

INVARIANT DE CASSON ET CHIRURGIE DE TYPE HOPF

JEAN-BAPTISTE MEILHAN

ABSTRACT. On donne une formule de chirurgie pour l'invariant de Casson d'une sphère d'homologie entière obtenue de S^3 par chirurgie le long d'un entrelacs de type Hopf, *i.e.* un entrelacs à $2n$ composantes dont la même matrice d'enlacement est celle de l'union disjointe de n entrelacs de Hopf positif.

1. INTRODUCTION

On dit qu'un entrelacs framé L de S^3 à deux composantes est *de type Hopf* si le framing de chaque composante est nul et son nombre d'enlacement vaut 1, *ie* si L a la même matrice d'enlacement que l'entrelacs de Hopf positif.

Notre premier résultat donne une formule pour la variation de l'invariant de Casson λ des sphères d'homologie entière lors de la chirurgie le long d'un tel entrelacs.

Théorème 1.1. *Soit $L = L_1 \cup L_2$ un entrelacs de type Hopf dans S^3 . On a*

$$\lambda(S_L^3) = a_3(L) - a_2(L_1) - a_2(L_2),$$

où $a_i(K)$ désigne le coefficient de z^i dans le polynôme de Conway d'un entrelacs K .

On rappelle la définition du polynôme de Conway dans §2.1.

Remarque 1.2. Pour un entrelacs $L = L_1 \cup L_2$ à deux composantes, soit $\delta_1(L) = a_1(L) = lk(L)$ et $\delta_2(L) = a_3(L) - a_1(L) \cdot (a_2(L_1) + a_2(L_2))$. Nakanishi et Ohyama ont montré que δ_1 et δ_2 classifient les entrelacs à deux composantes à 'Δ link homotopie' (ou 'self-Δ equivalence') près [5, Thm. 3]. Ils montrent aussi que, si $\delta_1(L)$ est impair, alors nécessairement $\delta_2(L)$ est un entier pair [5, Cor. C].

Pour un entrelacs de type Hopf L , nous voyons donc par Théorème 1.1 que $\delta_2(L) = \lambda(S_L^3)$ est pair – ce qui peut être vérifié directement. Nous voyons de plus que $\lambda(S_L^3)$ est inchangé lorsque l'on applique un Δ-mouvement sur une composante de L .

Cette formule peut être généralisée comme suit.

Pour $n \geq 1$, on dit qu'un entrelacs framé L de S^3 à $2n$ composantes est *de type Hopf* si sa matrice d'enlacement est celle de l'union disjointe de n entrelacs de Hopf positif. On appelle *paire de Hopf* tout sous-entrelacs à deux composantes de L dont l'enlacement vaut 1.

On note $\mathbf{N} = \{1, \dots, 2n\}$. Pour tout sous-ensemble $I \subseteq \mathbf{N}$, dont on désignera le cardinal par $|I|$, on note $L_I := \cup_{i \in I} L_i$ le sous-entrelacs de L à $|I|$ composantes associé. On note $p(I)$ le nombre de paires de Hopf de L incluses dans L_I .

Théorème 1.3. *Soit L un entrelacs de type Hopf à $2n$ composantes dans S^3 , pour $n \geq 1$. Alors on a*

$$\lambda(S_L^3) = \sum_{J \subseteq \mathbf{N}; J \neq \emptyset} (-1)^{p(J)+1} \cdot a_{|J|+1}(L_J),$$

où $a_i(K)$ désigne le coefficient de z^i dans le polynôme de Conway d'un entrelacs K .

Remarque 1.4. Pour $n = 1$, ceci nous redonne bien la formule du théorème 1.1. Pour $n = 2$, c'est à dire dans le cas d'un entrelacs de type Hopf à quatre composantes $L = (L_1^1 \cup L_2^1) \cup (L_1^2 \cup L_2^2)$, on a

$$\begin{aligned} \lambda(S_L^3) &= -a_5(L) + \sum_{1 \leq i \neq j \leq 2} \left(a_4(L_1^i \cup L_1^j \cup L_2^j) + a_4(L_2^i \cup L_1^j \cup L_2^j) \right) \\ &+ \sum_{1 \leq i \neq j \leq 2} \left(a_3(L_1^i \cup L_2^i) - a_3(L_1^i \cup L_2^j) \right) - \sum_{1 \leq i \leq 2} (a_2(L_1^i) + a_2(L_2^i)). \end{aligned}$$

2. UNE FORMULE DE CHIRURGIE POUR L'INVARIANT DE CASSON

Dans cette section, on rappelle une formule de chirurgie pour l'invariant de Casson-Walker-Lescop, due à C. Lescop [3, p. 19-20], qui fait intervenir, outre la matrice d'enlacement de l'entrelacs de chirurgie, le polynôme de Conway.

2.1. Le polynôme de Conway. Soit L un entrelacs de S^3 , et S une surface de Seifert connexe pour L : pour une base de $H_1(S)$ donnée, on note M la matrice de Seifert associée. Alors le déterminant $\det(xM - x^{-1}M^T)$ est un polynôme à coefficients entiers en la variable $z = x - x^{-1}$, noté $\nabla_L(z)$: le *polynôme de Conway*. C'est un invariant des entrelacs, et il vérifie la relation skein suivante :

$$\nabla \begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \nwarrow \nearrow \end{array} (z) - \nabla \begin{array}{c} \nwarrow \nearrow \\ \nearrow \searrow \end{array} (z) = z \nabla \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} (z),$$

où $\begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \nwarrow \nearrow \end{array}$, $\begin{array}{c} \nwarrow \nearrow \\ \nearrow \searrow \end{array}$ et $\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array}$ sont des entrelacs identiques en dehors d'une petite boule dans laquelle ils sont comme représentés. On a $\nabla_{\text{nœud trivial}} = 1$, et donc $\nabla_L = 0$ pour L un entrelacs trivial à $k > 1$ composantes. En fait, $\nabla_L = 0$ pour tout entrelacs *scindé*, c'est-à-dire tout entrelacs L pouvant s'écrire comme une union $L = L' \cup L''$ avec L' et L'' deux sous-entrelacs contenus dans des boules disjointes de S^3 .

Remarque 2.1. Dans le cas où L est un nœud, le polynôme de Conway est de la forme

$$\nabla_L(z) = 1 + c_2 z^2 + c_4 z^4 + \dots$$

De façon générale, si L est un entrelacs à n composantes, le polynôme de Conway est de la forme

$$\nabla_L(z) = z^{n-1}(c_0 + c_2 z^2 + c_4 z^4 + \dots).$$

2.2. Quelques notations. Pour simplifier un peu les choses, on va ici se restreindre au cas des présentations de chirurgie *entière* dans S^3 .

Soit $L = L_1 \cup \dots \cup L_n$ un entrelacs framé à n composantes dans S^3 . Le nombre d'enlacement $lk(L_i, L_j)$ sera noté l_{ij} , et le framing de la composante L_i sera noté s_i . Rappelons que l'on suppose ici que $s_i \in \mathbb{Z}$ pour tout i . La matrice d'enlacement de l'entrelacs L est notée $E(L)$, et on désigne par $b_{\pm}(L)$ le nombre de valeurs propres positives (resp. négatives) de $E(L)$.

On note $N = \{1, \dots, n\}$. Pour tout sous-ensemble $I \subseteq N$, dont on désignera le cardinal par $|I|$, on note $L_I := \cup_{i \in I} L_i$ le sous-entrelacs de L associé, et on définit la matrice carrée $E(L_{N \setminus I}; I) = (n_{ij})_{(i,j)}$ d'ordre $N - |I|$ par :

$$n_{ij} = \begin{cases} s_i + \sum_{k \in I} l_{ik} & \text{si } i = j \\ l_{ij} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par exemple, si L est un entrelacs à 2 composantes avec $E(L) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, alors $N = \{1, 2\}$ et $E(L_{N \setminus \{1\}}; \{1\}) = E(L_{N \setminus \{2\}}; \{2\}) = (1)$.

2.3. Formule de chirurgie. L'invariant de Casson de la 3-variété obtenue de S^3 par chirurgie le long de l'entrelacs framé L est donné par la formule

$$\begin{aligned} \lambda(S_L^3) &= (-1)^{b_-(L)} \sum_{J \subset N; J \neq \emptyset} \det(E(L_{N \setminus J}; J)) \cdot (-1)^{|J|+1} \cdot a_{|J|+1}(L_J) \\ &+ \frac{(-1)^{b_-(L)}}{24} \sum_{J \subset N; J \neq \emptyset} (-1)^{|J|} \cdot \det(E(L_{N \setminus J})) \cdot \theta(L_J) \\ &+ |H_1(S_L^3)| \frac{b_+(L) - b_-(L)}{8}, \end{aligned}$$

où

- $a_{|J|+1}(L_J)$ désigne le coefficient de $z^{|J|+1}$ du polynôme de Conway de L_J .
-

$$\theta(L_J) = \begin{cases} \theta_b(L_J) & \text{si } |J| > 2 \\ \theta_b(L_J) - 2l_{ij} & \text{si } J = \{i, j\} \\ \theta_b(L_J) + 2 & \text{si } J = \{i\} \end{cases}$$

où $\theta_b(L_J)$ est donné par la formule

$$\sum_{\substack{K \subset J \\ K \neq \emptyset}} \left(\sum_{\substack{\sigma, \text{ perm. cycl.} \\ \text{de } \{1, \dots, |K|\}}} l_{1\sigma(1)} \cdot l_{2\sigma(2)} \cdots l_{|K|\sigma(|K|)} \sum_{\substack{(i,j) \in K^2 \\ g \in \sigma_J \setminus K}} l_{ig(1)} \cdot l_{g(1)g(2)} \cdots l_{g(|I \setminus K|)j} \right),$$

où la notation σ_K désigne l'ensemble des bijections de $\{1, \dots, |K|\}$ vers K .

Remarque 2.2. Par convention, le déterminant d'une matrice vide est toujours 1.

Remarque 2.3. La formule skein pour le polynôme de Conway donnée dans §2.1 diffère par un signe celle donnée dans [3, p. 27]. Si on note $\tilde{\nabla}$ l'invariant d'entrelacs défini par la formule skein de [3, p. 27], et si l'on note $\tilde{a}_n(L)$ le coefficient de z^n de $\tilde{\nabla}_L(z)$ pour un entrelacs L , alors on a la relation $\tilde{a}_{|L|+1}(L) = (-1)^{|L|+1} a_{|L|+1}(L)$, où $|L|$ est le nombre de composantes de L . Ceci justifie la différence entre la formule de chirurgie donnée ici et celle de [3].

3. PREUVE DU THÉORÈME 1.3.

Ici nous prouvons la formule du théorème 1.3 en appliquant simplement la formule de chirurgie de Lescop ci-dessus à un entrelacs $L = \cup_{i=1}^n L_1^i \cup L_2^i$ de type Hopf à $2n$ composantes.

3.1. Le cas $n = 1$. Commençons par le cas simple où $n = 1$ (et prouvons ainsi le théorème 1.1).

On a $b_+(L) = b_-(L) = 1$, et donc $b_+(L) - b_-(L) = 0$: le troisième terme dans la formule de Lescop est nul.

Montrons maintenant que le deuxième terme de cette formule est lui aussi toujours nul. Pour cela on introduit la notion d'*enlacement circulaire* d'un entrelacs K à $|K|$ composantes [3, p.30]:

$$Lk_c(K) := \sum_{\substack{\sigma, \text{ perm. cycl.} \\ \text{de } \{1, \dots, |K|\}}} l_{1\sigma(1)} \cdot l_{2\sigma(2)} \cdots l_{|K|\sigma(|K|)}.$$

On remarque que cet enlacement circulaire apparait dans la formule pour θ_b donnée dans §2.3.

On a ici $Lk_c(L_1 \cup L_2) = 1$ et $Lk_c(L_1) = Lk_c(L_2) = 0$. Nous pouvons donc calculer $\theta_b(L_K)$ pour tous les sous-ensembles non vides K de $\{1, 2\}$:

$$\theta_b(L_{\{1\}}) = \theta_b(L_{\{2\}}) = 0 \text{ et } \theta_b(L_{\{1,2\}}) = l_{11} + l_{12} + l_{21} + l_{22} = 2.$$

Il suit que

$$\theta(L_{\{1\}}) = \theta(L_{\{2\}}) = 2 \text{ et } \theta_b(L_{\{1,2\}}) = 0.$$

On observe de plus que, pour $J = \{i\}$ ($i = 1, 2$), on a $\det(E(L_{N \setminus J})) = \det(0) = 0$. Le deuxième terme de la formule de Lescop est donc ici nul.

Ainsi, nous obtenons que $\lambda(S_L^3)$ est donné par

$$\begin{aligned} & - \sum_{J \subset N; J \neq \emptyset} \det(E(L_{N \setminus J}; J)) \cdot (-1)^{|J|+1} \cdot a_{|J|+1}(L_J) \\ & = -\det(1) \cdot a_2(L_1) - \det(1) \cdot a_2(L_2) + \det(\emptyset) \cdot a_3(L) \\ & = a_3(L) - a_2(L_1) - a_2(L_2). \end{aligned}$$

Ceci prouve Théorème 1.1.

3.2. Cas général. Revenons maintenant au cas général d'un entrelacs de type Hopf $L = \cup_{i=1}^n L_1^i \cup L_2^i$ à $2n$ composantes dans S^3 , avec $lk(L_1^i, L_2^j) = \delta_{ij}$ et $lk(L_1^i, L_1^j) = lk(L_2^i, L_2^j) = 0$. On a donc maintenant $N = \{1, 2, \dots, 2n\}$.

Pour un tel entrelacs, on a $b_+(L) = b_-(L) = n$. En particulier, $b_+(L) - b_-(L) = 0$, ce qui implique que le troisième terme dans la formule de chirurgie donnée dans §2.3 est toujours nul.

On vérifie directement que les nombres d'enlacements circulaires d'un entrelacs de type Hopf sont donnée comme suit.

Lemme 3.1. *Soit $L = \cup_{i=1}^n L_1^i \cup L_2^i$ un entrelacs de type Hopf à $2n$ composantes dans S^3 . Alors*

$$\begin{cases} Lk_c(L_1^i \cup L_2^i) = 1 & \text{pour tout } i = 1, \dots, n, \\ Lk_c(K) = 0 & \text{pour tout autre sous-entrelacs } K \subseteq L. \end{cases}$$

D'autre part, on sait que $\det(E(K)) = 0$ pour tout sous-entrelacs K de L tel que K contient une seule composante de $L_1^i \cup L_2^i$ pour un certain i . En particulier, $\det(E(L_{N \setminus J})) = 0$ pour tout J avec $|J| = 1$.

On obtient donc que le deuxième terme dans la formule de Lescop est nul dans le cas d'un entrelacs de type Hopf.

Il reste maintenant à montrer que le premier terme de la formule de Lescop, faisant intervenir les coefficients du polynôme d'alexander-Conway, est bien donné par la formule du théorème 1.3. On a en effet montré que, si L est de type Hopf à $2n$ composantes, alors

$$\lambda(S_L^3) = \sum_{J \subset N; J \neq \emptyset} \det(E(L_{N \setminus J}; J)) \cdot (-1)^{n+|J|+1} \cdot a_{|J|+1}(L_J).$$

Pour tout sous-ensemble $I \subseteq \mathbf{N} = \{1, \dots, 2n\}$, on note $m(I)$ le nombre de paires de Hopf de L dont au moins une composante est incluse dans I . Clairement, on a $[I] + m(I) = p(I)$. De plus, on vérifie facilement que

Lemme 3.2. *Soit L un entrelacs de type Hopf à $2n$ composantes. Pour tout sous-ensemble $I \subseteq \mathbf{N} = \{1, \dots, 2n\}$, on a $\det(E(L_{N \setminus I}; I)) = (-1)^{n+m(I)}$.*

(En particulier, pour $J = \emptyset$, on retrouve simplement la formule $\det(E(L)) = (-1)^n$ pour la matrice d'enlacement d'un entrelacs de type Hopf à $2n$ composantes.)

Il suit que

$$\lambda(S_L^3) = \sum_{\substack{J \subset N \\ J \neq \emptyset}} (-1)^{n+m(J)} \cdot (-1)^{n+|J|+1} \cdot a_{|J|+1}(L_J) = \sum_{\substack{J \subset N \\ J \neq \emptyset}} (-1)^{p(J)+1} \cdot a_{|J|+1}(L_J).$$

4. UNE AUTRE PREUVE DU THÉORÈME 1.1.

Soit $L = L_1 \cup L_2$ un entrelacs de type Hopf dans S^3 .

L'idée est d'appliquer successivement des opérations élémentaires à l'entrelacs L , jusqu'à obtenir un entrelacs de type Hopf pour lequel l'invariant de Casson est facilement calculable. A chaque étape de notre processus de simplification, nous utilisons le lemme suivant pour calculer la variation de l'invariant de Casson.

Lemme 4.1 ([1]). *Soient $L^+ = L_1^+ \cup L_2$ et $L^- = L_1^- \cup L_2$ deux entrelacs de type Hopf qui ne diffèrent que par un changement de croisement sur la première composante. Soit $L_a \cup L_b$ l'entrelacs à deux composante obtenu de L_1^\pm en lissant ce croisement. Alors on a*

$$\lambda(S_{L^+}^3) - \lambda(S_{L^-}^3) = \frac{f_2 \cdot l_{ab} - l_{a2} \cdot l_{b2}}{f_1 \cdot f_2 - l_{12}^2},$$

où f_1 , resp. l_2 , désigne le framing de L_1^\pm , resp. de L_2 , et l_{ab} , resp. l_{a2} , l_{b2} , désigne le nombre d'enlacement $lk(L_a, L_b)$, resp. $lk(L_a, L_2)$, $lk(L_b, L_2)$.

Nous commençons par modifier l'entrelacs L de manière à réduire les valeurs de $a_2(L_1)$ et $a_2(L_2)$ à zéro.

Lemme 4.2. *Soit $L_T = L'_1 \cup L_2$, respectivement $L_8 = L''_1 \cup L_2$, l'entrelacs de type Hopf obtenu de $L_1 \cup L_2$ comme montré dans la figure 4.1.*

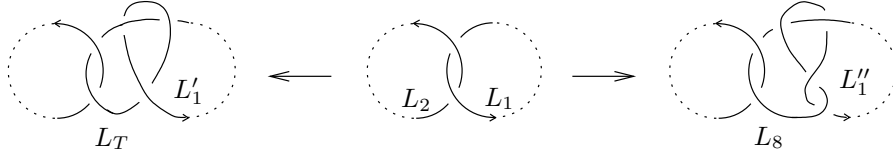


FIGURE 4.1

Alors on a

$$\begin{aligned} a_2(L'_1) &= a_2(L_1) + 1 & \text{et} & & a_2(L''_1) &= a_2(L_1) - 1, \\ a_3(L_T) &= a_3(L) - 1 & \text{et} & & a_3(L_8) &= a_3(L) + 1, \end{aligned}$$

et

$$\lambda(S_{L_T}^3) = \lambda(S_{L_8}^3) = \lambda(S_L^3).$$

Ce Lemme se montre par un calcul direct des Polynômes d'Alexander-conway. La dernière formule, pour l'invariant de Casson, est obtenue grace au lemme 4.1.

En utilisant le lemme 4.2 $|a_2(L_1)| + |a_2(L_2)|$ fois, on peut construire un nouvel entrelacs de type Hopf $K = K_1 \cup K_2$ tel que

$$a_2(K_1) = a_2(K_2) = 0 \quad , \quad \delta_2(K) = \delta_2(L) \quad \text{et} \quad \lambda(S_K^3) = \lambda(S_L^3).$$

Le prochain Lemme nous permet de modifier la valeur de δ_2 .

Lemme 4.3. *Soit L_+ , respectivement L_- , l'entrelacs de type Hopf obtenu de L comme montré dans la figure 4.2.*

Alors on a

$$a_3(L_\pm) = a_3(L) \pm 2 \quad \text{et} \quad \lambda(S_{L_\pm}^3) = \lambda(S_L^3) \pm 2.$$

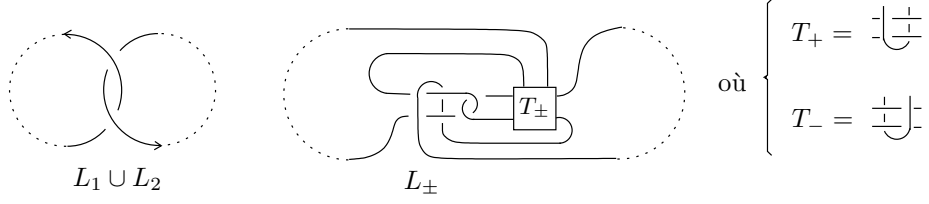


FIGURE 4.2

Clairement, l'opération considérée dans le lemme 4.3 n'affecte pas les valeurs de a_2 des composantes d'enrelacs. Donc si l'on applique ce lemme $|\delta_2(L)|$ fois à l'entrelacs K , on obtient un entrelacs de type Hopf $J = J_1 \cup J_2$ qui satisfait

$$a_3(J) = a_2(J_1) = a_2(J_2) = 0 \quad \text{et} \quad \lambda(S_J^3) = \lambda(S_L^3) + \delta_2(L).$$

Dans le prochain lemme, nous montrons comment modifier l'invariant $P_0^{(3)}(K; 1)$ d'une composante K d'un entrelacs de type Hopf. Rappelons que, si $P(K; t, z)$ désigne le polynôme de HOMFLY d'un nœud K , alors $P_0^{(3)}(K; 1)$ est la troisième dérivée de $P_0(K; t) = P(K; t, 0)$ évaluée en 1. On rappelle aussi que $P_0^{(3)}(K; 1)$ est toujours un multiple de 24.

Lemme 4.4. Soit $L^\pm = L_1^\pm \cup L_2$ l'entrelacs de type Hopf obtenu de $L_1 \cup L_2$ comme montré dans la figure 4.3.

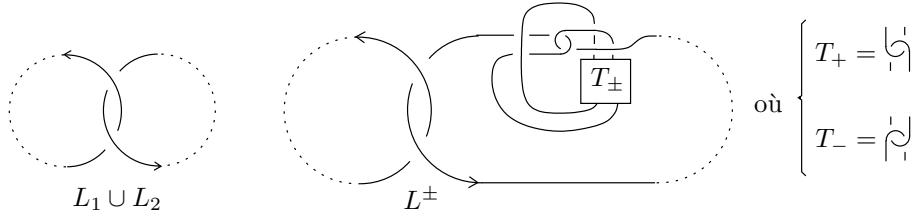


FIGURE 4.3

Alors on a

$$a_2(L_1^\pm) = a_2(L_1) \quad , \quad a_3(L^\pm) = a_3(L) \quad , \quad P_0^{(3)}(L_1^\pm; 1) = P_0^{(3)}(L_1; 1) \pm 24$$

et

$$\lambda(S_{L^\pm}^3) = \lambda(S_L^3).$$

Ce lemme nous permet de supposer que notre entrelacs de type Hopf $J = J_1 \cup J_2$ est tel que $P_0^{(3)}(J_1; 1) = P_0^{(3)}(J_2; 1) = 0$.

Dans [4], on montre que deux entrelacs à deux composantes L et L' sont C_4 -équivalents si et seulement si $v(L) = v(L')$ pour tout invariant de Vassiliev v de degré ≤ 3 . D'après [2], cette dernière condition est équivalente à dire que $lk(L) = lk(L')$, $a_2(L_i) = a_2(L'_i)$, $a_3(L) = a_3(L')$ et $P_0^{(3)}(L_i; 1) = P_0^{(3)}(L'_i; 1)$ ($i = 1, 2$). Nous en déduisons que J est C_4 -équivalent à l'entrelacs de Hopf positif H . Par ailleurs, le fait que l'invariant de Casson est un invariant de type fini de degré 2 (au sens de Goussarov-Habiro) nous permet de dire que, si deux entrelacs L et L' sont C_4 -équivalents, alors $\lambda(S_L^3) = \lambda(S_{L'}^3)$. Par conséquent, l'entrelacs de type Hopf J satisfait $\lambda(S_J^3) = \lambda(S_H^3) = 0$. Ceci achève la preuve.

REFERENCES

- [1] J. Johannes, *A Type 2 Polynomial Invariant of Links Derived from the Casson-Walker Invariant*, J. Knot Theory Ram. **8** (1999) 491-504.
- [2] T. Kanenobu, Y. Miyazawa, A. Tani, *Vassiliev link invariants of order three*, J. Knot Theory Ram. **7** (1998), n°4, 433-462.
- [3] C. Lescop, *Global surgery formula for the Casson-Walker invariant*, Annals of Mathematics Studies **140**, Princeton Univ. Press (1996).
- [4] J.B. Meilhan, A. Yasuhara, *On C_n -moves for links*, preprint (2006) GT/0607116.
- [5] Y. Nakanishi, Y. Ohyama, *Delta link homotopy for two component links III*, J. Math. Soc. Japan **55** (2003), 641-654.

INSTITUT FOURIER – UNIVERSITÉ GRENOBLE 1, 100 RUE DES MATHS – BP 74, 38402 ST MARTIN
D'HÈRES, FRANCE

E-mail address: jean-baptiste.meilhan@ujf-grenoble.fr