

$$x := -\frac{(-\sin(t) - 1 + \cos(t))\cos(t)}{\sin(t)}$$

$$y := -\cos(t) + \sin(t) + 1$$

$$2 - (t - \pi) - \frac{1}{2}(t - \pi)^2 + \frac{1}{6}(t - \pi)^3 + O((t - \pi)^4)$$

```
> solve(y=0, {t});
```

$$\{t = -\frac{\pi}{2}\}, \{t = 0\}$$

Exercice 2

Etudier les branches infinies de la courbe
x(t)=(t^2+2*t-2)/(t-1), y(t)=(t^2+3*t-2)/(t-1).

```
> limit((t^2+3*t-2)/(t^2+2*t-2), t=1);
```

$$2$$

```
> limit(((t^2+3*t-2)/(t-1))-2*(t^2+2*t-2)/(t-1), t=1);
```

$$-3$$

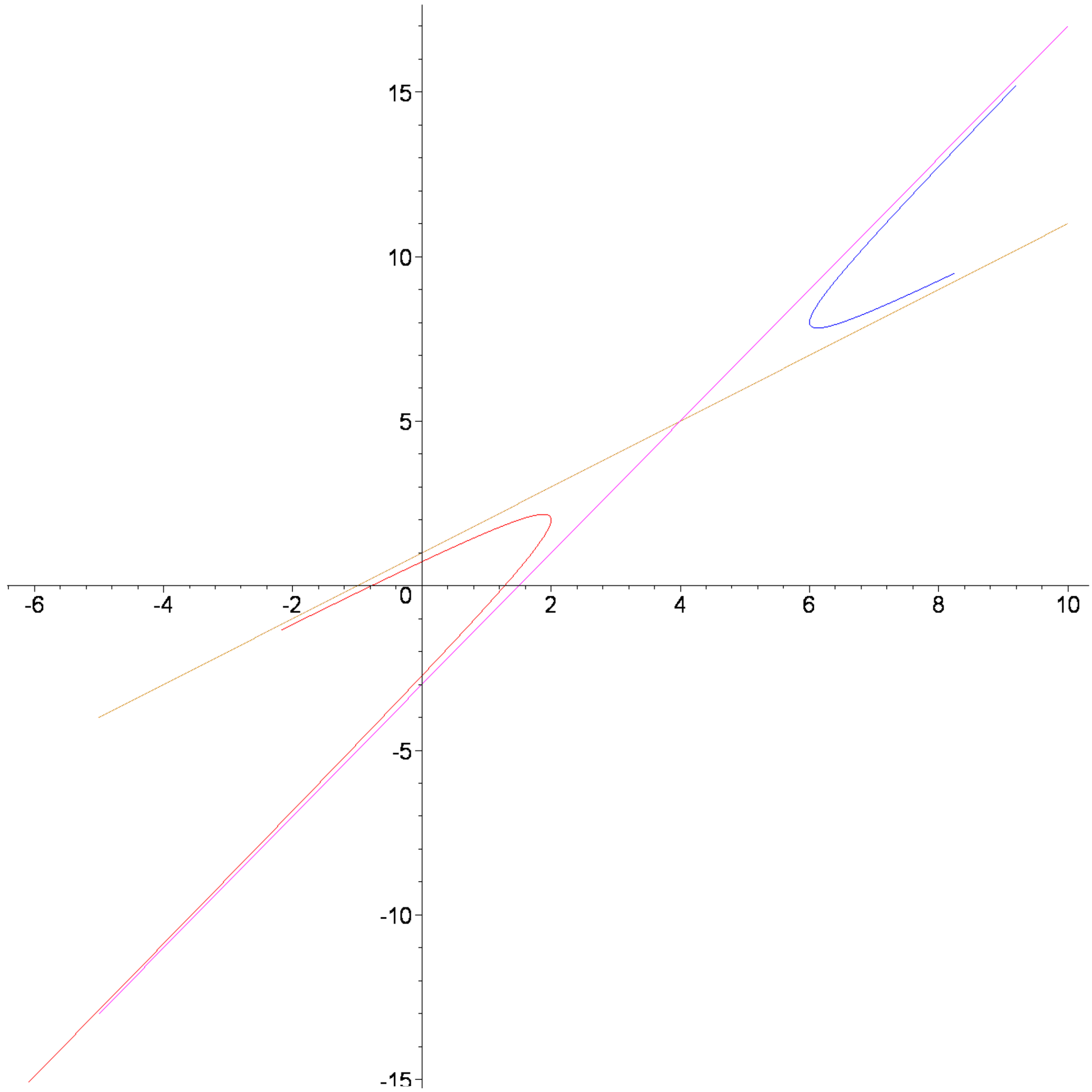
```
> limit(((t^2+3*t-2)/(t-1))-(t^2+2*t-2)/(t-1), t=infinity);
```

$$1$$

```
> #étudier les branches infinies
  with(plots):
  B1:=plot([(t^2+2*t-2)/(t-1), (t^2+3*t-2)/(t-1),
  t=-5..0.9],color=red):
  B2:=plot([(t^2+2*t-2)/(t-1), (t^2+3*t-2)/(t-1),
  t=1.2..5],color=blue):
  B3:=plot([t,2*t-3,t=-5..10],color=magenta): # asymptote oblique
  B4:=plot([t,t+1,t=-5..10],color=gold): # asymptote oblique

  display(B1,B2,B3, B4);
```

```
Warning, the name changecoords has been redefined
```



Exercice 3

Montrer que la courbe n'a pas de point singulier. Donner le repère de Frenet en tout point.

```
> #Repère de Frenet
> x:=simplify(exp(t/2)*cos(t));y:=simplify(exp(t/2)*sin(t));
```

$$x := e^{\left(\frac{t}{2}\right)} \cos(t)$$

$$y := e^{\left(\frac{t}{2}\right)} \sin(t)$$

```
> u:=diff(x,t);v:=diff(y,t);[u,v]:
  l:=simplify(sqrt(u^2+v^2)):
```

$$u := \frac{1}{2} e^{\left(\frac{t}{2}\right)} \cos(t) - e^{\left(\frac{t}{2}\right)} \sin(t)$$

$$v := \frac{1}{2} e^{\left(\frac{t}{2}\right)} \sin(t) + e^{\left(\frac{t}{2}\right)} \cos(t)$$

```
> tau:=[simplify(u/l),simplify(v/l)];
```

$$\tau := \left[-\frac{1}{5} \frac{e^{\left(\frac{t}{2}\right)} (-\cos(t) + 2 \sin(t)) \sqrt{5}}{\sqrt{e^t}}, \frac{1}{5} \frac{e^{\left(\frac{t}{2}\right)} (\sin(t) + 2 \cos(t)) \sqrt{5}}{\sqrt{e^t}} \right]$$

```
> eta:=[-simplify(v/l),simplify(u/l)];
```

$$\eta := \left[-\frac{1}{5} \frac{e^{\left(\frac{t}{2}\right)} (\sin(t) + 2 \cos(t)) \sqrt{5}}{\sqrt{e^t}}, -\frac{1}{5} \frac{e^{\left(\frac{t}{2}\right)} (-\cos(t) + 2 \sin(t)) \sqrt{5}}{\sqrt{e^t}} \right]$$

```
>
```