COURS D'ALGÈBRE

Alexis Marin

COLLECTION

ENSEIGNEMENT DES SCIENCES

ROGER GODEMENT

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

Cours d'algèbre

TROISIÈME ÉDITION MISE A JOUR

HERMANN

115, Boulevard Saint-Germain, Paris 6

TABLE

PRÉFACE

L'introduction, dans les programmes de Mathématiques des Facultés des Sciences, de notions d'algèbre relativement modernes et étendues, a rendu urgente la rédaction, en français, d'un ouvrage de référence accessible aux débutants; le livre que nous présentons ici est une tentative pour combler cette lacune et nous allons esquisser les principales idées qui nous ont guidé en le rédigeant.

Cet ouvrage, tout d'abord, est basé sur le cours enseigné par l'auteur, à Paris, dans le cadre du certificat de Mathématiques Générales : on a donc fait en sorte que sa lecture ne demande pas d'autres connaissances que celles qu'on pourrait acquérir dans l'Enseignement Secondaire. En même temps, on a ajouté les quelques compléments nécessaires pour couvrir à peu près le programme d'Algèbre de la licence (il s'agit, dans l'état actuel des choses, du certificat de Mathématiques I), qui ne diffère pas sensiblement de celui de Mathématiques Générales. Cet ouvrage devrait donc pouvoir être utilisé pendant plusieurs années par les étudiants en Mathématiques, pures ou appliquées, tout en couvrant approximativement les besoins de ceux qui s'intéresseront à la Physique plus ou moins théorique; après en avoir assimilé le contenu, le lecteur pourra entrer de plain-pied dans les traités spécialisés vraiment sérieux, mais nous n'espérons évidemment pas que le lecteur normal sera dans cette situation un an après son entrée dans une Faculté des Sciences !

Les sujets traités sont ceux que tout le monde s'accorde aujourd'hui à considérer comme indispensables aux futurs mathématiciens ou physiciens : ensembles et fonctions; groupes, anneaux, corps, nombres complexes; espaces vectoriels, applications linéaires, matrices; espaces vectoriels de dimension finie, systèmes d'équations linéaires, déterminants, formules de Cramer; polynômes, fractions rationnelles, équations algébriques; réduction des matrices. Le choix de ces sujets reflète évidemment l'évolution des Mathématiques dans les cinquante dernières années, mais nous avons pensé que cette évolution devait aussi se traduire par l'emploi d'un style qui, jusqu'alors, était réservé aux ouvrages destinés aux mathématiciens professionnels.

Beaucoup de gens, et notamment la plupart de ceux qui se bornent à *utiliser* les Mathématiques, prétendent que lorsqu'on écrit pour les débutants il est inutile, ou même nuisible, d'essayer de faire preuve d'une trop grande rigueur, de tout démontrer, d'introduire des notions trop générales, d'utiliser une terminologie strictement définie et dépourvue de discours fleuris. S'ils avaient raison, cela voudrait dire que, *contrairement* aux mathématiciens professionnels, et au bon sens, les débutants comprennent d'autant plus facilement un texte mathématique qu'il est plus mal rédigé. Les latinistes professionnels, c'est leur métier, comprennent les inscriptions tronquées qu'on extrait tous les jours du sous-sol de l'Italie, mais il n'est encore venu à l'idée d'aucun professeur de Latin de les utiliser pour enseigner cette langue aux débutants — on préfère avoir recours à des grammaires bien écrites... Il en est de même en Mathématiques, et lorsqu'il s'agit d'interpréter le sens d'une définition obscure, de compléter une démonstration insuffisante, ou de déceler les véritables raisons d'un théorème, on ne peut pas raisonnablement espérer que le débutant fasse preuve du même flair que le professionnel.

Il faut du reste observer que les progrès réalisés depuis le début du siècle donnent maintenant à ceux qui désirent le faire la possibilité de renouveler substantiellement l'enseignement des Mathématiques, soit en apportant de nouvelles notions simples et générales qui permettent d'élargir considérablement la portée des raisonnements traditionnels, soit en mettant à jour des raisonnements qui rendent accessibles aux débutants des résultats considérés autrefois comme difficiles; et le souci de la rigueur dont les grands spécialistes de la Théorie des Nombres avaient toujours fait preuve, après s'être répandu depuis une trentaine d'années dans toutes les branches des Mathématiques, gagne maintenant, encore qu'avec des fortunes très diverses, les auteurs de manuels scolaires, au point que certains d'entre eux sont nettement en avance sur l'ensemble des professionnels eux-mêmes... Ce renouvellement, et les exagérations qui l'accompagnent parfois, ne vont pas sans soulever les protestations de certains utilisateurs, vexés d'avoir de la peine à comprendre les manuels de leurs enfants; et l'on entend parfois reprocher aux mathématiciens d'exagérer l'importance de leurs contributions en détournant l'attention des débutants des problèmes plus concrets. Il y a là, sans aucun doute, un fond de vérité; mais alors que devrait-on dire des spécialistes de la « recherche spatiale », par exemple, qui trouvent tout naturel de réclamer des sommes gigantesques pour aller reconnaître Venus, alors que, sous leurs yeux, des centaines de millions d'hommes en sont encore à tenter de ne pas mourir de faim? Les Mathématiques ont du moins l'avantage d'être bon marché...

Au risque de provoquer, chez certains, les sentiments d'horreur et de consternation que Paolo Ucello a si merveilleusement représentés dans la *Profanation de l'Hostie*, il nous faut bien dire du reste, car la question se pose de plus en plus, notre désaccord avec les nombreuses personnalités qui, actuellement, demandent aux scientifiques en général, et aux mathématiciens en particulier, de former les milliers de techniciens dont nous aurions, paraît-il, besoin de toute urgence pour survivre. Les choses étant ce qu'elles sont, il nous semble que, dans les « grandes » nations sur-développées scientifiquement et techniquement où nous vivons, le premier devoir des mathématiciens, et de beaucoup d'autres, serait plutôt de fournir ce qu'on ne leur demande pas — à savoir des hommes capables de réfléchir par eux-mêmes, de

dépister les arguments faux et les phrases ambiguës, et aux yeux desquels la diffusion de la vérité importerait infiniment plus que, par exemple, la Télévision planétaire en couleurs et en relief : des hommes libres, et non pas des robots pour technocrates. Il est tristement évident que la meilleure façon de former ces hommes qui nous manquent n'est pas de leur enseigner les sciences mathématiques et physiques, ces branches du savoir où la bienséance consiste, en premier lieu, à faire semblant d'ignorer jusqu'à l'existence même de problèmes humains, et auxquelles nos sociétés hautement civilisées accordent, ce qui devrait paraître louche, la première place. Mais même en enseignant des Mathématiques, on peut du moins essayer de donner aux gens le goût de la liberté et de la critique, et les habituer à se voir traités en êtres humains doués de la faculté de comprendre.

Pour en revenir aux débutants auxquels ce livre s'adresse, nous avons donc cherché à leur parler le langage des mathématiciens professionnels, en définissant tous les termes techniques, clairement et une fois pour toutes, en énonçant explicitement tous les théorèmes et, à quelques exceptions près imposées pour rester dans des limites raisonnables, en les démontrant tous complètement (*).

On s'est également efforcé d'établir des théorèmes aussi généraux que possible tout en respectant une règle évidente — à savoir que, pour les débutants, une généralisation est nuisible si elle oblige à compliquer substantiellement la démonstration d'un résultat simple, ou bien si l'on ne s'en sert pas effectivement dans la pratique. C'est ainsi qu'en Algèbre linéaire — question que l'on réduit généralement à l'étude des espaces vectoriels réels de dimension finie — nous avons toujours adopté au minimum le point de vue des espaces vectoriels sur un corps commutatif quelconque, ou même non commutatif là où l'hypothèse de commutativité n'avancerait à rien; et les notions les plus simples, celles qui n'utilisent que des additions et des multiplications, sont même exposées pour les modules sur un anneau quelconque, qui jouent dans toutes les branches des Mathématiques autres que l'Analyse un rôle au moins aussi important que les espaces vectoriels puisque la notion de module contient, entre autres, celle de groupe commutatif. Les simplifications qu'on aurait pu apporter au texte en se limitant aux espaces vectoriels réels seraient beaucoup plus que compensées par la perte de généralité qu'impliquerait une telle limitation. Or c'est justement la possibilité d'apprendre *sans effort supplémentaire* des résultats de plus en plus généraux qui permet aux jeunes de parvenir aussi rapidement au niveau de la recherche qu'il y a cent ans, malgré la formidable accumulation de découvertes à laquelle on a assisté depuis lors.

L'absence d'*Exercices* réduirait à peu de choses l'utilité d'un ouvrage destiné aux débutants; on en trouvera donc ici plusieurs centaines, les uns très faciles,

(*) La quasi-totalité des énoncés non démontrés se trouve dans les §§ 0 à 5; il est évidemment hors de question, pour des débutants, d'exposer la théorie des ensembles et la logique formelle sans admettre de nombreux résultats « évidents ». Le § 0 sur le raisonnement logique a pour but non seulement de signaler au débutant les raisonnements « permis » et ceux qui ne le sont pas (ce que la lecture des copies d'examen rend indispensable), mais aussi de lui montrer que la « philosophie des Mathématiques » ne se réduit pas nécessairement à un verbalisme sans structure.

d'autres plus difficiles (ils sont précédés d'un signe ¶), d'autres encore destinés aux gens vraiment courageux (ils sont précédés du signe ¶¶); certains sont des exercices de calcul pratique ou même numérique, d'autres permettent au lecteur de se familiariser avec les concepts abstraits, d'autres encore apportent au texte des compléments importants et laissent deviner au lecteur les théories plus substantielles de l'Algèbre moderne, comme on disait il y a trente ans. On peut aussi conjecturer que certains énoncés sont faux — on n'a encore jamais vu un traité de Mathématiques échapper totalement à cette regrettable possibilité; les énoncés faux sont du reste souvent les plus instructifs.

Enfin, et contrairement à toutes les traditions en matière d'ouvrages destinés aux débutants, on a cru devoir présenter au lecteur une Bibliographie formée de titres soigneusement choisis, et dont beaucoup sont dus à des mathématiciens de première grandeur. Il nous paraît utile que le lecteur se procure et utilise quelques-uns de ces livres, afin de prendre connaissance d'autres points de vue possibles, et de s'habituer à *consulter* des livres.

Ces ouvrages, pour la plupart étrangers, contribueront peut-être d'autre part à faire prendre conscience à beaucoup de jeunes gens, mystifiés dès l'âge de vingt ans par une propagande écrasante, du fait que même en négligeant les « peuplades inférieures » de nos grands parents, les Français ne forment qu'un ilot de cinquante millions d'hommes au milieu d'un océan de 700 millions de Blancs; or ceux-ci vont comme nous à l'école dès l'âge de six ans, et y restent même, dans certains pays, plus longtemps que nous. Il est facile d'en déduire que les meilleurs ouvrages de Mathématiques (par exemple) ont environ une chance sur quatorze d'être écrits par des gens « bien de chez nous », et c'est justement ce que l'expérience confirme en ce qui concerne l'Algèbre élémentaire. Nous nous en voudrions de ne pas le faire savoir alors que certains jeunes, qui ne sont pourtant pas, eux, responsables des quelques centaines de milliers de cadavres qui encombrent les consciences de leurs pères, se laissent gagner par le nationalisme, le racisme et la xénophobie.

Juillet 1962

Théorie des ensembles

Le but des §§ 0 à 5 est d'introduire les notions d'ensemble et de fonction, sans lesquelles on ne peut *rien* faire en Mathématiques — et avec lesquelles, au contraire, on peut *tout* faire. Ces notions ne se sont pas dégagées avant la fin du siècle dernier, tout au moins sous la forme générale qu'on trouvera ici; auparavant, on ne parlait pas explicitement d'ensembles, et la notion de fonction recouvrait plusieurs espèces différentes d'objets soumis à des limitations imposées par le développement historique des Mathématiques : algébricité, analyticité, dérivabilité, continuité, etc..., fonctions d'une variable, de deux variables, d'une variable complexe, etc.... Toutes ces notions sont aujourd'hui des cas particuliers d'un schéma unique, plus général et conceptuellement plus simple que tous les cas particuliers qu'il gouverne. En même temps, le langage de la théorie des ensembles (dont on modifie encore de temps à autre la terminologie, mais non les concepts de base) s'est universellement répandu, et son utilisation est devenue une condition *sine qua non* de clarté et de rigueur.

L'étude des §§ suivants est donc à peu près indispensable pour aborder la suite de ce livre; les §§ 1 et 2, le nº 1 du § 3 sont particulièrement importants dans l'immédiat; le lecteur pourra attendre d'avoir besoin du § 4 avant de l'étudier sérieusement; le § 5 est d'une utilité pratique assez faible si l'on admet que le lecteur est déjà au courant des principales propriétés des nombres entiers; mais le nº 7 de ce § est très souvent utilisé.

Quant au § 0, c'est une introduction à la Logique mathématique; on a tenté d'y donner une idée approximative de la façon dont les mathématiciens conçoivent les objets dont ils s'occupent, et d'y rassembler un certain nombre de modes de raisonnement particulièrement importants. Ce §, comme d'ailleurs les §§ 1, 2 ou 3, n'a pas à être étudié en détail par le débutant, car les notions qu'on y trouvera sont constamment utilisées, et le lecteur se familiarisera forcément avec elles à la longue, et même très rapidement dans la plupart des cas.

On conseille enfin au débutant de ne pas s'effrayer de l'aspect abrupt, et qui lui semblera sans doute formidablement abstrait, de ces premiers §§. Le meilleur conseil qu'on pourrait lui donner serait d'oublier totalement et jusqu'à nouvel ordre les Mathématiques qu'il peut déjà connaître (et en particulier toute la Géométrie Élémentaire qui, mise à part la notion générale de « transformation géométrique », n'a aucun rapport avec les questions traitées ici). Il est également recommandé de prendre les définitions des termes techniques *au pied de la lettre*.