

MATHEMATIQUES APPROFONDIES

(option M. Samuel)

4 heures

- 1) Soit K un corps. Montrer que le polynôme $X^2 + Y^3 - Z^7$ est irréductible sur K (on pourra ordonner ses facteurs par rapport à la variable X).
- 2) On considère l'anneau $A = K[x, y, z]$ où $z^7 = x^2 + y^3$. Montrer que A est intègre. On pose $t = z^{-1}$, $u = t^3x$ et $v = t^2y$. Démontrer que:
 - a) z est un élément premier de A ,
 - b) $z \in K[x, y, t]$,
 - c) $z = u^2 + v^3$,
 - d) u et v sont algébriquement indépendants sur K .

En déduire que $A[t] = K[u, v, (u^2 + v^3)^{-1}]$, que $A[t]$ est factoriel, et que A est factoriel.

- 3) Montrer, en généralisant la méthode de 2), que tout anneau $A = K[x, y, z]$ où $z^c = x^a + y^b$ est factoriel lorsque les exposants a et b (≥ 2) sont étrangers et $c \equiv 1$ modulo ab .
- 4) Montrer que l'anneau $A = K[x, y, z]$ où $z^5 = x^2 + y^3$ est factoriel (poser $t = z^{-1}$, $u = t^3x$, $v = t^2y$, et montrer qu'on a $t \in K[u, v]$). Énoncer et démontrer une généralisation de ce résultat, analogue à celle de 3).
- 5) Lorsque A est l'un des anneaux de 3) et de 4), l'anneau de séries formelles $A[[T]]$ est-il factoriel?

NB - Tous les résultats démontrés dans le cours peuvent être utilisés sans démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

Ouvrages de référence

Pour un développement systématique de l'Algèbre Commutative,
le lecteur consultera:

BOURBAKI

"Algèbre Commutative", chap. I à VII, 3 vol., Hermann (Paris).

ZARISKI - SAMUEL

"Commutative Algebra", 2 vol., Van Nostrand (Princeton),
1958 et 1960.

Pour l'Algèbre Homologique:

NORTHCOTT

"An Introduction to Homological Algebra", Cambridge Univ. Press.

CARTAN - EILENBERG

"Homological Algebra", Princeton University Press, 1956.

Mémoires originaux

ANDREOTTI - SALMON

"Anelli con unica decomponibilità in fattori primi ed un problema
di intersezioni complete" Monatsh. f. Math., 61 (1957), 97-142.

AUSLANDER - BUCHSBAUM

"Homological dimension in local rings", Trans. Amer. Math. Soc.,
85 (1957), 390-405.

AUSLANDER - BUCHSBAUM

"Unique factorization in regular local rings", Proc. Nat. Acad. Sci.
U. S. A., 45 (1959), 733-734.

GROTHENDIECK

Séminaire de Géométrie Algébrique 1961-1962, Institut des Hautes Études Scientifiques, notes polycopiées.

LEFSCHETZ

"On certain numerical invariants of algebraic varieties", Trans. Amer. Math. Soc., 22 (1921), 327-482.

NAGATA

"A remark on the unique factorization theorem", J. Math. Soc. Japan, 9 (1957), 143-145.

SALMON

"Sur les séries formelles restreintes", C. R. Acad. Sci. Paris, 9 Juillet 1962.

SAMUEL

"On unique factorization domains", Illinois J. Math., 5(1961), 1-17.

SAMUEL

"Sur les anneaux factoriels", Bull. Soc. Math. France, 89 (1961), 155-173.

SAMUEL

"Un exemple d'anneau factoriel", Bull. Soc. Math. São Paulo, 1962.

SERRE

"Sur la dimension homologique des anneaux et des modules noethériens"; Proc. Int. Symposium on Algebraic Number Theory, Tokyo-Nikko, 1955.

SEVERI

"Una proprietà delle forme algebriche prive di punti multipli", Acad. Lincei Rendic., 5, 15 (1906), 691-696.