Équation d'Euler-Lagrange

Un article de Wikipédia, l'encyclopédie libre.

Sommaire

Introduction

Cette équation joue un rôle fondamental dans le calcul des variations. On retrouve cette équation dans de nombreux problèmes, tel que le problème brachistochrone ou bien encore les problèmes géodésiques.

Enoncé

Soit *J* la fonctionnelle définie par:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t))dt$$

Avec $\dot{x}(t) = \frac{\partial x(t)}{\partial t}$. Une condition nécesaire pour que J soit stationnaire est que l'on ait:

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right) = 0.$$

Variantes

Dans de nombreux problèmes, *f* ne dépend pas directement de *t*, (c'est-à-dire $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$) et l'équation précédente se simplifie sous la forme suivante, appelée **Identité de Beltrami**:

$$f - \dot{x}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = C$$

Avec C une constante du problème

Démonstration de l'égalité d'Euler-Lagrange

Il s'agit d'une très célèbre démonstration en mathématiques. Elle repose sur le lemme fondamental du calcul des variations.

Nous cherchons une fonction *x* satisfaisant les conditions aux bords *f*(*a*) = *c*,*f*(*b*) = *d*, et rendant extrémale la fonctionnelle:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t)) dt$$

Supposons que les dérivées premières de f soient continues.

Si *x* rend extrémale J, alors une pertubation infinitésimale de *x* f préservera les conditions aux bords et augmentera J (si x est un minimum) ou diminuera J (si x est un maximum).

Soit $x_\varepsilon(t) = x(t) + \varepsilon\eta(t)$ une perturbation de x, où $\eta(t)$ est une fonction différentiable vérifiant $\eta(t_0) = \eta(t_1) = 0$. Définissons :

$$J(\epsilon) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x_\epsilon(t), \dot{x}_\epsilon(t)) dt$$

Calculons alors la dérivée de J par rapport à ε:

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}\epsilon} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\epsilon}(t, x_\epsilon(t), \dot{x}_\epsilon(t)) dt$$

Le développement du calcul donne:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\epsilon} = \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \epsilon} + \frac{\partial f}{\partial x_\epsilon}\frac{\partial x_\epsilon}{\partial \epsilon} + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_\epsilon}\frac{\partial \dot{x}_\epsilon}{\partial \epsilon} = \eta(t)\frac{\partial f}{\partial x_\epsilon} + \dot{\eta}(t)\frac{\partial f}{\partial \dot{x}_\epsilon}$$

Donc :

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}\epsilon} = \int_{t_0}^{t_1} \left(\eta(t)\frac{\partial f}{\partial x_\epsilon} + \dot{\eta}(t)\frac{\partial f}{\partial \dot{x}_\epsilon} \right) dt$$

Quand $\varepsilon = 0$ on a bien $x_\varepsilon = x$, ce qui donne $J'(0) = 0$, soit encore :

$$J'(0) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\eta(t)\frac{\partial f}{\partial x} + \dot{\eta}(t)\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) dt = \int_{t_0}^{t_1} \eta(t)\frac{\partial f}{\partial x} dt + \int_{t_0}^{t_1} \dot{\eta}(t)\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} dt$$

Par intégration par parties:

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} \eta(t)\frac{\partial f}{\partial x} dt + \left[\eta(t)\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \eta(t)\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}'} dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}'} \right) \eta(t) dt + \Big[\eta$$

Avec les conditions aux bords $\eta(t_0) = \eta(t_1) = 0$, on a:

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) \eta(t) dt$$

En appliquant le lemme fondamental du calcul des variations avec $\eta(t_0) = \eta(t_1) = 0$, on obtient:

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}$$

Catégories : Équation différentielle • Équation aux dérivées partielles