§ 24. Déterminants

1. *Propriétés fondamentales des déterminants*

Étant donnée une matrice carrée

$$X = \begin{vmatrix} \xi_{11} & \dots & \xi_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \xi_{1n} & \dots & \xi_{nn} \end{vmatrix}$$

à coefficients dans un anneau commutatif K, on a défini son déterminant au § 23, n° 5 comme étant le scalaire

$$\text{dét}(X) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathfrak{p}(\sigma)\, \xi_{1,\sigma(1)} \dots \xi_{n,\sigma(n)}.$$

Si l'on introduit, dans le module K^n, l'endomorphisme u dont la matrice (par rapport à la base canonique de K^n) est X, et les vecteurs

$$x_i = u(e_i) = (\xi_{i1}, \dots, \xi_{in})$$

représentés par les *colonnes* de la matrice X, on a aussi

$$\text{dét}(X) = \text{dét}(u) = D(x_1, \dots, x_n)$$

où $D(x_1, \dots, x_n)$ désigne le déterminant des vecteurs x_i par rapport à la base canonique $e_1, \dots, e_n$ de K^n.

Il résulte évidemment de là que *le déterminant de* X *est une fonction multilinéaire alternée des colonnes de* X. De là résultent les règles de calcul suivantes, importantes dans la pratique :

a) *Un déterminant qui a deux colonnes égales est nul.*

Car une forme multilinéaire alternée est nulle lorsque deux des vecteurs variables qu'elle contient sont égaux.

b) *Si l'on fait subir aux colonnes d'un déterminant une permutation σ, la valeur du déterminant considéré est multipliée par la signature de σ;* en particulier, *un déterminant est multiplié par* -1 *lorsqu'on permute deux de ses colonnes.*

Cela provient de l'identité

$$f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = \mathfrak{p}(\sigma) f(x_1, \ldots, x_n)$$

valable pour toute fonction multilinéaire alternée.

Par exemple :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b & a & c \\ b' & a' & c' \\ b'' & a'' & c'' \end{vmatrix} = +\begin{vmatrix} c & a & b \\ c' & a' & b' \\ c'' & a'' & b'' \end{vmatrix}.$$

c) Si, dans un déterminant, on multiplie tous les termes d'une colonne donnée par le même scalaire λ, *le déterminant considéré est multiplié par* λ.

d) Supposons que, pour un entier donné i, les termes de la i^e *colonne de la matrice* X *soient de la forme*

$$\xi_{ij} = \xi'_{ij} + \xi''_{ij} \quad (1 \leqslant j \leqslant n);$$

soit X' (*resp.* X'') *la matrice déduite de* X *en y substituant* ξ'_{ij} (*resp.* ξ''_{ij}) *à* ξ_{ij} *pour* $1 \leqslant j \leqslant n$; *on a alors*

$$\text{dét}(X) = \text{dét}(X') + \text{dét}(X'').$$

Les propriétés *c*) et *d*) traduisent les relations (3) et (4) du § 22.

Par exemple on a

$$\begin{vmatrix} a & u+2v & c \\ a' & u'+2v' & c' \\ a'' & u''+2v'' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & u & c \\ a' & u' & c' \\ a'' & u'' & c'' \end{vmatrix} + 2.\begin{vmatrix} a & v & c \\ a' & v' & c' \\ a'' & v'' & c'' \end{vmatrix}$$

En combinant les propriétés *a*), *c*) et *d*) on obtient

e) La valeur d'un déterminant ne change pas si l'on ajoute à l'une de ses colonnes une combinaison linéaire quelconque des autres colonnes.

Par exemple considérons le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix};$$

en retranchant la seconde colonne de la troisième, puis la première de la seconde, on trouve le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

qui est nul puisqu'il a deux colonnes égales.

D'autre part, la relation

$$\text{dét}({}^t X) = \text{dét}(X)$$

du § 23, Théorème 6, montre que :

f) La valeur d'un déterminant ne change pas lorsqu'on échange ses lignes et ses colonnes.

Il résulte de là qu'un déterminant est fonction multilinéaire alternée de ses *lignes* aussi bien que de ses colonnes. Par suite :

g) Les règles a), ..., e) demeurent valables si l'on y remplace partout le mot colonne par le mot ligne.

2. Développement suivant les éléments d'une ligne ou d'une colonne

Soient X un K-module admettant une base $(a_1, \ldots, a_n)$ à n éléments, et f une forme $(n-1)$-linéaire alternée sur X. Le Théorème 9 du § 23 montre que

$$f(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_{n-1} \leqslant n} \gamma_{i_1 \ldots i_{n-1}} \cdot \begin{vmatrix} \xi_{1, i_1} & \ldots & \xi_{n-1, i_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_{1, i_{n-1}} & \ldots & \xi_{n-1, i_{n-1}} \end{vmatrix}$$

où

$$x_i = \sum \xi_{ij} a_j, \qquad \gamma_{i_1 \ldots i_{n-1}} = f(a_{i_1}, \ldots, a_{i_{n-1}}).$$

Mais les $n-1$ entiers $i_1, \ldots, i_{n-1}$ étant deux à deux distincts et compris entre 1 et n, on voit que les suites $i_1 < \cdots < i_{n-1}$ qui figurent dans la formule précédente sont au nombre de n, et sont les suivantes :

$$(2, \ldots, n); \quad (1, 3, \ldots, n); \quad \ldots; \quad (1, \ldots, n-1),$$

autrement dit ce sont les suites de la forme

$$1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n$$

avec $1 \leqslant j \leqslant n$. Donc la formule précédente s'écrit encore

(1) $$f(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} \gamma_j . D_j(x_1, \ldots, x_{n-1})$$

où l'on pose

(2) $$D_j(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \begin{vmatrix} \xi_{11} & \ldots & \xi_{n-1,1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_{1,j-1} & \ldots & \xi_{n-1,j-1} \\ \xi_{1,j+1} & \ldots & \xi_{n-1,j+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_{1n} & \ldots & \xi_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

et

(3) $$\gamma_j = f(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_n).$$

On notera que le scalaire $D_j(x_1, \ldots, x_{n-1})$ est le déterminant de la matrice obtenue en supprimant la j^e ligne de la matrice

(4) $$\begin{pmatrix} \xi_{11} & \ldots & \xi_{n-1,1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_{1n} & \ldots & \xi_{n-1,n} \end{pmatrix}$$

formée avec les composantes des vecteurs x_i.

Cela établi, prenons pour X le module K^n, pour base de X la base canonique de K^n et pour f l'expression

$$(5)\qquad f(x_1, \ldots, x_{n-1}) = D(x_1, \ldots, x_{i-1}, u, x_i, \ldots, x_{n-1})$$

où u est un élément fixe de K^n et où D désigne le déterminant par rapport à la base canonique : il est clair, puisque D est n-linéaire alternée, que f est bien une forme $(n-1)$-linéaire alternée sur K^n. Posant

$$u = \sum \alpha_j e_j,$$

on a d'après le nº 1

$$(6)\qquad f(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \begin{vmatrix} \xi_{11} & \ldots & \xi_{i-1,1} & \alpha_1 & \xi_{i1} & \ldots & \xi_{n-1,1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_{1n} & \ldots & \xi_{i-1,n} & \alpha_n & \xi_{in} & \ldots & \xi_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

D'autre part l'expression (2) est le déterminant d'ordre $n - 1$ formé avec les coordonnées d'indice $\neq j$ des vecteurs $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Il reste à calculer

$$\gamma_j = f(e_1, \ldots, e_{j-1}, e_{j+1}, \ldots, e_n) = \begin{cases} D(e_1, \ldots, e_{j-1}, e_{j+1}, \ldots, e_{i-1}, u, e_i, \ldots, e_n) & \text{si } j \leqslant i \\ D(e_1, \ldots, e_{i-1}, u, e_i, \ldots, e_{j-1}, e_{j+1}, \ldots, e_n) & \text{si } j > i; \end{cases}$$

comme u est somme du vecteur $\alpha_j e_j$ et d'une combinaison linéaire des vecteurs

$$e_1, \ldots, e_{j-1}, e_{j+1}, \ldots, e_n$$

qui figurent dans le déterminant à calculer, on peut remplacer u par $\alpha_j e_j$; il vient donc

$$\gamma_j = \begin{cases} \alpha_j . D(e_1, \ldots, e_{j-1}, e_{j+1}, \ldots, e_{i-1}, e_j, e_i, \ldots, e_n) & \text{si } j \leqslant i \\ \alpha_j . D(e_1, \ldots, e_{i-1}, e_j, e_i, \ldots, e_{j-1}, e_{j+1}, \ldots, e_n) & \text{si } j > i, \end{cases}$$

d'où immédiatement

$$\gamma_j = (-1)^{i+j} \alpha_j . D(e_1, \ldots, e_n) = (-1)^{i+j} \alpha_j.$$

Portant les résultats obtenus dans la relation (1) il vient donc l'identité

$$f(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \sum_{j=1}^{j=n} (-1)^{i+j} \alpha_j . \begin{vmatrix} \xi_{11} & \ldots & \xi_{n-1,1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_{1,j-1} & \ldots & \xi_{n-1,j-1} \\ \xi_{1,j+1} & \ldots & \xi_{n-1,j+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_{1,n} & \ldots & \xi_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

En comparant avec (6), et en adoptant des notations plus symétriques, on obtient donc le résultat suivant :

THÉORÈME 1. *Soit* $X = (\xi_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ *une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans un anneau commutatif* K. *Désignons par* X_{ij} *la matrice obtenue en supprimant la i^e colonne et la*

j^e ligne de X. *On a alors*

$$(7)\qquad \text{dét}(X) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} (-1)^{i+j} \xi_{ij} . \text{dét}(X_{ij})$$

pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$.

Comme les scalaires dét (X_{ij}) sont indépendants des termes $\xi_{i1}, \ldots, \xi_{in}$ de la i^e colonne de X, la formule (7) met en évidence le fait (évident par définition des formes multilinéaires) que le déterminant de X est fonction linéaire des termes qui figurent sur la i^e colonne de X. Pour cette raison on dit que la formule (7) est le **développement de dét (X) suivant la i^e colonne de X.**

Comme dét $({}^tX)$ = dét (X) on a aussi bien entendu la formule

$$(8)\qquad \text{dét}(X) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} (-1)^{i+j} \xi_{ij} . \text{dét}(X_{ij});$$

celle-ci s'appelle le **développement de dét (X) suivant la j^e ligne de X.**

Exemple 1. On a l'identité

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{vmatrix} = a . \begin{vmatrix} b' & c' & d' \\ b'' & c'' & d'' \\ b''' & c''' & d''' \end{vmatrix} - b . \begin{vmatrix} a' & c' & d' \\ a'' & c'' & d'' \\ a''' & c''' & d''' \end{vmatrix} + c . \begin{vmatrix} a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \\ a''' & b''' & d''' \end{vmatrix} - d . \begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{vmatrix}.$$

Exemple 2. Prenons pour X une matrice **triangulaire**, i.e. de la forme

$$X = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} & \ldots & \alpha_{n1} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{32} & \ldots & \alpha_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix};$$

en la développant suivant sa première colonne on trouve

$$\text{dét}(X) = \alpha_{11} . \begin{pmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{32} & \ldots & \alpha_{n2} \\ 0 & \alpha_{33} & \ldots & \alpha_{n3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

d'où résulte, par récurrence sur n, qu'on a

$$\text{dét}(X) = \alpha_{11}\alpha_{22} \ldots \alpha_{nn},$$

produit des termes diagonaux de X.

Cette formule est un cas particulier de la suivante. Soient $n_1, \ldots, n_p$ des entiers strictement positifs, et considérons une matrice de la forme

$$X = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{p1} \\ 0 & A_{22} & \ldots & A_{p2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & A_{pp} \end{pmatrix}$$

où A_{ij} est une matrice à n_i lignes et n_j colonnes quels que soient i et j. On a alors

$$\text{dét}(X) = \text{dét}(A_{11})\,\text{dét}(A_{22})\ldots\text{dét}(A_{pp}).$$

¶ Pour établir ce résultat, il suffit, en raisonnant par récurrence sur p, de le prouver pour $p = 2$, autrement dit de montrer que

$$\text{dét}\begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix} = \text{dét}(A)\,.\,\text{dét}(D)$$

si A est une matrice carrée d'ordre p, D une matrice carrée d'ordre q, et B une matrice à p colonnes et q lignes. Pour cela, plaçons-nous dans K^{p+q} et soit u l'endomorphisme de K^{p+q} ayant X pour matrice par rapport à la base canonique $(e_1, \ldots, e_{p+q})$; soient E le sous-espace engendré par $e_1, \ldots, e_p$ et F le sous-espace engendré par $e_{p+1}, \ldots, e_q$, de sorte que

$$K^{p+q} = E \oplus F;$$

soient enfin v l'endomorphisme de E admettant A pour matrice par rapport à la base $(e_1, \ldots, e_p)$ de E, w l'endomorphisme de F de matrice D par rapport à la base $(e_{p+1}, \ldots, e_{p+q})$ de F, et $D(x_1, \ldots, x_{p+q})$ le déterminant des vecteurs variables $x_1, \ldots, x_{p+q}$ par rapport à la base $e_1, \ldots, e_{p+q}$ de K^{p+q} en sorte que

$$\text{dét}(X) = D(u(e_1), \ldots, u(e_{p+q})).$$

On a visiblement

$$u(e_1) = v(e_1), \ \ldots, \ u(e_p) = v(e_p),$$

$$\text{dét}(X) = D(v(e_1), \ldots, v(e_p), b_{p+1}, \ldots, b_{p+q})$$

où l'on pose provisoirement

$$b_{p+j} = u(e_{p+j});$$

or, $b_{p+1}, \ldots, b_{p+q}$ étant donnés, il est clair que l'expression

$$D(x_1, \ldots, x_p, b_{p+1}, \ldots, b_{p+q}),$$

où les x_i varient dans E, est une forme p-linéaire alternée sur E; donc (§ 23, nº 5, formule (29)) on a

$$D(v(e_1), \ldots, v(e_p), b_{p+1}, \ldots, b_{p+q}) = \text{dét}(v)\,.\,D(e_1, \ldots, e_p, b_{p+1}, \ldots)$$

en sorte qu'il vient déjà

$$\text{dét}(X) = \text{dét}(A)\,.\,D(e_1, \ldots, e_p, b_{p+1}, \ldots, b_{p+q});$$

or

$$u(e_{p+1}) = w(e_{p+1}) + a_{p+1}, \ \ldots, \ u(e_{p+q}) = w(e_{p+q}) + a_{p+q}$$

avec des vecteurs $a_{p+j} \in E$; donc

$$\begin{aligned} D(e_1, \ldots, b_{p+q}) &= D(e_1, \ldots, e_p, w(e_{p+1}) + a_{p+1}, \ldots, w(e_{p+q}) + a_{p+q}) \\ &= D(e_1, \ldots, e_p, w(e_{p+1}), \ldots, w(e_{p+q})) \end{aligned}$$

puisque les $a_{p+j} \in E$ sont des combinaisons linéaires de $e_1, \ldots, e_p$ (utiliser la règle (e) du nº 1 par exemple). Mais un raisonnement analogue à celui qu'on a utilisé plus haut montre évidemment que

$$D(e_1, \ldots, e_p, w(e_{p+1}), \ldots, w(e_{p+q})) = \text{dét}(w)\,.\,D(e_1, \ldots, e_{p+q}),$$

et comme dét (w) = dét (D) on trouve en définitive la formule

$$\text{dét}(X) = \text{dét}(A)\,\text{dét}(D)$$

cherchée.

3. *Matrices complémentaires*

Soit

$$X = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \ldots & \xi_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_{1n} & \ldots & \xi_{nn} \end{pmatrix}$$

une matrice carrée à coefficients dans l'anneau commutatif K. On appelle **complémentaire** de X la matrice

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} \tilde{\xi}_{11} & \ldots & \tilde{\xi}_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \tilde{\xi}_{1n} & \ldots & \tilde{\xi}_{nn} \end{pmatrix}$$

dont les termes sont donnés par la relation

$$\tilde{\xi}_{ij} = (-1)^{i+j}\,.\,\text{dét}(X_{ji}) \tag{9}$$

où X_{ji}, rappelons-le, désigne la matrice déduite de X par suppression de la i^e ligne et de la j^e colonne.

Théorème 2. *Soit* X *une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans un anneau commutatif. On a alors*

$$\tilde{X}\,.\,X = X\,.\,\tilde{X} = \text{dét}(X)\,.\,1_n.$$

Pour montrer par exemple que $\tilde{X}.X = \text{dét}(X)\,.\,1_n$, i.e. que $\tilde{X}.X$ est la matrice diagonale dont tous les termes diagonaux sont égaux à dét (X), tout revient à prouver que

$$\sum_i \tilde{\xi}_{ij}\,.\,\xi_{ki} = \begin{cases} \text{dét}(X) & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k. \end{cases} \tag{10}$$

Or le premier membre s'écrit

$$\sum_i (-1)^{i+k}\xi_{ij}\,\text{dét}(X_{ik});$$

d'après la formule (8), cette expression n'est autre que le déterminant de la matrice obtenue en remplaçant les termes $\xi_{1k}, \ldots, \xi_{nk}$ de la k^e ligne de X par les scalaires

$\xi_{ij}, \ldots, \xi_{nj}$; si $j \neq k$ la matrice ainsi obtenue a deux lignes identiques, de sorte que son déterminant est nul; si $j = k$, la matrice obtenue n'est autre que X; d'où les relations (10). La formule $\tilde{X}.X = \text{dét}(X).1_n$ se démontre de façon analogue : il faut utiliser (7) au lieu de (8).

COROLLAIRE 1. *Soit* X *une matrice carrée à coefficients dans un anneau commutatif* K. *Pour que* X *soit inversible, il faut et il suffit que le déterminant de* X *soit un élément inversible de* K; *on a alors*

$$X^{-1} = \text{dét}(X)^{-1}.\tilde{X} \tag{11}$$

Si X est inversible, le Théorème 7 du § 24 montre que

$$\text{dét}(X.X^{-1}) = \text{dét}(X)\ \text{dét}(X^{-1}) = \text{dét}(1_n) = 1,$$

de sorte que le déterminant de X est inversible dans K. Si inversement cette condition est réalisée, le Théorème 2 montre évidemment que la matrice

$$\text{dét}(X)^{-1}.\tilde{X}$$

est inverse de X.

Remarque 1. Le cas d'un *corps* commutatif K avait déjà été traité au § 23 (Corollaire 1 du Théorème 8).

COROLLAIRE 2. *Soient* X *un module libre de type fini sur un anneau commutatif* K, *et* $(a_1, \ldots, a_n)$ *une base de* X. *Pour que des vecteurs* $x_1, \ldots, x_n \in X$ *forment une base de* X *il faut et il suffit que leur déterminant par rapport à la base* $(a_1, \ldots, a_n)$ *soit un élément inversible de* K.

On doit en effet exprimer que les coordonnées des x_i par rapport à la base considérée forment une matrice inversible dans l'anneau $M_n(K)$.

Exemple 3. Prenons $K = \mathbf{Z}$ et $X = \mathbf{Z}^n$, la base (a_i) étant la base canonique; on obtient alors le résultat suivant : *pour que des vecteurs*

$$x_i = (\xi_{i1}, \ldots, \xi_{in}) \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

forment une base de $\mathbf{Z}^n$ *il faut et il suffit que*

$$\text{dét}((\xi_{ij})) = \pm 1.$$

On voit aussi que le groupe $GL(n, \mathbf{Z})$ est formé des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbf{Z}$ et de déterminant $+1$ ou -1.

4. *Formules de Cramer*

On a vu que la résolution d'un système d'équations linéaires à coefficients dans un corps K pouvait toujours se ramener à celle d'un système de Cramer, i.e. d'un système

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_{11}\xi_1 + \cdots + \alpha_{n1}\xi_n = \beta_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{1n}\xi_1 + \cdots + \alpha_{nn}\xi_n = \beta_n \end{array}\right. \tag{12}$$

où la matrice

$$A = (\alpha_{ij})_{1 \leqslant i, j \leqslant n}$$

est inversible, i.e. de déterminant non nul. Posant

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

le système donné s'écrit

$$Ax = b$$

et a pour solution

$$x = A^{-1}b.$$

Or, on a donné au n° précédent (Corollaire 1 du Théorème 2) une formule explicite pour calculer l'inverse de A; il vient donc, si l'on en fait usage, la relation

$$x = \text{dét}(A)^{-1}.\tilde{A}b;$$

en explicitant cette formule on trouve évidemment

$$\text{dét}(A).\xi_i = \sum_j (-1)^{i+j}\ \text{dét}(A_{ij})\beta_j$$

où A_{ij} se déduit de A par suppression de la j^e ligne et de la i^e colonne. Mais d'après le Théorème 1, le second membre de la relation ci-dessus n'est autre que le déterminant de la matrice obtenue, à partir de A, en remplaçant les termes $\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in}$ de la i^e colonne de A par les seconds membres $\beta_1, \ldots, \beta_n$ du système (12). On voit par conséquent que la solution du système de Cramer (12) est donnée par les formules

$$\xi_i = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{i-1,1} & \beta_1 & \alpha_{i+1,1} & \cdots & \alpha_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{1n} & \cdots & \alpha_{i-1,n} & \beta_n & \alpha_{i+1,n} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{1n} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}}$$

Celles-ci sont connues sous le nom de **formules de Cramer.**

Exemple 4. Prenons $K = \mathbf{R}$ et le système

$$\left\{\begin{array}{l} 2x + 3y + 4z = a \\ 5x + 6y + 7z = b \\ 8x + 9y + 9z = c; \end{array}\right.$$

le déterminant du système est

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ 8 & 9 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 8 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3$$

de sorte qu'on a bien un système de Cramer. L'inconnue x par exemple est donnée par

$$x = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} a & 3 & 4 \\ b & 6 & 7 \\ c & 9 & 9 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} a & 3 & 1 \\ b & 6 & 1 \\ c & 9 & 0 \end{vmatrix} = -3a - c + 3b,$$

et on calculerait de même les autres inconnues.

Remarque 2. Si K est un anneau commutatif, les formules de Cramer sont bien entendu encore valables pourvu que le déterminant du système soit inversible dans K.

§ 25. Espaces affines

1. L'espace vectoriel des translations

Dans ce n° nous utiliserons les mots « espace », « point », « vecteur », « équipollent », « translation », etc...; le lecteur devra leur attribuer la même signification qu'en Géométrie Élémentaire. Nous n'en donnerons pas de définitions précises, attendu qu'un concept tel que celui d'espace n'est pas à proprement parler un objet mathématique (on ne peut pas le décrire à l'aide des signes fondamentaux de la théorie des Ensembles...). Mais on peut en dégager, en quelque sorte expérimentalement, des propriétés qui servent de base à la construction d'objets mathématiques analogues, les *espaces affines*, qui seront définis au n° suivant.

Désignons donc par E l'espace usuel, dont les éléments sont les points usuels. Nous avons vu (§ 10, *Exemple* 2) que si l'on choisit une fois pour toutes un point O dans E, on peut regarder l'ensemble des vecteurs d'origine O dans E comme un espace vectoriel réel, de dimension 3. Mais la définition de cet espace vectoriel comporte un élément d'arbitraire — à savoir le choix du point O — et si l'on remplace O par un autre point O', le nouvel espace vectoriel obtenu est isomorphe, mais non identique, au premier (on obtient un isomorphisme *canonique* du premier espace vectoriel sur le second en associant à tout vecteur d'origine O le vecteur d'origine O' qui lui est équipollent). Nous allons maintenant montrer qu'en modifiant cette construction, on peut attacher à l'espace usuel un espace vectoriel *canonique*, i.e. dont la définition ne comporte aucun choix arbitraire.

Pour cela désignons par T l'ensemble de toutes les translations dans E : une translation est une application, d'ailleurs bijective, de E dans E qui transforme chaque point $P \in E$ en le point $P' \in E$ tel que le vecteur PP' soit équipollent à un vecteur donné. Nous allons montrer que l'ensemble T peut être muni d'une structure d'espace vectoriel réel.

Pour cela on doit définir la somme $s + t$ de deux translations, et le produit λs d'une translation par un scalaire $\lambda \in \mathbf{R}$. En ce qui concerne la somme, on posera

$$s + t = s \circ t,$$

de sorte que $s + t$ sera ce qu'on appelle, en Géométrie Élémentaire, la translation produit de s et t. Quant à λs, ce sera la translation dont le vecteur s'obtient en multipliant par λ celui de s.

Choisissons un point $O \in E$ et associons, à tout vecteur x d'origine O, la translation s_x de vecteur x : pour tout point $P \in E$, le vecteur d'origine P et d'extrémité $s_x(P)$ est donc équipollent à x. Ceci dit, il est clair qu'avec les définitions précédentes on a

$$(1) \qquad s_x + s_y = s_{x+y}, \qquad \lambda . s_x = s_{\lambda x};$$

comme l'ensemble des vecteurs d'origine O, muni des opérations algébriques évidentes, est un espace vectoriel réel, il en est donc de même de l'ensemble T muni des opérations définies plus haut, et en fait l'application $x \mapsto s_x$ est un *isomorphisme* du premier espace vectoriel sur le second.

Nous dirons que T est l'*espace vectoriel des translations* dans l'espace usuel.

Étant donnés un point $P \in E$ et une translation $s \in T$, nous poserons, par définition,

$$s + P = s(P);$$

on obtient ainsi une application $(s, P) \mapsto s + P$ de $T \times E$ dans E, et il est clair qu'on a les propriétés suivantes :

(EA 1) : *on a la relation*

$$s + (t + P) = (s + t) + P$$

quels que soient $s, t \in T$ *et* $P \in E$;

(EA 2) : *on a la relation*

$$0 + P = P$$

pour tout $P \in E$ (dans cette formule, 0 désigne bien entendu l'élément neutre de T);

(EA 3) : *quels que soient* $P, Q \in E$, *il existe un et un seul* $s \in T$ *tel que l'on ait*

$$s + P = Q.$$

La dernière propriété signifie qu'il existe toujours une et une seule translation transformant un point donné en un autre point donné, ce qui est en effet bien connu.

Lorsqu'on a

$$s + P = Q,$$

on écrit souvent, par définition,

$$s = Q - P;$$

la « différence » entre deux points P et Q est donc la translation qui amène P sur Q.

Remarque 1. On fera attention au fait que, si nous venons de définir la « différence » de deux points, laquelle est une translation et non pas un point ou un vecteur, nous n'avons par contre pas défini la « somme » de deux points, attendu que cette opération n'a aucun sens géométrique ou physique.

2. *Espaces affines associés à un espace vectoriel*

Soit T un espace vectoriel sur un corps K; on appelle **espace affine associé à** T tout objet formé par un ensemble E, et par une application de $T \times E$ dans E, notée

$$(s, P) \mapsto s + P,$$

de telle sorte que les propriétés (EA 1), (EA 2) et (EA 3) du n° précédent soient vérifiées. On appelle alors **points** les éléments de E, et tout $s \in T$ permet de définir une application de E dans lui-même, à savoir l'application, que nous noterons $\bar{s}$, donnée par

$$\bar{s}(P) = s + P \quad \text{pour tout } P \in E.$$

Ces applications sont bijectives, et prennent le nom de **translations** dans E.

Exemple 1. Soit T un espace vectoriel sur un corps K. On peut alors regarder T lui-même comme un espace affine associé à T, attendu que l'addition dans T est une application de $T \times T$ dans T qui vérifie évidemment les conditions (EA 1) à (EA 3) — celles-ci traduisent simplement, dans ce cas, le fait que T, muni de l'addition, est un groupe.

Exemple 2. Soient X un ensemble, A une partie de X, et u une application donnée de A dans un corps K. Désignons par T l'espace vectoriel sur K formé des applications s de X dans K telles que $s(a) = 0$ pour tout $a \in A$, et par E l'ensemble des applications f de X dans K telles que l'on ait $f(a) = u(a)$ pout tout $a \in A$ (autrement dit, E est l'ensemble des prolongements de u à X). Pour $s \in T$ et $f \in E$ définissons $s + f$ comme la fonction $s(x) + f(x)$; les conditions du n° 1 sont alors vérifiées, de sorte qu'on peut regarder E comme un espace affine associé à T.

Cet *Exemple*, comme le lecteur le vérifiera, est en fait un cas particulier de l'*Exemple* que voici.

Exemple 3. Soit M un espace vectoriel sur K, et prenons pour T un sous-espace vectoriel de M. Puisque T est un sous-groupe du groupe additif M, on peut considérer dans M les classes modulo T (§ 7, n° 6); pour tout $a \in M$ nous désignerons par $T + a$ la classe de a modulo T : c'est donc une partie de M, à savoir l'ensemble des $x \in M$ tels que $x - a \in T$.

Soit E une telle classe modulo T; ce n'est pas un sous-espace vectoriel de M en général; mais pour $s \in T$ et $u \in E$, il est clair que le vecteur somme $s + u$ est encore dans E; d'où une application de $T \times E$ dans E, et celle-ci permet de regarder E comme un espace affine associé à T comme on le vérifie aussitôt.

Exemple 4. Prenons E et T comme au n° 1 (espace usuel et espace vectoriel des translations usuel). Soit $E' \subset E$ un plan (resp. une droite), et soit $T' \subset T$ l'ensemble des translations de vecteur parallèle à E', autrement dit des translations qui appliquent E' dans E'. Il est clair que T' est un sous-espace vectoriel de T, et comme on a $s + P \in E'$ pour $s \in T'$ et $P \in E'$ on peut définir canoniquement une application de $T' \times E'$ dans E'. Cela permet, comme on le voit facilement, de considérer E' comme un espace affine associé à T'.

Soient T un espace vectoriel sur K et E un espace affine. Choisissons un point O de E; nous allons montrer que l'on peut regarder E comme un espace vectoriel sur K (mais la structure d'espace vectoriel sur K ainsi obtenue sur E *dépendra du choix de* O, i.e. ne sera pas canonique). Pour cela, étant donnés des points P et Q de E, on posera P + Q = R où R est le point tel que

$$\text{(2)} \qquad R - O = (P - O) + (Q - O)$$

(cela signifie que la translation amenant O sur R est composée de la translation amenant O sur P et de la translation amenant O sur Q); et étant donnés un point P de E et un scalaire λ de K, le point $P' = \lambda P$ sera défini par la relation

$$\text{(3)} \qquad P' - O = \lambda . (P - O).$$

Nous allons montrer que E, muni de ces opérations, est un espace vectoriel isomorphe à T.

Pour cela, considérons l'application $f : T \rightarrow E$ donnée par

$$f(s) = s + O;$$

elle est bijective d'après la condition (EA 3). Soient $s, t \in T$, posons $P = f(s)$ et $Q = f(t)$, et calculons le point R = P + Q donné par (2); on a $P = s + O$, donc $P - O = s$, et de même $Q - O = t$, en sorte que d'après (2) on voit que $R - O = s + t$; mais cela veut dire que $R = f(s + t)$, en sorte qu'on a

$$f(s + t) = f(s) + f(t);$$

on voit de même à l'aide de (3) que

$$f(\lambda s) = \lambda f(s).$$

Cela dit, puisque les axiomes des espaces vectoriels sont vérifiés dans T et puisque f est une bijection de T sur E, il est clair que les axiomes des espaces vectoriels sont aussi vérifiés dans E, et que f est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

L'espace vectoriel obtenu en munissant l'ensemble E des lois de composition (2) et (3) sera noté E_O.

Exemple 5. Prenons E et T comme au n° 1; un point « origine » O étant choisi, l'addition P + Q = R dans E est alors définie par la condition que le vecteur OR soit la somme des vecteurs OP et OQ, et le point $\lambda P = P'$ par la condition que le vecteur OP' soit égal au vecteur OP multiplié par λ (autrement dit **P'** est l'image de P par l'homothétie de centre O et de rapport λ).

3. *Barycentres dans un espace affine*

Les hypothèses et les notations restant celles du n° 2, nous allons examiner la façon dont la structure d'espace vectoriel définie sur E à l'aide du choix d'un point « origine » O dépend de ce choix.

Pour cela considérons des points $P_1, \ldots, P_n \in E$ et des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$; *une fois choisi un point* $O \in E$, on peut définir dans l'espace vectoriel E_O la combinaison linéaire

$$P = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n;$$

vu les relations (2) et (3), on a évidemment

$$\text{(4)} \qquad P - O = \lambda_1(P_1 - O) + \cdots + \lambda_n(P_n - O),$$

cette relation étant une relation linéaire entre éléments de l'espace vectoriel T.

Si l'on remplace O par un autre point O', le point P est remplacé par le point P' donné par

$$\text{(5)} \qquad P' - O' = \lambda_1(P_1 - O') + \cdots + \lambda_n(P_n - O');$$

or, étant donnés des points A, B, C de E, on a d'une manière générale la relation

$$\text{(6)} \qquad A - C = (A - B) + (B - C),$$

car en posant $s = A - B$ et $t = B - C$ on a $A = s + B$ et $B = t + C$, donc $A = s + (t + C)$ et par suite $A = (s + t) + C$ d'après l'axiome (EA 1), en sorte que $A - C = s + t$ comme annoncé. Cela dit, il vient

$$P_i - O' = (P_i - O) + (O - O')$$

et par suite (5) s'écrit

$$\begin{aligned} P' - O' &= \lambda_1[(P_1 - O) + (O - O')] + \cdots + \lambda_n[(P_n - O) + (O - O')] \\ &= \lambda_1(P_1 - O) + \cdots + \lambda_n(P_n - O) + (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n).(O - O') \\ &= P - O + (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n).(O - O'); \end{aligned}$$

comme $P' - O' = (P' - O) + (O - O')$ cette relation s'écrit encore

$$P' - O = P - O + (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n - 1).(O - O'),$$

et comme $P' - O = (P' - P) + (P - O)$ il vient en définitive

$$\text{(7)} \qquad P' - P = (\lambda_1 + \ldots + \lambda_n - 1).(O - O').$$

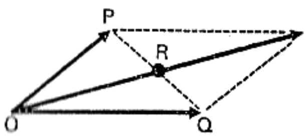
Ceci montre bien qu'on a en général $P \neq P'$, autrement dit que la structure d'espace vectoriel de E dépend effectivement du choix de l'origine O dans E.

On notera cependant que l'on a **P** = **P'** dès que

$$\text{(8)} \qquad \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1;$$

autrement dit, *lorsque cette condition est remplie, le point* $\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n$, défini tout d'abord en choisissant une origine O dans E, *est en fait indépendant du choix de* O, et a par conséquent un sens « intrinsèque » ou « canonique ». On dit que c'est **le barycentre** (ou le **centre de gravité**) **des points** $P_1, \ldots, P_n$ **affectés des masses** $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Exemple 6. Prenons E et T comme au nº 1. Étant donnés deux points P et Q, on peut donc définir le point



$$R = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q,$$

qu'en pratique on écrit

$$\frac{P+Q}{2};$$

il est donné par la relation

$$\overrightarrow{OR} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ})$$

où O est un point quelconque de E. Comme $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$ est donné par la « règle du parallélogramme », il est clair que R est le milieu du segment de droite joignant P à Q.

Plus généralement considérons le point

$$R = tP + (1 - t)Q$$

où t est un nombre réel quelconque; il est donné par

$$\overrightarrow{OR} = t.\overrightarrow{OP} + (1-t).\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OQ} + t(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ});$$

or $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}$ est le vecteur d'origine O équipollent au vecteur $\overrightarrow{PQ}$; on en déduit immédiatement, en examinant la figure ci-dessus, que R se trouve sur la droite passant par P et Q — et même que cette droite n'est autre que l'ensemble des points de la forme $tP + (1-t)Q$ où $t \in \mathbf{R}$.

Exemple 7. Prenons toujours E et T comme ci-dessus, et trois points P, Q, R; on peut alors définir le point

(9) $\qquad M = uP + vQ + wR \quad$ pourvu que $u + v + w = 1$;

si O est un point quelconque, on a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} = u.\overrightarrow{OP} + v.\overrightarrow{OQ} + w.\overrightarrow{OR} &= u.\overrightarrow{OP} + v.\overrightarrow{OQ} + (1-u-v).\overrightarrow{OR}\\ &= \overrightarrow{OR} + u.(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OR}) + v.(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OR});\end{aligned}$$

or $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OR}$ est équipollent à $\overrightarrow{RM}$, $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OR}$ à $\overrightarrow{RP}$, et $\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OR}$ à $\overrightarrow{RQ}$; on voit donc que le vecteur $\overrightarrow{RM}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{RP}$ et $\overrightarrow{RQ}$, plus précisément que

$$\overrightarrow{RM} = u.\overrightarrow{RP} + v.\overrightarrow{RQ},$$

et par suite que M se trouve dans le plan déterminé par les trois points P, Q, R (en supposant que ces trois points ne sont pas situés sur une même droite). Il est clair inversement que tout point M de ce plan peut se mettre sous la forme (9) pour un choix convenable de u et v.

En particulier, si l'on prend $u = v = w = \frac{1}{3}$, le point M obtenu est donné par

$$RM = \frac{1}{3}(RP + RQ) = \frac{2}{3}.\frac{RP+RQ}{2}$$

et n'est autre, par suite, que le *centre de gravité du triangle* PQR au sens habituel.

Lorsqu'on calcule des barycentres dans un espace affine, on a souvent besoin de la *formule de distributivité* que voici :

(10) $$\sum_i \mu_i \sum_j \lambda_{ij}.P_{ij} = \sum_{i,j} \mu_i\lambda_{ij}.P_{ij};$$

cette formule est valable dès qu'elle a un sens, i.e. dès que les relations

$$\sum_j \lambda_{ij} = 1 \quad \text{pour tout } i, \quad \sum_i \mu_i = 1$$

sont vérifiées. (On notera que ces relations impliquent

$$\sum_{i,j} \mu_i\lambda_{ij} = 1,$$

de sorte que le second membre de (10) a effectivement un sens lorsqu'elles sont vérifiées.) Pour prouver (10) il suffit de montrer que, si O est un point de E, on a

$$\sum_i \mu_i\Big(\sum_j \lambda_{ij}.P_{ij} - O\Big) = \sum_{i,j} \mu_i\lambda_{ij}(P_{ij} - O);$$

mais on a par définition

$$\sum_j \lambda_{ij}.P_{ij} - O = \sum_j \lambda_{ij}(P_{ij} - O),$$

et par conséquent la relation à établir se réduit à la distributivité dans l'espace vectoriel T.

4. *Variétés linéaires dans un espace affine*

Les notions de « droite » et de « plan » de la Géométrie Élémentaire peuvent se généraliser comme suit. Soient T un espace vectoriel sur un corps K, E un espace affine associé à T, et V une partie de E. On dit que V est une **variété linéaire** dans E si, quels que soient les points $P_1, \ldots, P_n \in V$ et les scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ tels que

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1,$$

on a

$$\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n \in V.$$

Exemple 8. **L'ensemble vide est une variété linéaire.**

Exemple 9. Pour tout point $P \in E$, l'ensemble réduit à P est une variété linéaire; cela provient de ce que l'on a

$$\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n = P \quad \text{si} \quad P_1 = \cdots = P_n = P.$$

Dans la pratique on ne fait naturellement aucune différence entre le point P et la variété linéaire $\{P\}$.

Exemple 10. Soient $P_1, \ldots, P_n$ des points donnés dans E; alors l'ensemble V des $P \in E$ qui peuvent se mettre sous la forme

$$P = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n$$

avec des scalaires $\lambda_i \in K$ de somme égale à 1 est une variété linéaire.
En effet, étant donnés des points

$$Q_j = \sum_i \lambda_{ij} P_i \qquad \text{avec} \qquad \sum_i \lambda_{ij} = 1$$

de V et des scalaires μ_j de somme totale 1, on a d'après (10)

$$\sum_j \mu_j Q_j = \sum_j \mu_j \sum_i \lambda_{ij} P_i = \sum_{i,j} \mu_j \lambda_{ij} P_i = \sum_i \nu_i P_i$$

avec

$$\nu_i = \sum_j \mu_j \lambda_{ij},$$

ce qui montre bien que V satisfait à la définition des variétés linéaires.

On notera que V contient les points donnés P_i (par exemple la relation $P_1 \in V$ s'obtient en prenant $\lambda_1 = 1$, et $\lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$), et que toute variété linéaire contenant les P_i contient V par définition. Par suite, V est la plus petite variété linéaire contenant les P_i. On dit que c'est la **variété linéaire engendrée par les points** $P_1, \ldots, P_n$.

Exemple 11. Soient P et Q deux points de E; la variété linéaire qu'ils engendrent est formée des points $\lambda P + (1 - \lambda)Q$, où $\lambda \in K$ est arbitraire. Si $P = Q$ elle se réduit à P. Si $P \neq Q$, on l'appelle la **droite joignant P et Q**. Cette terminologie est justifiée par l'*Exemple* 6.

On notera que, si K est le corps des entiers modulo 2, corps ne possédant que les éléments 0 et 1, la droite joignant P et Q se réduit à l'ensemble $\{P, Q\}$. Cette circonstance, qui paraîtra sans doute étrange au débutant, complique la géométrie sur ce corps (et plus généralement sur les **corps de caractéristique** 2; on appelle ainsi tout corps K pour lequel $1 + 1 = 0$, où les symboles 0 et 1 désignent bien entendu l'élément neutre et l'élément unité de K; voir § 30, n° 6).

THÉORÈME 1. *Soient* T *un espace vectoriel sur un corps* K, E *un espace affine associé à* T, *et* V *une partie non vide de* E. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) V *est une variété linéaire.*

b) Pour tout point $P_0 \in V$, *l'ensemble des vecteurs* $P - P_0$ *où* $P \in V$ *est un sous-espace vectoriel de* T.

c) Il existe un point $P_0 \in V$ *tel que l'ensemble des vecteurs* $P - P_0$ *où* $P \in V$ *soit un sous-espace vectoriel de* T.

Si ces conditions équivalentes sont remplies, le sous-espace vectoriel de T *formé des vecteurs de la forme* $P - P_0$ (où P_0 est un point donné et P un point variable de V) *est indépendant du choix de* P_0 *dans* V, *et c'est l'ensemble des* $s \in T$ *tels que l'on ait*

$$s + P \in V \quad \textit{pour tout} \quad P \in V.$$

Montrons que *a)* implique *b)*; il suffit d'établir que, quels que soient Q, $R \in V$ et les scalaires $\lambda, \mu \in K$, il existe un $S \in V$ tel que

$$S - P_0 = \lambda(Q - P_0) + \mu(R - P_0);$$

or le point S défini par cette relation vérifie aussi

$$S - P_0 = \lambda(Q - P_0) + \mu(R - P_0) + (1 - \lambda - \mu)(P_0 - P_0),$$

en sorte que

$$S = \lambda Q + \mu R + (1 - \lambda - \mu)P_0,$$

ce qui montre que $S \in V$ si V est une variété linéaire.

L'implication *b)* $\Longrightarrow$ *c)* étant triviale, montrons que *c)* implique *a)*. Considérons le point

$$P = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i P_i \qquad \text{avec} \qquad \sum \lambda_i = 1;$$

on doit montrer que $P \in V$ si V contient $P_1, \ldots, P_n$. Or on a

$$P - P_0 = \sum \lambda_i (P_i - P_0);$$

si V contient les P_i l'hypothèse *c)* montre donc que $P - P_0 = P' - P_0$ pour un $P' \in V$, ce qui implique évidemment $P = P'$, donc $P \in V$ comme annoncé.

Montrons maintenant que, si V est une variété linéaire non vide, le sous-espace de T formé par les vecteurs $P - P_0$ ($P \in V$) ne dépend pas du choix de P_0 dans V.

Soient en effet H_0 le sous-espace vectoriel associé à P_0 et H_1 le sous-espace obtenu pour un autre choix $P_1 \in V$; pour tout $P \in V$ on a

$$P - P_0 = (P - P_1) + (P_1 - P_0) = (P - P_1) - (P_0 - P_1);$$

comme, par définition, H_1 contient $P - P_1$ et $P_0 - P_1$, on a donc $P - P_0 \in H_1$; ceci montre que $H_0 \subset H_1$, d'où $H_0 = H_1$ par raison de symétrie.

On voit donc que le sous-espace vectoriel formé par les vecteurs $P - P_0$ ($P \in V$) est indépendant du choix de P_0 dans V; notons-le H. Il est clair que c'est aussi l'ensemble des vecteurs de la forme $P - Q$, où P et Q sont dans V. Soient $s \in H$ et $P \in V$; en choisissant $P_0 = P$, on voit qu'il existe un $Q \in V$ tel que $s = Q - P$; on a alors $Q = s + P$, ce qui montre qu'on a $s + P \in V$ pour tout $s \in H$ et tout $P \in V$.

Inversement, considérons un $s \in T$ vérifiant cette condition; choisissant un $P \in V$ et posant $s + P = Q$, on a d'une part $Q \in V$, d'autre part $s = Q - P$, et par suite $s \in H$, ce qui achève la démonstration.

Étant donnée une variété linéaire non vide V dans E, le sous-espace H de T formé des vecteurs de la forme $Q - P$, avec $P, Q \in V$, s'appelle le **sous-espace directeur** de V.

La connaissance de H ne suffit pas à déterminer V; mais si deux variétés linéaires non vides V' et V'' ont le même sous-espace directeur H, alors il existe, dans E, une translation qui applique V' sur V''. En effet, choisissons un point P' de V' et un point P'' de V'' une fois pour toutes, et considérons le vecteur $a = P'' - P'$. Pour qu'un point P soit dans V' il faut et il suffit que $P - P' \in H$; comme on a évidemment

$$P - P' = (P + a) - P'',$$

et comme H est aussi le sous-espace directeur de V'', on voit que les relations $P \in V'$ et $P + a \in V''$ sont équivalentes; autrement dit, la translation $P \to P + a$ applique V' sur V''.

Exemple 12. Soit T un espace vectoriel sur K, et prenons pour E l'ensemble T lui-même comme dans l'*Exemple* 1 ci-dessus. Soient V une variété linéaire et H son sous-espace directeur; si $P_0 \in V$, on voit que V est l'ensemble des vecteurs (ici on n'a pas à distinguer les points des vecteurs) de la forme $P_0 + P$ où P décrit H, autrement dit c'est la *classe* de P_0 *modulo* H au sens du § 7, n° 6 appliqué au groupe additif T.

Comme certains auteurs appellent *variété linéaire* ce que nous appelons *sous-espace vectoriel*, il est utile, dans le cas d'un espace vectoriel regardé comme espace affine, d'appeler **variété linéaire affine** ce que nous devrions appeler variété linéaire. Dans un espace vectoriel T, une variété linéaire affine est donc, soit l'ensemble vide, soit une classe modulo un sous-espace vectoriel de T.

Remarque 2. Soit V une variété linéaire non vide dans un espace affine E associé à un espace vectoriel T, et soit $H \subset T$ le sous-espace directeur de V. On a $s + P \in V$ pour tout $s \in H$ et tout $P \in V$, d'où une application $(s, P) \to s + P$ de $H \times V$ dans V; cette application vérifie les axiomes (EA 1), (EA 2) et (EA 3) des espaces affines comme on le voit aussitôt. Par suite, *on peut considérer* V *comme un espace affine associé à* H, et appliquer à V toutes les définitions de la théorie des espaces affines. Par exemple, étant donnés des points $P_i \in V$ et des scalaires $\lambda_i \in K$ de somme 1, on peut définir dans l'espace affine V le barycentre des points P_i affectés des masses λ_i; le point de V ainsi obtenu est évidemment le même que celui qu'on obtiendrait en se plaçant dans l'espace affine E.

Remarque 3. Supposons que V soit la variété linéaire engendrée par des points $P_0, \ldots, P_n \in E$; le sous-espace directeur H est l'ensemble des vecteurs de la forme $P - M$, où P varie dans V et où M est un point choisi une fois pour toutes dans V. Or les éléments de V ne sont autres que les points

$$P = \sum_{0 \leqslant i \leqslant n} \xi_i P_i \quad \text{avec} \quad \sum_{0 \leqslant i \leqslant n} \xi_i = 1;$$

pour un tel point on a, d'après la relation (4) ci-dessus,

$$P - M = \sum_{0 \leqslant i \leqslant n} \xi_i (P_i - M).$$

En particulier, prenons $M = P_0$; on voit alors que H est l'ensemble des vecteurs

$$\xi_1(P_1 - P_0) + \cdots + \xi_n(P_n - P_0)$$

où $\xi_1, \ldots, \xi_n$ sont des scalaires arbitraires (car la relation

$$\xi_0 + \xi_1 + \cdots + \xi_n = 1$$

permet évidemment de choisir arbitrairement n des $n + 1$ scalaires $\xi_0, \ldots, \xi_n$). Autrement dit, H *est le sous-espace vectoriel de* T *engendré par les vecteurs*

$$P_i - P_0 \quad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

Remarque 4. Soit E un espace affine. On a vu au n° 2 que, si l'on choisit dans E un point « origine » O, on peut regarder E comme un espace vectoriel dont O est l'élément neutre, en définissant par exemple la somme $P + Q = R$ de deux éléments de E par la relation

$$R - O = (P - O) + (Q - O).$$

Notons E_0 l'espace vectoriel ainsi obtenu. Soit V une partie non vide de E et prenons pour O un point de V; alors, *pour que* V *soit une variété linéaire dans* E, *il faut et il suffit que* V *soit un sous-espace vectoriel de* E_0. On laisse au lecteur le soin d'établir ce fait à titre d'exercice.

5. *Génération d'une variété linéaire par des droites*

En Géométrie Élémentaire, on définit un plan par la condition que, s'il contient deux points, il contient aussi la droite qui les joint. Comme nous avons déjà adopté une autre définition des variétés linéaires (et en particulier des plans), on peut conjecturer que, dans l'optique adoptée ici, la « définition » élémentaire va devenir un théorème (ce qui compense le fait que, dans la situation classique, notre définition des plans est en fait un théorème...). C'est en effet ce qui se passe pourvu que le corps de base K ne soit pas de caractéristique 2 (autrement dit pourvu que l'on n'ait pas $1 + 1 = 0$ dans K) :

Théorème 2. *Soient* T *un espace vectoriel sur un corps* K *qui n'est pas de caractéristique* 2, E *un espace affine associé à* T, *et* V *une partie de* E. *Pour que* V *soit une variété linéaire, il faut et il suffit que, quels que soient les points distincts* $P, Q \in V$, *la droite joignant* P *et* Q *soit contenue dans* V.

Supposons que V soit une variété linéaire. Si V contient deux points distincts P et Q, elle contient aussi la variété linéaire engendrée par P et Q (*Exemple* 10), i.e. la droite joignant P et Q.

Inversement supposons cette condition remplie. Comme l'ensemble vide est une variété linéaire, on peut supposer V non vide; choisissant un point $P_0 \in V$, tout revient (Théorème 1) à faire voir que l'ensemble des vecteurs $Q - P_0$, pour $Q \in V$, est un sous-espace vectoriel de T; autrement dit que, quels que soient les scalaires λ, $\mu \in K$ et les points $Q, R \in V$, il existe un $S \in V$ tel que

$$S - P_0 = \lambda(Q - P_0) + \mu(R - P_0).$$

Mais le point S défini par cette relation n'est autre, évidemment, que

$$S = \lambda Q + \mu R + (1 - \lambda - \mu)P_0.$$

On est donc ramené à montrer, en changeant les notations, que quels que soient $P, Q, R \in V$ et les scalaires $\lambda, \mu, \nu \in K$ tels que

$$(11) \qquad \lambda + \mu + \nu = 1,$$

on a

$$\lambda P + \mu Q + \nu R \in V.$$

Or comme K n'est pas de caractéristique 2, on a $2 \neq 0$ et donc $3 \neq 1$ dans K; par suite on ne peut pas avoir $\lambda = \mu = \nu = 1$; on peut donc supposer par exemple $\lambda \neq 1$. Alors $1 - \lambda$ est inversible, et la formule (10) du n° 4 permet d'écrire

$$\lambda P + \mu R + \nu S = \lambda P + (1 - \lambda)M \qquad \text{où} \qquad M = \frac{\mu}{1-\lambda}Q + \frac{\nu}{1-\lambda}R.$$

Si $Q = R$ on a $M = Q = R$ et M est dans V; si $Q \neq R$, le point M se trouve sur la droite joignant Q et R, donc appartient par hypothèse à V. Ainsi on a $M \in V$ dans tous les cas. Un raisonnement identique montre alors que V contient aussi le point $\lambda P + (1 - \lambda)M$, ce qui achève la démonstration.

La conclusion du Théorème 2 est *évidemment* en défaut si K est le corps des entiers modulo 2, car dans ce cas une partie *arbitraire* de E, dès qu'elle contient deux points P et Q distincts, n'a aucun mérite à contenir la droite joignant P et Q : celle-ci se réduit en effet (*Exemple* 11) aux deux points P et Q eux-mêmes !

6. *Espaces affines de dimension finie. Bases affines*

Soient T un espace vectoriel sur un corps K et E un espace affine associé à T; on dit que E est de dimension finie s'il en est ainsi de T; on appelle alors **dimension** de E (sur le corps de base K) le nombre

$$\dim(E) = \dim(T).$$

Supposons E de dimension finie n. Choisissons une base $(a_1, \ldots, a_n)$ de T, un point P_0 de E, et posons

$$P_i = a_i + P_0 \quad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

Pour tout $P \in E$, il existe un et un seul système de scalaires $\xi_1, \ldots, \xi_n \in K$ tels que l'on ait

$$P - P_0 = \xi_1 a_1 + \cdots + \xi_n a_n;$$

posant

$$\xi_0 = 1 - \xi_1 - \cdots - \xi_n$$

il est clair que cette relation s'écrit aussi

$$(12) \qquad P = \xi_0 P_0 + \xi_1 P_1 + \cdots + \xi_n P_n,$$

et l'on voit immédiatement que, *pour tout* $P \in E$ *il existe un et un seul système de scalaires* $\xi_0, \ldots, \xi_n$ *vérifiant* (12) *et*

$$(13) \qquad \xi_0 + \xi_1 + \ldots + \xi_n = 1.$$

Inversement, pour que cette propriété soit vérifiée, il faut que les vecteurs $a_i = P_i - P_0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ forment une base de T.

Lorsqu'on est dans la situation qu'on vient de décrire, on dit que la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ est une **base affine** de E, et les scalaires ξ_i vérifiant (12) et (13) s'appellent les **coordonnées affines** du point P par rapport à la base affine considérée.

Exemple 13. Prenons pour E l'espace usuel de la Géométrie Élémentaire; une base affine est alors un système de quatre points (A, B, C, D) non situés dans un même plan, i.e. constituant les sommets d'un véritable tétraèdre. Les coordonnées affines d'un point $P \in E$ sont alors les nombres x, y, z, t tels que l'on ait

$$P = xA + yB + zC + tD, \qquad x + y + z + t = 1.$$

On a évidemment alors

$$\overrightarrow{AP} = y.\overrightarrow{AB} + z.\overrightarrow{AC} + t.\overrightarrow{AD}$$

en sorte que y, z, t sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{AP}$ par rapport au système des trois vecteurs linéairement indépendants $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, lesquels forment une base de l'espace vectoriel E_A.

Remarque 5. Soit V une variété linéaire non vide dans E; on a vu (*Remarque* 2) qu'on peut regarder V comme un espace affine associé à son sous-espace directeur H. On appellera donc **dimension de la variété linéaire** V la dimension de H. Si V est engendrée par des points $P_0, \ldots, P_n$, la *Remarque* 3 montre que *la dimension de* V *est égale au rang de la famille des vecteurs* $P_i - P_0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Étant données deux variétés linéaires V et W dans E, telles que $V \subset W$, on a $\dim(V) \leqslant \dim(W)$, et on ne peut avoir $\dim(V) = \dim(W)$ que si $V = W$. On laisse au lecteur le soin d'établir ce résultat à titre d'exercice.

Soit E un espace affine associé à un espace vectoriel T de dimension finie; on a vu plus haut que, pour que des points $P_0, \ldots, P_n \in E$ forment une base affine de E, il faut et il suffit que les vecteurs $P_i - P_0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ forment une base de T. On en déduit évidemment que toutes les bases affines de E comportent le même nombre de points, à savoir $n + 1$ où $n = \dim(E)$.

D'autre part, pour que les vecteurs $P_i - P_0$, en nombre $n = \dim(E)$, forment une base de T, il faut et il suffit (§ 19, Théorème 10) qu'ils engendrent T, ce qui signifie évidemment que tout $P \in E$ peut s'écrire d'*au moins* une façon sous la forme

$$P = \sum_{0 \leqslant i \leqslant n} \xi_i P_i \qquad \text{avec} \qquad \sum_{0 \leqslant i \leqslant n} \xi_i = 1,$$

ou encore que la variété linéaire engendrée par les P_i est E tout entier; comme cette variété est la plus petite qui contienne les P_i, on a donc le résultat suivant :

Théorème 3. *Soit* E *un espace affine de dimension* n *sur un corps* K. *Pour que* $n + 1$ *points de* E *forment une base affine de* E, *il faut et il suffit qu'ils ne soient contenus dans aucune variété linéaire distincte de* E *tout entier.*

Par exemple, pour que quatre points forment une base affine de l'espace usuel, il est nécessaire et suffisant qu'ils ne soient pas contenus dans un même plan.

Remarque 6. Soient $Q_0, \ldots, Q_m$ des points de E. On dit qu'ils sont **indépendants** s'ils forment une base de la variété linéaire V qu'ils engendrent, autrement dit si tout $P \in E$ peut s'écrire d'*au plus* une façon sous la forme

$$P = \sum_{0 \leqslant j \leqslant m} \xi_j Q_j \qquad \text{avec} \qquad \sum_{0 \leqslant j \leqslant m} \xi_j = 1.$$

Il revient évidemment au même de dire que, dans T, les vecteurs $Q_j - Q_0$ ($1 \leqslant j \leqslant m$) sont linéairement indépendants.

Par exemple, pour que trois points de l'espace usuel soient indépendants il faut et il suffit qu'ils ne soient pas situés sur une même droite, autrement dit qu'ils engendrent effectivement un plan.

7. *Calcul de la dimension d'une variété linéaire*

Dans la pratique on a fréquemment à calculer la dimension d'une variété linéaire engendrée par des points d'un espace affine. On utilise alors le résultat que voici :

Théorème 4. *Soient* E *un espace affine sur un corps*, $(P_0, \ldots, P_n)$ *une base affine de* E, *et*

$$Q_i = \sum_{j=0}^{j=n} \alpha_{ij} P_j \quad (0 \leqslant i \leqslant m)$$

des points de E. *Soit* r *la dimension de la variété linéaire engendrée par* $Q_0, \ldots, Q_m$. *Alors la matrice*

$$A = (\alpha_{ij})_{0 \leqslant i \leqslant m,\, 0 \leqslant j \leqslant n}$$

est de rang $r + 1$.

D'après la Remarque 5, la dimension r cherchée est égale au rang de la famille des vecteurs $Q_i - Q_0$. Or on a

$$Q_i - Q_0 = (Q_i - P_0) - (Q_0 - P_0) = \sum_j \alpha_{ij}(P_j - P_0) - \sum_j \alpha_{0j}(P_j - P_0) = \sum_{j=1}^{j=n} (\alpha_{ij} - \alpha_{0j}) \cdot a_j$$

où les vecteurs $a_j = P_j - P_0$ ($1 \leqslant j \leqslant n$) forment une base de T. Par suite (§ 19, Théorème 15) le nombre r est égal au rang de la matrice

$$A' = (\alpha_{ij} - \alpha_{0j})_{1 \leqslant i \leqslant m,\, 1 \leqslant j \leqslant n}$$

Il reste donc à montrer, en utilisant bien entendu les relations

$$(14) \qquad \sum_{j=0}^{j=n} \alpha_{ij} = 1 \quad (0 \leqslant i \leqslant m)$$

existant entre les coordonnées affines des divers points Q_i, que le rang de la matrice A surpasse celui de A' d'une unité.

Considérons pour cela d'une part le système d'équations linéaires et homogènes

$$(15) \qquad \sum_{i=1}^{i=m} \xi_i \alpha_{ij} = 0 \quad (0 \leqslant j \leqslant n)$$

et d'autre part le système

$$(16) \qquad \sum_{i=0}^{i=n} \eta_i(\alpha_{ij} - \alpha_{0j}) = 0.$$

Les solutions du premier forment un sous-espace M de K^{n+1}, et celles du second un sous-espace N de K^n; la matrice A' étant de rang r, on a

$$\dim(N) = n - r$$

d'après le § 19, Théorème 17. Si on désigne provisoirement par s le rang de A, on voit de même que

$$\dim(M) = n + 1 - s;$$

pour montrer que $s = r + 1$ il suffit donc de montrer que M et N ont même dimension, autrement dit sont isomorphes.

Or, en ajoutant membre à membre les équations (15) et en tenant compte de (14), il vient évidemment $\xi_0 + \xi_1 + \cdots + \xi_n = 0$, en sorte que (15) implique

$$\sum_{i=1}^{i=n} \xi_i \alpha_{ij} - (\xi_1 + \cdots + \xi_n)\alpha_{0j} = 0$$

i.e.

$$\sum_{i=1}^{i=n} \xi_i(\alpha_{ij} - \alpha_{0j}) = 0.$$

On obtient donc une application u de M dans N en posant

$$u(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n) = (\xi_1, \ldots, \xi_n);$$

un raisonnement analogue montrerait que l'on peut construire une application v de N dans M en posant

$$v(\eta_1, \ldots, \eta_n) = (-\eta_1 - \cdots - \eta_n, \eta_1, \ldots, \eta_n);$$

ceci dit, il est clair que u et v sont des homomorphismes réciproques l'un de l'autre de M dans N et de N dans M, autrement dit des isomorphismes de M dans N et de N dans M, et ceci achève la démonstration du Théorème.

Remarque 7. Le rang de A ne change pas si l'on ajoute à la première ligne de A la somme des autres, i.e. si l'on remplace la première ligne de A par $(1, 1, \ldots, 1)$. On peut alors retrancher la première colonne de la matrice ainsi obtenue des colonnes suivantes; on obtient alors une matrice de même rang que A, dont la première ligne est $(1, 0, \ldots, 0)$, et dont les termes situés en dessous et à droite de la première ligne et de la première colonne ne sont autres que ceux de A'; d'où une autre démonstration du fait que $rg(A) = 1 + rg(A')$.

8. *Équations d'une variété linéaire en coordonnées affines*

Soient E un espace affine de dimension finie n sur un corps *commutatif* K et $(P_0, \ldots, P_n)$ une base affine de E. Considérons r points *indépendants*

$$Q_i = \sum_{j=0}^{j=n} \alpha_{ij} P_j \quad (1 \leqslant i \leqslant r)$$

dans E et soit V la variété linéaire, de dimension $r - 1$, qu'ils engendrent. Soit

$$P = \sum \xi_j P_j$$

un point de E. Pour que P appartienne à V, il faut et il suffit que la variété linéaire W engendrée par P, $Q_1, \ldots, Q_r$ soit de dimension $r - 1$; en effet, si $P \in V$ il est clair qu'on a $W = V$, d'où la nécessité de la condition; inversement, supposons-la vérifiée; comme on a de toute façon $V \subset W$, la relation $\dim(V) = \dim(W)$ montre que $V = W$, et donc que P appartient à V.

Pour exprimer que $P \in V$, tout revient donc, d'après le Théorème 4, à écrire que la matrice

$$\begin{pmatrix} \xi_0 & \alpha_{10} & \cdots & \alpha_{r0} \\ \xi_1 & \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{r1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_n & \alpha_{1n} & \cdots & \alpha_{rn} \end{pmatrix}$$

est de rang r, autrement dit, puisque K est commutatif, que tout déterminant d'ordre $s > r$ extrait de celle-ci est nul (§ 23, nº 8, *Remarque* 5), et il suffit évidemment d'exprimer cette condition pour $s = r + 1$

En exprimant la condition en question pour $s = r + 1$, on voit qu'on doit avoir

$$(17) \qquad \begin{vmatrix} \xi_{i_0} & \alpha_{1i_0} & \cdots & \alpha_{ri_0} \\ \xi_{i_1} & \alpha_{1i_1} & \cdots & \alpha_{ri_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_{i_r} & \alpha_{1i_r} & \cdots & \alpha_{ri_r} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{pour } 0 \leqslant i_0 < i_1 < \cdots < i_r \leqslant n;$$

Ces relations, qui caractérisent les points P de V, s'appellent les **équations de la variété linéaire** V par rapport à la base affine considérée.

Le cas le plus simple est celui où $r = n$, de sorte que V est de dimension $n - 1$ (on dit alors que V est un **hyperplan** dans l'espace affine E); les relations (17) se réduisent alors à la seule et unique équation

$$\begin{vmatrix} \xi_0 & \alpha_{10} & \cdots & \alpha_{n0} \\ \xi_1 & \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_n & \alpha_{1n} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = 0;$$

comme on ne modifie pas la valeur de ce déterminant en ajoutant à la première ligne la somme des autres (§ 24, nº 1, propriété (*e*)), et comme la somme des coordonnées affines d'un point est toujours égale à 1, on voit qu'on peut remplacer la relation précédente par l'équation

$$(18) \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \xi_1 & \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_n & \alpha_{1n} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = 0;$$

on dit que (18) est l'équation de l'hyperplan engendré par les points (indépendants) $Q_1, \ldots, Q_n$.

EXERCICES

Il est parfaitement utopique d'espérer apprendre des Mathématiques, si élémentaires ou si supérieures soient-elles, sans résoudre des Exercices.

Les Exercices qu'on trouvera dans ce livre sont de trois sortes. Certains sont des illustrations pratiques ou même numériques des théories exposées dans le texte; le lecteur débutant ne pourra pas acquérir la technique du calcul sans résoudre une partie appréciable des Exercices de ce genre. D'autres apportent au texte des compléments théoriques élémentaires; en les étudiant, le lecteur s'habituera à manipuler le langage et les modes de raisonnements utilisés dans le texte; ceux de ces Exercices qui ne sont pas *très* faciles sont précédés d'un signe ¶. Enfin, la dernière catégorie est constituée par des Exercices qui apportent au texte des compléments importants et difficiles; ils sont destinés uniquement aux étudiants déjà avancés qui s'intéressent vraiment aux Mathématiques; ces Exercices sont précédés de deux ou même trois signes ¶.

Nous ne saurions trop insister enfin sur le fait que résoudre un Exercice ne consiste pas seulement à se convaincre, à l'aide d'un « brouillon » fait à la hâte, du fait qu'on en a à peu près compris la solution; si cette méthode est admissible pour les Exercices de calcul numérique, il faut par contre s'efforcer de *rédiger intégralement* les Exercices plus théoriques, où l'on doit construire de véritables démonstrations. De cette façon, et uniquement de cette façon, l'étudiant parviendra à acquérir un langage clair et correct, et à utiliser les termes techniques dans leur sens propre, ce qui, en Mathématiques, est le signe le plus certain de la compréhension d'un sujet.

Calculer les déterminants suivants

1. $\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} x & a & b & 0 & c \\ 0 & y & 0 & 0 & d \\ 0 & e & z & 0 & f \\ g & h & k & u & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 6 & -5 & 8 & 4 \\ 9 & 7 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 7 \\ -4 & 8 & -8 & -3 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 24 & 11 & 13 & 17 & 19 \\ 51 & 13 & 32 & 40 & 46 \\ 61 & 11 & 14 & 50 & 56 \\ 62 & 20 & 7 & 13 & 52 \\ 80 & 24 & 45 & 57 & 70 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \hdotsfor{5} \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -x & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -x & x & \cdots & 0 \\ \hdotsfor{5} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 \\ \hdotsfor{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \end{vmatrix}$ Notant D_n ce déterminant d'ordre n, on établira une relation simple entre D_n, D_{n-1} et D_{n-2} et on utilisera le résultat suivant. Soit $(u_n)_{n \leqslant 1}$ une suite de nombres complexes telle que l'on ait la relation de récurrence

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n;$$

soient z_1 et z_2 les racines (distinctes ou non) de l'équation

$$z^2 - az - b = 0;$$

alors, si $z_1 \neq z_2$, il existe des constantes c_1 et c_2 telles que l'on ait

$$u_n = c_1 z_1^n + c_2 z_2^n \text{ pour tout } n,$$

et si $z_1 = z_2$ il existe des constantes c_1 et c_2 telles que l'on ait

$$u_n = (c_1 n + c_2) z_1^n$$

pour tout n. Pour des résultats beaucoup plus généraux, voir § 35, *Exercice* 16.

¶ **10.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \hdotsfor{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 5 \end{vmatrix}$ (Même méthode que ci-dessus).

11. $\begin{vmatrix} 1-n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & \cdots & 1 \\ \hdotsfor{5} \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n \end{vmatrix}$ (déterminant à n lignes et n colonnes)

12. $\begin{vmatrix} 1 & n & n & \cdots & n \\ n & 2 & n & \cdots & n \\ n & n & 3 & \cdots & n \\ \hdotsfor{5} \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix}$

13. $\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ \hdotsfor{6} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & 1 \end{vmatrix}$

(Chercher les racines de cette fonction polynomiale de x.)

¶ **14.** Montrer que

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \hdotsfor{5} \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$$

(déterminant de VanderMonde; on remarque par exemple que le premier membre est un polynôme de degré $n - 1$ au plus en x_1, dont $x_2, \ldots, x_n$ sont des racines évidentes).

¶ **15.** $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^n \\ \hdotsfor{6} \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^n \end{vmatrix}$

¶ **16.** $\begin{vmatrix} 1 & f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_{n-1}(x_1) \\ \hdotsfor{5} \\ 1 & f_1(x_n) & f_2(x_n) & \cdots & f_{n-1}(x_n) \end{vmatrix}$ où $f_k(x) = x^k + a_{k1}x^{k-1} + \ldots + a_{kk}$.

¶ **17.** $\begin{vmatrix} 1 & \binom{1}{x_1} & \binom{2}{x_1} & \cdots & \binom{n-1}{x_1} \\ \hdotsfor{5} \\ 1 & \binom{1}{x_n} & \binom{2}{x_n} & \cdots & \binom{n-1}{x_n} \end{vmatrix}$ où l'on pose $\binom{x}{k} = \dfrac{x(x-1)\ldots(x-k+1)}{k!}$.

¶ **18.** Montrer que

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h \\ b & a & d & c & f & e & h & g \\ c & d & a & b & g & h & e & f \\ d & c & b & a & h & g & f & e \\ e & f & g & h & a & b & c & d \\ f & e & h & g & b & a & d & c \\ g & h & e & f & c & d & a & b \\ h & g & f & e & d & c & b & a \end{vmatrix} \begin{aligned} &(a+b+c+d+e+f+g+h)\,(a+b+c+d-e-f-g-h)\,\times \\ = &\times (a+b-c-d+e+f-g-h)\,(a+b-c-d-e-f+g+h)\,\times \\ &\times (a-b+c-d+e-f+g-h)\,(a-b+c-d-e+f-g+h)\,\times \\ &\times (a-b-c+d+e-f-g+h)\,(a-b-c+d-e+f+g-h) \end{aligned}$$

19. Montrer que

$$\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix} = 0 \quad \text{si } n \geqslant 3.$$

¶ **20.** Calculer, par récurrence sur le nombre n de lignes, le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

¶ **21.** Montrer que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \binom{n}{3} & \dots & \binom{n}{n-1} \end{vmatrix} = 1.$$

¶ **22.** En calculant le produit

$$\begin{vmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x & -y & -z & -t \\ y & x & -t & z \\ z & t & x & -y \\ t & -z & y & x \end{vmatrix},$$

établir l'identité d'Euler

$$\begin{aligned}(a^2+b^2+c^2+d^2)\,(x^2+y^2+z^2+t^2) = &(ax+by+cz+dt)^2+(ay-bx+ct-dz)^2 \\ &+(az-bt-cx+dy)^2+(at+bz-cy+dx)^2.\end{aligned}$$

Voyez-vous un rapport avec les *Exercices* 10 et 11 du § 15 ?
Calculer les inverses des matrices suivantes :

23. $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ **24.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$ **25.** $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & -4 & 9 \end{pmatrix}$

26. Calculer le rang des matrices

$$\begin{pmatrix} 17 & -28 & 45 & 11 & 39 \\ 24 & -37 & 61 & 13 & 50 \\ 25 & -7 & 32 & -18 & -11 \\ 31 & 12 & 19 & -43 & -55 \\ 42 & 13 & 29 & -55 & -68 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & -6 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & -1 & -8 \end{pmatrix}.$$

27. Les vecteurs

$$(1, 0, 0, 2, 5), \quad (0, 1, 0, 3, 4), \quad (0, 0, 1, 4, 7), \quad (2, -3, 4, 11, 12)$$

sont-ils linéairement indépendants dans $\mathbf{R}^5$?

¶¶ **28.** Montrer que

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

29. Calculer

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{vmatrix}.$$

30. Combien d'additions et de multiplications doit-on en principe effectuer pour calculer un déterminant d'ordre 10 ?

31. Résoudre par la théorie des déterminants les *Exercices* 1 à 17 du § 20.

32. Résoudre et discuter les systèmes d'équations linéaires suivants :

a)
$$\begin{aligned} ax + by + z &= 1 \\ x + aby + z &= b \\ x + by + az &= 1 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} ax + by + 2z &= 1 \\ ax + (2b-1)\,y + 3z &= 1 \\ ax + by + (b+3)z &= 2b-1 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 2(a+1)x + 3y + az &= a+4 \\ (4a-1)x + (a+1)\,y + (2a-1)z &= 2a+2 \\ (5a-4)x + (a+1)\,y + (3a-4)z &= a-1 \end{aligned}$$

¶ **33.** (Développement d'un déterminant suivant la règle de Laplace.) Soient K un anneau commutatif et n un entier > 1. On désigne par

$$\mathrm{D}(x_1, \ldots, x_n)$$

le déterminant de n vecteurs $x_i \in \mathrm{K}^n$ par rapport à la base canonique (e_i) de K^n. On pose

$$x_i = \xi_{i1}e_1 + \cdots + \xi_{in}e_n.$$

Enfin on choisit un entier p tel que $1 \leqslant p \leqslant n$.

a) Montrer qu'on a la relation

$$\mathrm{D}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} \begin{vmatrix} \xi_{1i_1} & \ldots & \xi_{pi_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_{1i_p} & \ldots & \xi_{pi_p} \end{vmatrix} . \mathrm{D}(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}, x_{p+1}, \ldots, x_n)$$

(regarder $\mathrm{D}(x_1, \ldots, x_n)$ comme une fonction multilinéaire alternée de $x_1, \ldots, x_p$).

b) Montrer que, pour $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant n$, on a

$$\mathrm{D}(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}, x_{p+1}, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} \xi_{p+1, j_1} & \ldots & \xi_{n, j_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_{p+1, j_{n-p}} & \ldots & \xi_{n, j_{n-p}} \end{vmatrix}$$

où l'on désigne par $j_1, \ldots, j_{n-p}$ ceux des entiers $\{1, 2, \ldots, n\}$ qui n'appartiennent pas à l'ensemble $\{i_1, \ldots, i_p\}$, rangés de telle sorte que la permutation $(i_1, \ldots, i_p j_1, \ldots, j_{n-p})$ de $\{1, \ldots, n\}$ soit *paire*.

c) Soit

$$\mathrm{X} = (\xi_{ij})_{1 \leqslant i, j \leqslant n}$$

une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans K. Pour toute partie I de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ comprenant p éléments, on désigne par $\mathrm{X_I}$ la matrice formée avec les ξ_{ij} tels que l'on ait $i \in \mathrm{I}$ et $1 \leqslant j \leqslant p$, et par $\mathrm{X'_I}$ la matrice « complémentaire », formée avec les ξ_{ij} tels que l'on ait $i \notin \mathrm{I}$ et $p + 1 \leqslant j \leqslant n$. Enfin on désigne par $n(\mathrm{I})$ le nombre de couples (i, j) tels que l'on ait $i \in \mathrm{I}$, $j \notin \mathrm{I}$ et $i > j$. Montrer que l'on a

$$\operatorname{dét}(\mathrm{X}) = \sum_{\mathrm{Card(I)}=p} (-1)^{n(\mathrm{I})} . \operatorname{dét}(\mathrm{X_I}) . \operatorname{dét}(\mathrm{X'_I})$$

(Formule de Laplace), où la somme est étendue à toutes les *parties* I à p éléments de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$.

d) Déduire ce résultat de la formule d'associativité du produit extérieur [§ 23, *Exercice* 13, *d*)]

Appliquer la règle de Laplace au calcul des déterminants suivants :

34. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$ **35.** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 0 & 7 & 0 \end{vmatrix}$ **36.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ 6 & 5 & 7 & 8 & 4 & 2 \\ 9 & 8 & 6 & 7 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

37. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & b & c & d \\ 0 & a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix}$ **38.** $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -3 & -1 & 2 \\ -5 & 6 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & -9 & -3 & 7 & -5 \\ -1 & -4 & 1 & 1 & -2 \\ -3 & 7 & 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$