```
> ########################################    CC2-09    Mat237
```

I) (a) Résoudre l'équation différentielle suivante
y' = -y + 3t + 1 ; y(0) = 1.
(b) Tracer la solution et étudier le comportement de la solution en -1 et en +1.
(c) Trouver le point où la solution atteint son minimum sur R, et donner la valeur de ce minimum.

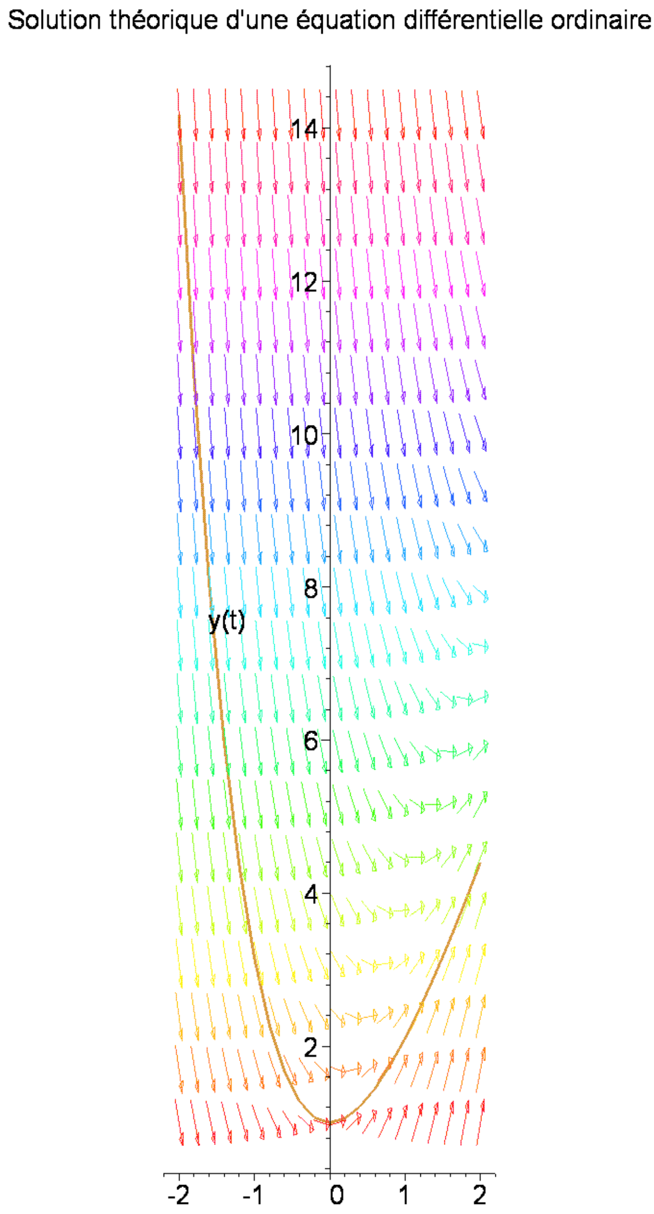
```
> restart;
  ode:=diff(y(t),t)=-y(t)+3*t+1;
  #########################################
> ###########################
  sol:=dsolve({ode, y(0)=1}, y(t));
  f(t):=solve(sol,y(t));
  tmin:=solve(diff(f(t),t)=0);
  #######################################
  with(DEtools):DEplot(ode,y(t),t=-2..2,
  [[y(0)=1]],
  title=`Solution théorique d'une équation différentielle
  ordinaire`,
  colour=y,
  #labels=[t, y],
  arrows=MEDIUM,
  linecolor=[gold], scaling=CONSTRAINED
  );
```

$$ode := \frac{d}{dt}\,y(t) = -y(t) + 3\,t + 1$$

$$sol := y(t) = -2 + 3\,t + 3\,\mathbf{e}^{(-t)}$$

$$f(t) := -2 + 3\,t + 3\,\mathbf{e}^{(-t)}$$

$$tmin := 0$$




```
> ymin:=eval(f(t),t=tmin);
>
```

$$ymin := 1$$

```
> evalf(ymin);
```

$$1.$$

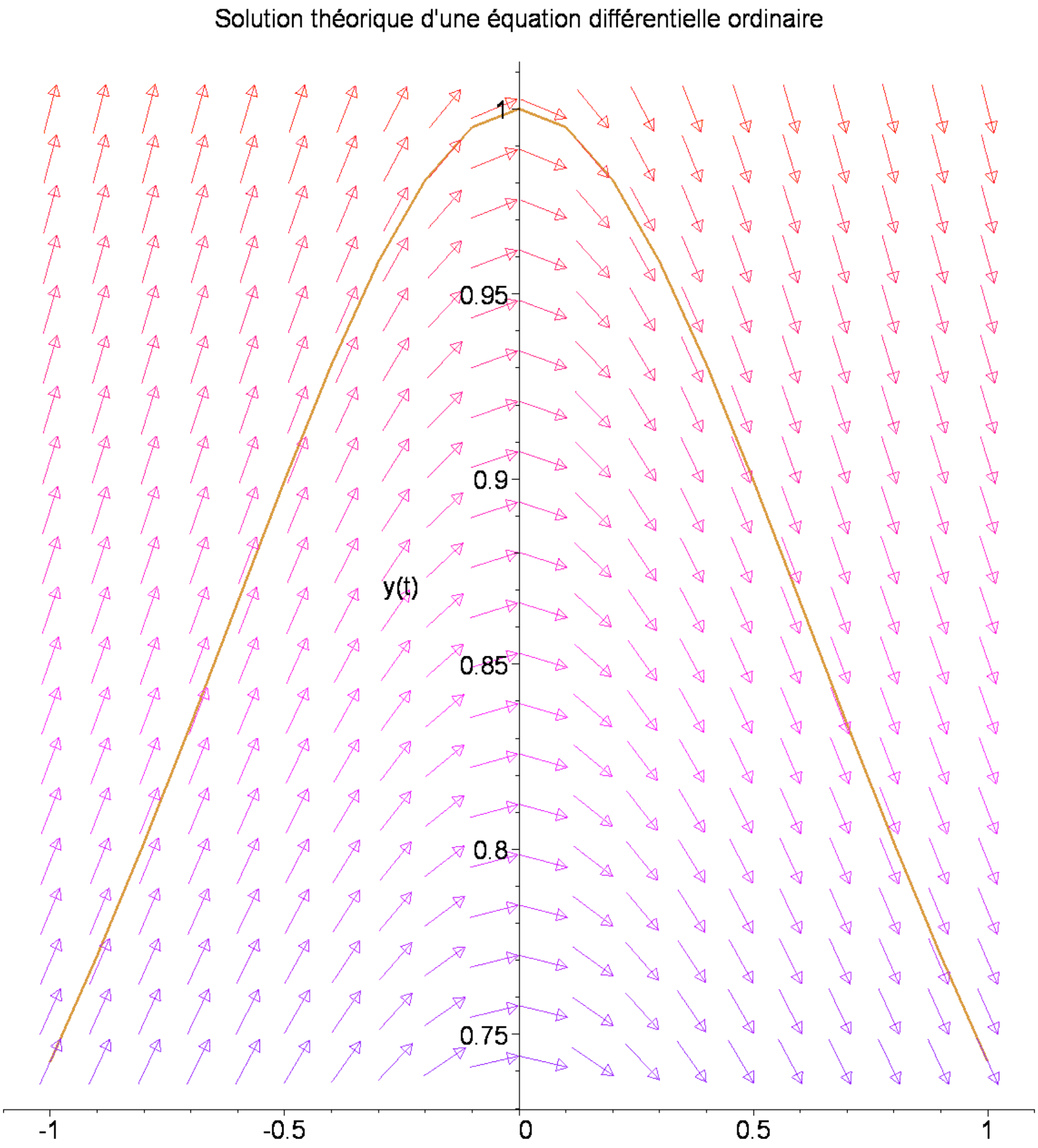
II) Équations différentielles à variables séparées : résoudre l'équation différentielle suivante : (2t + 3)y'(t) + ty^2(t) = 0 ; y(0) = 1.

```
> restart;
  ode:=(t^2+1)*diff(y(t),t)+t*y(t)^2=0;
  #########################################
> ###########################
  sol:=dsolve({ode, y(0)=1}, y(t));
  #f(t):=solve(sol,y(t));
  #tmin:=solve(diff(f(t),t)=0);
```

```
########################################
with(DEtools):DEplot(ode,y(t),t=-1..1,
[[y(0)=1]],
title=`Solution théorique d'une équation différentielle
ordinaire`,
colour=y,
#labels=[t, y],
arrows=MEDIUM,
# stepsize=0.01,
linecolor=[gold]#, scaling=CONSTRAINED
);
```

$$ode := (t^2 + 1)\left(\frac{d}{dt}\mathrm{y}(t)\right) + t\,\mathrm{y}(t)^2 = 0$$

$$sol := \mathrm{y}(t) = -\frac{2}{-\ln(t^2 + 1) - 2}$$

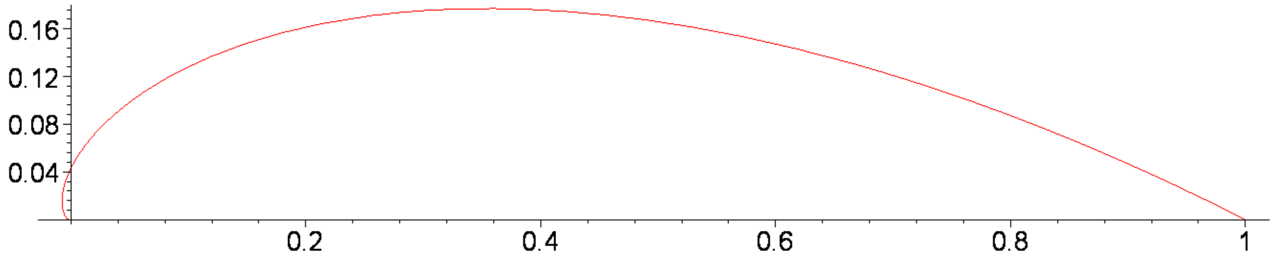



III) Soit la courbe plane \Gamma définie par x(t) = exp(-2t) cos(t), y(t) = exp(-2t) sin(t) pour t \in [0, \pi ].
Calculer la longueur de \Gamma puis la courbure en tout point.

**Réponses:** la longueur = $\dfrac{1\,5^{\left(\frac{1}{2}\right)}\,(\mathbf{e}^{(2\,\pi)} - 1)\,\mathbf{e}^{(-2\,\pi)}}{2}$

la courbure $\dfrac{1\,5^{\left(\frac{1}{2}\right)}\,\mathbf{e}^{(2\,t)}}{5}$

```
> plot([exp(-2*t)*cos(t),exp(-2*t)*sin(t), t=0..Pi],
  scaling=CONSTRAINED);
```




```
> with(VectorCalculus):
  SetCoordinates( 'cartesian' ):ArcLength(
  <exp(-2*t)*cos(t),exp(-2*t)*sin(t)>, t=0..Pi ) ;
Warning, the assigned names <,> and <|> now have a global binding

Warning, these protected names have been redefined and unprotected: *, +, ., D,
Vector, diff, int, limit, series
```

$$\frac{1}{2}\sqrt{5}\,(\mathbf{e}^{(2\,\pi)}-1)\,\mathbf{e}^{(-2\,\pi)}$$

```
> with(VectorCalculus):
  SetCoordinates( 'cartesian' );
  K:=simplify(Curvature( <exp(-2*t)*cos(t),exp(-2*t)*sin(t)> ))
  assuming t::positive ;
```

$$cartesian$$

$$K := \frac{1}{5}\sqrt{5}\,\mathbf{e}^{(2\,t)}$$

>

IV) Calculer l'intégrale curviligne
\int_\gamma (2 + y^2) dx + (1 + 2xy) dy
où gamma est le cercle de centre (0, 0) et de rayon 6 parcouru dans le sens positif.
**Réponse**: 0

```
> restart:F:=2*x+y+x*y^2;'P'=diff(F,x);'Q'=diff(F,y);
```

$$F := 2\,x + y + x\,y^2$$

$$P = 2 + y^2$$

$$Q = 1 + 2\,x\,y$$