§ 22. Applications bilinéaires alternées

1. *Applications bilinéaires alternées*

Soient X et M des modules sur un anneau commutatif K. On dit qu'une application bilinéaire

$$f : X \times X \to M$$

est alternée si l'on a

$$f(x, x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in X. \tag{1}$$

Quels que soient $x, y \in X$ on a alors

$$0 = f(x+y, x+y) = f(x, x) + f(x, y) + f(y, x) + f(y, y) = f(x, y) + f(y, x)$$

et par suite une application bilinéaire alternée satisfait à l'identité

$$f(y, x) = -f(x, y) \quad \text{quels que soient } x, y \in X. \tag{2}$$

Remarque 1. Il est clair que réciproquement (2) implique

$$2 \cdot f(x, x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in X.$$

Si, pour $m \in M$, la relation $2m = 0$ implique $m = 0$ (c'est par exemple le cas si K est un corps de « caractéristique » différente de 2, car alors 2 est inversible dans K : voir § 30, n° 6), on voit donc que la relation (2) caractérise les applications bilinéaires alternées. Par contre, si M = K est l'anneau des entiers modulo 2, la relation (2), qui s'écrit alors $f(y, x) = f(x, y)$, ne suffit pas à impliquer que f soit alternée. Cette situation se rencontre rarement dans la pratique élémentaire.

Il est clair que toute combinaison linéaire d'applications bilinéaires alternées est encore une application bilinéaire alternée; autrement dit, les applications bilinéaires *alternées* forment un *sous-module* du module $\mathcal{L}(X, X; M)$ de toutes les applications bilinéaires de X × X dans M.

Exemple 1. Prenons K = **R** et pour X l'espace usuel à trois dimensions; alors l'application f de X × X dans X donnée par

$$f(x, y) = x \wedge y$$

(produit vectoriel; cf. § 21, *Exemple* 4) est bilinéaire alternée.

Exemple 2. Si f est une application bilinéaire de X × X dans M, l'application g donnée par

$$g(x, y) = f(x, y) - f(y, x)$$

est bilinéaire alternée. En particulier, si u et v sont des formes linéaires sur X, l'application

$$g(x, y) = u(x)v(y) - u(y)v(x)$$

de X × X dans K est une forme bilinéaire alternée sur X × X; on l'appelle le **produit extérieur des formes linéaires** u **et** v et on la désigne par la notation

$$u \wedge v.$$

Prenons par exemple K = **R** et X comme dans l'*Exemple* précédent, et

$$u(x) = (a|x), \qquad v(x) = (b|x)$$

où a et b sont des vecteurs fixes. On a alors, pour $g = u \wedge v$, la formule

$$g(x, y) = (a \wedge b | x | y),$$

ce qui veut dire encore qu'on a l'identité

$$(a|x)\ (b|y) - (a|y)\ (b|x) = (a \wedge b | x | y) = (a | b | x \wedge y).$$

On laisse au lecteur le soin d'établir ce résultat soit par des raisonnements géométriques directs, soit en calculant en coordonnées rectangulaires (on peut même calculer dans un système de coordonnées quelconque).

2. *Cas des modules libres de type fini*

On a pour les applications bilinéaires alternées un résultat analogue au Théorème 1 du § 21 :

Théorème 1. *Soient* X *et* M *des modules sur un anneau commutatif* K, *et supposons* X *libre de type fini. Soit* $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *une base de* X. *Pour qu'une application bilinéaire* f *de* X × X *dans* M *soit alternée, il faut et il suffit que ses coefficients*

$$c_{ij} = f(a_i, a_j)$$

par rapport à la base (a_i) *vérifient les relations*

$$c_{ii} = 0, \qquad c_{ij} + c_{ji} = 0; \tag{3}$$

on a alors

$$f(x, y) = \sum_{i<j} c_{ij}(\xi_i\eta_j - \xi_j\eta_i) \tag{4}$$

quels que soient les vecteurs

$$x = \sum_i \xi_i a_i, \qquad y = \sum \eta_i a_i.$$

En exprimant (1) pour $x = a_i$ et (2) pour $x = a_i$, $y = a_j$ il est clair qu'on obtient les relations (3). Supposons-les inversement vérifiées; dans la formule

$$f(x, y) = \sum_{1 \leqslant i, j \leqslant n} \xi_i\eta_j c_{ij}$$

qui résulte du § 21, Théorème 1, les termes pour lesquels $i = j$ sont nuls, et en groupant les autres d'après les grandeurs relatives de i et j on trouve

$$f(x, y) = \sum_{i<j} \xi_i\eta_j c_{ij} + \sum_{i>j} \xi_i\eta_j c_{ij};$$

dans la seconde somme, remplaçons les lettres i et j par les lettres j et i (il s'agit donc d'un simple changement de *notations*); il vient

$$f(x, y) = \sum_{i<j} \xi_i\eta_j c_{ij} + \sum_{i<j} \xi_j\eta_i c_{ji} = \sum_{i<j} \xi_i\eta_j c_{ij} - \sum_{i<j} \xi_j\eta_i c_{ij}$$

d'après (3); on obtient finalement la relation (4), et celle-ci montre que f est alternée, car il est clair que la différence $\xi_i\eta_j - \xi_j\eta_i$ est nulle lorsque $x = y$, ce qui achève la démonstration.

Remarque 2. En notant u_i les fonctions coordonnées de X par rapport à la base (a_i), on voit d'après l'*Exemple* 2 que

$$\xi_i\eta_j - \xi_j\eta_i = u_i(x)u_j(y) - u_j(x)u_i(y) = u_i \wedge u_j\,(x, y);$$

par suite (4) s'écrit encore

$$f(x, y) = \sum_{i<j} u_{ij}(x, y)c_{ij}$$

où l'on pose $u_{ij} = u_i \wedge u_j$, et cette décomposition de f est unique car elle implique $c_{ij} = f(a_i, a_j)$.

Si en particulier M = K, la formule précédente s'écrit

$$f = \sum_{i<j} \gamma_{ij}u_{ij} \qquad \text{où} \qquad \gamma_{ij} = f(a_i, a_j);$$

on en déduit que les $n(n-1)/2$ formes bilinéaires alternées $u_{ij} = u_i \wedge u_j$ $(1 \leqslant i < j \leqslant n)$ forment une *base* du module des formes bilinéaires alternées sur X × X.

En utilisant la notation

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

déjà introduite au § 15, n° 3, on voit que si f est une forme bilinéaire alternée sur X on a

$$f(x, y) = \sum_{i<j} \gamma_{ij} \begin{vmatrix} \xi_i & \eta_i \\ \xi_j & \eta_j \end{vmatrix} \qquad \text{où} \qquad \gamma_{ij} = f(a_i, a_j). \tag{5}$$

Lorsque $n = 1$, il est clair que f est identiquement nulle, parce que

$$f(x, y) = f(\xi_1 a_1, \eta_1 a_1) = \xi_1\eta_1 f(a_1, a_1) = 0.$$

Lorsque $n = 2$, la formule (5) se réduit à

$$f(x, y) = \gamma_{12} \cdot \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{vmatrix} \qquad \text{où} \qquad \gamma_{12} = f(a_1, a_2); \tag{6}$$

la fonction

$$D(x, y) = \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{vmatrix} = \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1$$

s'appelle le **déterminant des vecteurs x et y par rapport à la base** (a_1, a_2) **de** X; c'est une forme bilinéaire alternée sur X telle que

$$D(a_1, a_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

et cette propriété *caractérise* D, car (6) s'écrit

$$f = f(a_1, a_2) \,.\, D$$

et implique donc $f = D$ si $f(a_1, a_2) = 1$.

Lorsque $n = 3$, la relation (5) s'écrit

$$f(x, y) = \gamma_{23} \cdot \begin{vmatrix} \xi_2 & \eta_2 \\ \xi_3 & \eta_3 \end{vmatrix} + \gamma_{31} \cdot \begin{vmatrix} \xi_3 & \eta_3 \\ \xi_1 & \eta_1 \end{vmatrix} + \gamma_{12} \cdot \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{vmatrix}, \tag{7}$$

et dans ce cas les formes bilinéaires alternées sur X × X dépendent de trois constantes arbitraires

$$\gamma_{23} = f(a_2, a_3), \qquad \gamma_{31} = f(a_3, a_1), \qquad \gamma_{12} = f(a_1, a_2).$$

Remarque 3. Lorsque K = **R** et que X est l'espace usuel à trois dimensions, supposons la base $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant 3}$ de X orthonormale; considérant le vecteur

$$u = \gamma_{23}a_1 + \gamma_{31}a_2 + \gamma_{12}a_3, \tag{8}$$

la relation (7) signifie alors que $f(x, y)$ est le produit scalaire de u par le vecteur $x \wedge y$, autrement dit (§ 21, *Exemple* 10) que

$$f(x, y) = (u|x \wedge y).$$

Réciproquement il est clair que toute fonction f donnée par une formule de ce type est une forme bilinéaire alternée sur X.

On peut ainsi identifier f au vecteur u, ce qui explique pourquoi les formes bilinéaires alternées n'interviennent généralement pas en Géométrie élémentaire ou en Physique. Toutefois il faut observer que l'identification de f au vecteur (8) n'a de sens qu'en coordonnées *rectangulaires* (et que la notion de coordonnées rectangulaires suppose le choix d'une unité de longueur); plus précisément, le vecteur (8) est indépendant de la base (a_i) dans la mesure où l'on passe d'une base *orthonormale* à une base *orthonormale*; mais si l'on autorise (a_i) à varier dans l'ensemble de toutes les bases de X, alors le vecteur (8) dépend non seulement de f mais aussi de la base (a_i) considérée. Cela provient du fait que les formules de changement de coordonnées pour un tenseur d'espèce $\binom{0}{2}$ ne sont pas les mêmes que pour un vecteur, i.e. pour un tenseur d'espèce $\binom{1}{0}$.

3. *Applications trilinéaires alternées*

Étant donnés des modules X et M sur un anneau commutatif K, on dit qu'une application trilinéaire

$$f : X \times X \times X \to M$$

est alternée si l'expression $f(x, y, z)$ est nulle dès que deux des vecteurs x, y, z sont égaux, autrement dit si l'on a

$$f(x, y, y) = f(x, y, x) = f(x, x, z) = 0 \tag{8}$$

quels que soient x, y, z. Il s'ensuit alors que pour tout $a \in X$, les fonctions bilinéaires $f(a, y, z)$, $f(x, a, z)$ et $f(x, y, a)$ sont alternées; par suite on a les relations

$$f(x, y, z) = -f(x, z, y), \qquad f(x, y, z) = -f(z, y, x), \qquad f(x, y, z) = -f(y, x, z),$$

ou, ce qui revient visiblement au même, les relations

$$f(x, y, z) = f(y, z, x) = f(z, x, y) = -f(x, z, y) = -f(y, x, z) = -f(z, y, x) \tag{9}$$

Si la relation $2m = 0$, pour un $m \in M$, implique $m = 0$, alors les relations (9) impliquent les relations (8), et caractérisent donc les fonctions trilinéaires alternées.

Exemple 3. Si l'on prend $K = \mathbf{R}$ et pour X l'espace usuel à trois dimensions, le produit mixte $(x|y|z)$ est une forme trilinéaire alternée sur X.

Exemple 4. X et K étant arbitraires, choisissons une application trilinéaire g et posons

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = {} & g(x, y, z) + g(y, z, x) + g(z, x, y) \\ & - g(x, z, y) - g(y, x, z) - g(z, y, x); \end{aligned}$$

alors f est une application trilinéaire alternée comme on le voit aussitôt.

En particulier, soient u, v, w des formes linéaires sur X; alors

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = {} & u(x)v(y)w(z) + u(y)v(z)w(x) + u(z)v(x)w(y) \\ & - u(x)v(z)w(y) - u(y)v(x)w(z) - u(z)v(y)w(x) \end{aligned}$$

est une forme trilinéaire alternée sur $X \times X \times X$; on l'appelle le **produit extérieur des formes linéaires** u, v, w et on la désigne par la notation

$$u \wedge v \wedge w.$$

On a $u \wedge v \wedge w = 0$ si u, v, w ne sont pas deux à deux distinctes, et de plus

$$\begin{aligned} u \wedge v \wedge w &= v \wedge w \wedge u = w \wedge u \wedge v \\ &= -u \wedge w \wedge v = -v \wedge u \wedge w = -w \wedge v \wedge u. \end{aligned}$$

Exemple 5. Soient u une forme linéaire et f une forme bilinéaire alternée sur un module X; alors la fonction

$$g(x, y, z) = u(x)f(y, z) + u(y)f(z, x) + u(z)f(x, y)$$

est une forme trilinéaire alternée sur $X \times X \times X$; on l'appelle le **produit extérieur** de la forme linéaire u par la forme bilinéaire alternée f, et on la désigne par la notation

$$u \wedge f.$$

Il est clair que si u, v, w sont des formes linéaires sur X on a

$$u \wedge v \wedge w = u \wedge (v \wedge w).$$

De même, on désigne par

$$f \wedge u$$

la forme trilinéaire alternée

$$f(x, y)u(z) + f(y, z)u(x) + f(z, x)u(y);$$

on a

$$u \wedge f = f \wedge u$$

(alors qu'on avait $u \wedge v = -v \wedge u$ lorsque u et v sont deux formes linéaires)

4. *Développement par rapport à une base*

On a pour les applications trilinéaires alternées le résultat suivant, analogue au Théorème 1 :

Théorème 2. *Soient* X *et* M *des modules sur un anneau commutatif. Supposons* X *libre de type fini et soit* $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *une base de* X. *Pour qu'une application trilinéaire* f *de* $X \times X \times X$ *dans* M *soit alternée, il faut et il suffit que ses coefficients*

$$c_{ijk} = f(a_i, a_j, a_k)$$

par rapport à la base considérée vérifient les relations

$$c_{ijj} = c_{iji} = c_{iik} = 0 \tag{10}$$

$$c_{ijk} = c_{jki} = c_{kij} = -c_{ikj} = -c_{jik} = -c_{kji}; \tag{11}$$

on a alors

$$(12)\qquad f(x, y, z) = \sum_{i<j<k} c_{ijk} \cdot \begin{vmatrix} \xi_i & \eta_i & \zeta_i \\ \xi_j & \eta_j & \zeta_j \\ \xi_k & \eta_k & \zeta_k \end{vmatrix}$$

quels que soient les vecteurs

$$x = \sum \xi_i a_i, \qquad y = \sum \eta_i a_i, \qquad z = \sum \zeta_i a_i.$$

Dans la formule (12), on utilise la notation

$$(13)\qquad \begin{vmatrix} \xi_i & \eta_i & \zeta_i \\ \xi_j & \eta_j & \zeta_j \\ \xi_k & \eta_k & \zeta_k \end{vmatrix} = \xi_i\eta_j\zeta_k + \xi_j\eta_k\zeta_i + \xi_k\eta_i\zeta_j - \xi_i\eta_k\zeta_j - \xi_j\eta_i\zeta_k - \xi_k\eta_j\zeta_i,$$

analogue à celle des déterminants d'ordre 2, et déjà introduite au § 21, Exemple 10.

Pour établir le Théorème 2, on doit d'abord montrer que l'on a (10) et (11) pour toute application trilinéaire alternée f ; ce qu'on peut faire en écrivant les relations (8) et (9) pour $x = a_i, y = a_j, z = a_k$.

Supposons inversement (10) et (11) vérifiées; dans la formule

$$f(x, y, z) = \sum_{1 \leqslant i, j, k \leqslant n} c_{ijk}\xi_i\eta_j\zeta_k$$

qui résulte du § 21, Théorème 2, les seuls termes éventuellement non nuls sont ceux pour lesquels les indices i, j, k sont deux à deux distincts. En classant les triplets (i, j, k) d'après les grandeurs relatives de i, j, k on obtient donc une décomposition en six sommes partielles, à savoir

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = \sum_{i<j<k} c_{ijk}\xi_i\eta_j\zeta_k + \sum_{j<k<i} c_{ijk}\xi_i\eta_j\zeta_k + \sum_{k<i<j} c_{ijk}\xi_i\eta_j\zeta_k \\ + \sum_{i<k<j} c_{ijk}\xi_i\eta_j\zeta_k + \sum_{j<i<k} c_{ijk}\xi_i\eta_j\zeta_k + \sum_{k<j<i} c_{ijk}\xi_i\eta_j\zeta_k. \end{aligned}$$

Pour chacune de ces sommes partielles, il est possible de changer les notations de telle sorte que la somme en question soit étendue aux triplets (i, j, k) tels que $i < j < k$ (par exemple, dans la seconde somme, on doit pour ce faire remplacer j par i, k par j et i par k); on trouve ainsi

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = \sum_{i<j<k} c_{ijk}\xi_i\eta_j\zeta_k + \sum_{i<j<k} c_{kij}\xi_k\eta_i\zeta_j + \sum_{i<j<k} c_{jki}\xi_j\eta_k\zeta_i \\ + \sum_{i<j<k} c_{ikj}\xi_i\eta_k\zeta_j + \sum_{i<j<k} c_{jik}\xi_j\eta_i\zeta_k + \sum_{i<j<k} c_{kji}\xi_k\eta_j\zeta_i; \end{aligned}$$

tenant compte des relations (11) et groupant les termes d'indices i, j, k des six sommes précédentes, on trouve

$$f(x, y, z) = \sum_{i<j<k} c_{ijk}(\xi_i\eta_j\zeta_k + \xi_j\eta_k\zeta_i + \xi_k\eta_i\zeta_j - \xi_i\eta_k\zeta_j - \xi_j\eta_i\zeta_k - \xi_k\eta_j\zeta_i),$$

ce qui est précisément la formule (12).

Il reste à vérifier que f est effectivement alternée; pour cela il suffit évidemment de prouver que la forme trilinéaire

$$u_{ijk}(x, y, z) = \xi_i\eta_j\zeta_k + \xi_j\eta_k\zeta_i + \xi_k\eta_i\zeta_j - \xi_i\eta_k\zeta_j - \xi_j\eta_i\zeta_k - \xi_k\eta_j\zeta_i$$

est alternée; mais en notant u_i la i^e fonction coordonnée du module X par rapport à la base (a_i), on a

$$\begin{aligned} u_{ijk}(x, y, z) = u_i(x)u_j(y)u_k(z) + u_i(y)u_j(z)u_k(x) + u_i(z)u_j(x)u_k(y) \\ - u_i(x)u_j(z)u_k(y) - u_i(y)u_j(x)u_k(z) - u_i(z)u_j(y)u_k(x), \end{aligned}$$

autrement dit

$$u_{ijk} = u_i \wedge u_j \wedge u_k,$$

ce qui prouve (*Exemple* 5) que l'expression en question est alternée. Le Théorème 2 est donc démontré.

Étant donnée une matrice carrée d'ordre trois

$$A = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}$$

à coefficients dans un anneau commutatif K, on appelle **déterminant de** A l'élément

$$ab'c'' + bc'a'' + ca'b'' - ac'b'' - ba'c'' - cb'a''$$

de K; on le désigne soit par la notation

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$$

utilisée dans l'énoncé du Théorème 2, soit par la notation

$$\mathrm{dét}(A).$$

On observera que

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} - a' \cdot \begin{vmatrix} b & b'' \\ c & c'' \end{vmatrix} + a'' \cdot \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}.$$

Exemple 6. Lorsque $n \leqslant 2$, les indices i, j, k ne peuvent jamais être deux à deux distincts; les coefficients c_{ijk} sont donc *tous* nuls, et par suite la seule application trilinéaire alternée dans ce cas est $f = 0$.

Exemple 7. Supposons $n = 3$; alors (12) se réduit à

$$f(x, y, z) = c_{123} \cdot \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \end{vmatrix} \quad \text{où} \quad c_{123} = f(a_1, a_2, a_3).$$

L'expression

$$D(x, y, z) = \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \end{vmatrix}$$

s'appelle le **déterminant des vecteurs** x, y, z **par rapport à la base** (a_1, a_2, a_3) — sa valeur dépend effectivement du choix de la base. La fonction $D(x, y, z)$ est une forme trilinéaire sur X, pour laquelle on a

$$D(a_1, a_2, a_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

et cette relation caractérise D parmi les formes trilinéaires alternées sur X; en effet, pour une telle forme f, on a d'après le Théorème 2

$$f = f(a_1, a_2, a_3) . D$$

et par suite $f = D$ si f est égale à 1 sur les vecteurs de base.

Exemple 8. Prenons $K = \mathbf{R}$ et pour X l'espace usuel à trois dimensions; considérons le produit mixte $(x|y|z)$; c'est une forme trilinéaire alternée sur X, on a donc

$$(x|y|z) = (a_1|a_2|a_3) . \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \end{vmatrix}$$

par rapport à n'importe quelle base de X. On retrouve ainsi le résultat du § 21, *Exemple* 10.

L'étude des formes trilinéaires alternées et des déterminants d'ordre trois comporte beaucoup d'autres résultats que les précédents; mais nous ne les énoncerons pas ici attendu qu'ils se généralisent tous aux formes p-linéaires alternées et aux déterminants d'ordre quelconque dont traiteront les deux prochains §§.

§ 23. Applications multilinéaires alternées

1. *La signature d'une permutation*

Rappelons (§ 7, *Exemple* 4) que pour tout entier p on désigne par $\mathfrak{S}_p$ le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, p\}$. Parmi ces permutations figurent les transpositions (§ 7, n° 5), qui consistent à échanger deux entiers consécutifs i et $i+1$ sans modifier les autres; et on a vu au § 7, n° 5 que toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ peut se mettre sous la forme

$$(1) \qquad \sigma = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_r$$

d'un produit de transpositions; bien entendu la décomposition (1) de σ n'est pas unique : si par exemple τ est une transposition, on a $\tau \circ \tau = e$ et par suite

$$\tau = \tau \circ \tau \circ \tau = \tau \circ \tau \circ \tau \circ \tau \circ \tau = \cdots$$

Toutefois nous allons montrer dans ce n° que, lorsqu'on passe d'une décomposition (1) de σ à une autre, la *parité* de l'entier r ne change pas — autrement dit que si σ peut s'écrire comme produit d'un nombre pair (resp. impair) de transpositions, alors *toute* décomposition de σ en produit de transpositions comporte un nombre pair (resp. impair) de facteurs.

Supposons provisoirement ce résultat établi. Alors, dans la décomposition (1), l'entier

$$(-1)^r$$

dépend uniquement de σ, et non de la façon dont on a écrit σ comme produit de transpositions; on peut donc définir sur le groupe $\mathfrak{S}_p$ une fonction $\mathfrak{p}$, dont les valeurs sont les entiers $+1$ et -1, et telle que

$$(2) \qquad \mathfrak{p}(\sigma) = (-1)^r$$

lorsque σ est produit de r transpositions. On a évidemment

$$(3) \qquad \mathfrak{p}(\sigma) = -1 \text{ si } \sigma \text{ est une transposition;}$$

d'autre part, si deux permutations σ' et σ'' peuvent s'écrire comme produits de r et s

transpositions respectivement, il est clair que $\sigma' \circ \sigma''$ s'écrit comme produit de $r + s$ transpositions; on a donc

$$\mathfrak{p}(\sigma')\mathfrak{p}(\sigma'') = \mathfrak{p}(\sigma \circ \sigma'') \tag{4}$$

quelles que soient les permutations σ' et σ''.

On notera que l'ensemble $\{-1, +1\}$ n'est autre que le groupe multiplicatif $\mathbf{Z}^*$ des éléments inversibles de l'anneau $\mathbf{Z}$ des entiers (§ 8, *Remarque* 1); les formules (3) et (4) expriment donc que l'application

$$\mathfrak{p} : \mathfrak{S}_p \to \mathbf{Z}^* \tag{5}$$

est un *homomorphisme de groupes, prenant la valeur* -1 *sur les transpositions*.

Inversement, supposons construit un tel homomorphisme; la relation (1) donne alors

$$\mathfrak{p}(\sigma) = \mathfrak{p}(\tau_1)\ldots\mathfrak{p}(\tau_r) = (-1)\ldots(-1) = (-1)^r,$$

et comme le premier membre ne dépend que de σ on en déduit que la parité de r est indépendante de la décomposition (1) de σ en produit de transpositions.

Nous voyons donc que, pour montrer que la parité de r dans la décomposition (1) est toujours la même, *tout revient à construire un homomorphisme* (5) *égal à* -1 *sur chaque transposition*. Nous allons y parvenir à l'aide de la notion suivante.

Soient X un ensemble arbitraire, M un groupe additif, p un entier strictement positif, et considérons une application

$$f : \mathrm{X}^p \to \mathrm{M},$$

i.e. une fonction $f(x_1, \ldots, x_p)$ de p variables $x_i \in \mathrm{X}$, à valeurs dans M. On dit que f est **antisymétrique** si l'on a

$$f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_i, x_{i+2}, \ldots, x_p) = -f(x_1, \ldots, x_p), \tag{6}$$

autrement dit si

$$f(x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(p)}) = -f(x_1, \ldots, x_p) \tag{7}$$

pour toute *transposition* τ.

Considérons donc une telle fonction; nous allons montrer qu'on a alors

$$f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)}) = (-1)^r . f(x_1, \ldots, x_p) \tag{8}$$

toutes les fois que la permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ peut s'écrire comme produit de r transpositions.

Le cas $r = 1$ se réduisant à la définition des fonctions antisymétriques, nous allons raisonner par récurrence sur r. Si σ est produit de r transpositions, on peut écrire

$$\sigma = \tau \circ \omega$$

où τ est une transposition, et où ω est produit de $r - 1$ transpositions; d'après l'hypothèse de récurrence, on aura donc

$$f(y_{\omega(1)}, \ldots, y_{\omega(p)}) = (-1)^{r-1} f(y_1, \ldots, y_p) \tag{9}$$

quels que soient les $y_i \in \mathrm{X}$. Écrivons cette relation lorsque

$$y_1 = x_{\tau(1)}, \ldots, y_p = x_{\tau(p)};$$

on a $y_i = x_{\tau(i)}$, et en remplaçant i par $\omega(i)$ il vient donc

$$y_{\omega(i)} = x_{\tau(\omega(i))} = x_{\sigma(i)};$$

donc (9) s'écrit

$$f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)}) = (-1)^{r-1} f(x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(p)});$$

mais comme τ est une transposition, le second membre de cette relation est égal d'après (7) à celui de la relation (8), qui est donc établie.

La relation (8) va nous permettre de montrer que la parité de r ne dépend que de σ. Comme le premier membre de (8) ne dépend que de σ, si l'on a deux décompositions de σ en produits de r et s transpositions, on voit que l'on a

$$(-1)^r f(x_1, \ldots, x_p) = (-1)^s f(x_1, \ldots, x_p)$$

pour *toute* fonction antisymétrique f; pour en déduire que $(-1)^r = (-1)^s$, il suffit d'être dans une situation où l'on pourra « simplifier » par $f(x_1, \ldots, x_p)$, ce qui sera par exemple le cas si f est à valeurs dans $\mathbf{Z}$ et s'il existe $x_1, \ldots, x_p \in \mathrm{X}$ tels que $f(x_1, \ldots, x_p) \neq 0$. Autrement dit, tout revient maintenant à construire, sur un ensemble X convenablement choisi, une fonction antisymétrique *non identiquement nulle* à valeurs dans $\mathbf{Z}$.

Prenons pour cela $\mathrm{X} = \mathbf{Z}$ et

$$f(x_1, \ldots, x_p) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant p} (x_i - x_j); \tag{10}$$

si les x_i sont deux à deux distincts on a évidemment $f(x_1, \ldots, x_p) \neq 0$; il reste donc à faire voir que f est antisymétrique.

Or supposons qu'on échange x_k et x_{k+1} pour un indice donné k. Dans le second membre de (10), les termes $x_i - x_j$ ne seront modifiés que si l'on a $i = k$, ou $i = k + 1$, ou $j = k$, ou $j = k + 1$; la contribution de ces termes à f est le produit

$$\begin{aligned}(x_k - x_{k+1}) . [(x_k - x_{k+2}) \ldots (x_k - x_p)] . [(x_{k+1} - x_{k+2}) \ldots (x_{k+1} - x_p)] \\ . [(x_1 - x_k) \ldots (x_{k-1} - x_k)] . [(x_1 - x_{k+1}) \ldots (x_{k-1} - x_{k+1})];\end{aligned}$$

cela dit, lorsqu'on échange x_k et x_{k+1}, le premier facteur est multiplié par -1, le second et le troisième produits partiels s'échangent, de même que la quatrième et le cinquième, de sorte que le produit total est simplement multiplié par -1.

La fonction (10) est donc bien antisymétrique, et en comparant (9) et (8) on voit qu'on a en définitive démontré le résultat suivant :

THÉORÈME 1. *Pour tout entier $p \geqslant 1$, il existe un et un seul homomorphisme*

$$\mathfrak{p} : \mathfrak{S}_p \to \mathbf{Z}^*$$

tel que l'on ait $\mathfrak{p}(\sigma) = -1$ pour toute transposition σ. On a $\mathfrak{p}(\sigma) = (-1)^r$ si la permutation σ est produit de r transpositions.

En outre, étant donnés un ensemble X, *un groupe additif* M, *et une application antisymétrique*

$$f : \mathrm{X}^p \to \mathrm{M},$$

on a la relation

$$f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)}) = \mathfrak{p}(\sigma) . f(x_1, \ldots, x_p)$$

quels que soient les $x_i \in \mathrm{X}$ et la permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_p$.

Le nombre $\mathfrak{p}(\sigma)$ s'appelle la **signature** de la permutation σ; on utilise aussi fréquemment le mot **parité** au lieu du mot signature et la notation ε_σ au lieu de $\mathfrak{p}(\sigma)$. On dit qu'une permutation est **paire** si sa signature est $+1$, et **impaire** si sa signature est -1. Les permutations paires forment un sous-groupe invariant de $\mathfrak{S}_p$, puisque leur ensemble est le noyau de l'homomorphisme $\mathfrak{p}$ (cf. § 7, *Remarque* 7).

Remarque 1. Reprenons la forme (10); on a

$$f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)}) = \prod_{i<j} (x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)});$$

les différences $x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)}$ qu'on trouve ici sont les mêmes que les différences $x_k - x_h$ $(k < h)$ à ceci près qu'on n'a pas toujours $\sigma(i) < \sigma(j)$; on voit donc que chaque couple i, j tel que l'on ait

$$i < j, \qquad \sigma(i) > \sigma(j)$$

contribue un facteur -1 au calcul de la signature de σ. Le nombre de ces couples s'appelle le **nombre d'inversions** de σ; en le notant $\mathrm{I}(\sigma)$, on a donc

$$\mathfrak{p}(\sigma) = (-1)^{\mathrm{I}(\sigma)}.$$

Par exemple prenons $p = 6$ et la permutation qui applique 1, 2, 3, 4, 5, 6 sur

$$2, 4, 3, 6, 5, 1;$$

les couples i, j tels que $i < j$, $\sigma(i) > \sigma(j)$ sont alors

$$1,6; \quad 2,3; \quad 2,6; \quad 3,5; \quad 4,5; \quad 4,6; \quad 5,6;$$

de sorte que le nombre d'inversions est 7, et la signature -1.

Pour p quelconque, considérons une **permutation circulaire** des entiers $1, 2, \ldots, p$, i.e. une permutation σ donnée par

$$\sigma(1) = k, \ldots, \sigma(p-k+1) = p, \qquad \sigma(p-k+2) = 1, \ldots, \sigma(p) = k-1$$

où k est un entier compris entre 1 et p. Les couples i, j tels que l'on ait $i < j$

et $\sigma(i) > \sigma(j)$ sont ceux pour lesquels on a

$$1 \leqslant i \leqslant p-k+1, \qquad p-k+2 \leqslant j \leqslant p;$$

pour ces couples, l'entier i peut prendre $p-k+1$ valeurs distinctes, et l'entier j peut en prendre $k-1$; donc on a

$$\mathrm{I}(\sigma) = (k-1)(p-k+1) = (k-1)(p+1) - k(k-1)$$

et comme $k(k-1)$ est un entier pair dans tous les cas il vient

$$\mathfrak{p}(\sigma) = (-1)^{(k-1)(p+1)}.$$

Par exemple, pour $p = 3$ (et plus généralement pour p impair), les permutations circulaires sont paires.

2. *Antisymétrisation d'une fonction de plusieurs variables*

Soient X un ensemble, M un groupe additif, $p \geqslant 1$ un entier, et f une application de X^p dans M. On appelle **antisymétrisée de** f l'application g de X^p dans M donnée par

$$g(x_1, \ldots, x_p) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \mathfrak{p}(\sigma) . f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)}), \tag{11}$$

la somme figurant au second membre étant étendue à toutes les permutations $\sigma \in \mathfrak{S}_p$. Nous allons montrer d'une part que *g est antisymétrique*, d'autre part que l'on a

$$g(x_1, \ldots, x_p) = 0 \quad \text{si} \quad x_1, \ldots, x_p \ \text{ne sont pas tous distincts.} \tag{12}$$

Exemple 1. Si $p = 3$, la fonction g est donnée par

$$g(x, y, z) = f(x, y, z) + f(y, z, x) + f(z, x, y) - f(x, z, y) - f(y, x, z) - f(z, y, x)$$

et les résultats annoncés sont à peu près évidents.

Pour établir ces résultats, faisons opérer le groupe $\mathfrak{S}_p$ sur l'ensemble X^p en posant (cf. § 7, n° 11, *Exemple* 21).

$$\sigma(x) = (x_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, x_{\sigma^{-1}(p)}) \quad \text{pour} \quad x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathrm{X}^p.$$

La formule (11) s'écrit alors

$$g(x) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \mathfrak{p}(\sigma) . f(\sigma^{-1}(x)).$$

Soit ω une permutation quelconque; on a alors

$$g(\omega(x)) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \mathfrak{p}(\sigma) . f(\sigma^{-1}(\omega(x)));\tag{13}$$

or, comme l'application $\sigma \to \omega \circ \sigma$ de $\mathfrak{S}_p$ dans $\mathfrak{S}_p$ est, pour ω donné, une *bijection*, il est clair que pour toute fonction φ définie sur le groupe $\mathfrak{S}_p$ on a la relation

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}\varphi(\sigma) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}\varphi(\omega\circ\sigma);$$

appliquant ce résultat à

$$\varphi(\sigma) = \mathfrak{p}(\sigma).f(\sigma^{-1}(\omega(x)))$$

et observant que

$$\varphi(\omega\circ\sigma) = \mathfrak{p}(\omega\circ\sigma).f(\sigma^{-1}(\omega^{-1}(\omega(x)))) = \mathfrak{p}(\omega)\mathfrak{p}(\sigma)f(\sigma^{-1}(x)),$$

on voit que (13) s'écrit aussi

$$g(\omega(x)) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}\mathfrak{p}(\omega)\mathfrak{p}(\sigma)f(\sigma^{-1}(x)) = \mathfrak{p}(\omega).\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}\mathfrak{p}(\sigma)f(\sigma^{-1}(x));$$

ceci montre que

$$g(\omega(x)) = \mathfrak{p}(\omega)g(x)$$

et prouve comme annoncé que la fonction $g(x) = g(x_1, \ldots, x_p)$ est antisymétrique.

Pour démontrer (12) supposons par exemple $x_i = x_j$ pour des entiers i et j tels que $i < j$; désignons par τ la permutation définie comme suit :

$$\tau(k) = k \quad \text{si} \quad k\neq i,\ j; \qquad \tau(i) = j; \qquad \tau(j) = i;$$

il est clair que $\mathfrak{p}(\tau) = -1$ et que, pour l'élément $x = (x_1, \ldots, x_p)\in X^p$ considéré on a

$$\tau^{-1}(x) = \tau(x) = x. \tag{14}$$

Dans l'expression

$$g(x) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}\mathfrak{p}(\sigma).f(\sigma^{-1}(x)),$$

on peut grouper les permutations σ en deux classes : celles pour lesquelles on a $\sigma(i) < \sigma(j)$, et celles pour lesquelles on a $\sigma(i) > \sigma(j)$; notant $\mathfrak{S}'_p$ et $\mathfrak{S}''_p$ les deux parties de $\mathfrak{S}_p$ ainsi obtenues, lesquelles sont disjointes et ont pour réunion tout $\mathfrak{S}_p$, on obtient donc

$$g(x) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}'_p}\mathfrak{p}(\sigma).f(\sigma^{-1}(x)) + \sum_{\omega\in\mathfrak{S}''_p}\mathfrak{p}(\omega).f(\omega^{-1}(x)); \tag{15}$$

or l'application $\sigma\to\sigma\circ\tau$ est une *bijection* de $\mathfrak{S}'_p$ sur $\mathfrak{S}''_p$; on peut donc grouper les termes de (15) deux par deux, en associant le terme relatif à σ de la première somme au terme de la seconde pour lequel $\omega = \tau\circ\sigma$; la somme de ces deux termes est

$$\mathfrak{p}(\sigma).f(\sigma^{-1}(x)) + \mathfrak{p}(\tau\circ\sigma)f(\sigma^{-1}(\tau^{-1}(x)))$$

i.e., en vertu de (14),

$$\mathfrak{p}(\sigma).f(\sigma^{-1}(x)) + \mathfrak{p}(\tau)\mathfrak{p}(\sigma).f(\sigma^{-1}(x)),$$

et comme $\mathfrak{p}(\tau) = -1$ cette somme est nulle; ainsi les termes des deux sommes figurant dans (15) se détruisent deux à deux, ce qui achève la démonstration de (12).

3. *Applications multilinéaires alternées*

Soient X et M des *modules sur un anneau commutatif* K, et $p \geqslant 1$ un entier. On dit qu'une application p-linéaire

$$f: X^p \to M$$

est **alternée** si l'on a $f(x_1, \ldots, x_p) = 0$ toutes les fois qu'il existe des indices i et j distincts tels que $x_i = x_j$. Pour $p = 1$, cette notion se réduit à celle d'application linéaire de X dans M; pour $p = 2$ et $p = 3$ on retrouve les définitions du § précédent.

THÉORÈME 2. *Toute application multilinéaire alternée est antisymétrique.*

Pour établie la relation (6) du n° 1, donnons des valeurs fixes aux variables autres que x_i et x_{i+1}, et regardons f comme fonction de x_i et x_{i+1}; on obtient alors une fonction *bilinéaire* de x_i et x_{i+1} parce que f est multilinéaire, et *alternée* car f s'annule pour $x_i = x_{i+1}$; on en déduit donc (§ 22, n° 1, relation (2)) que l'expression $f(x_1, \ldots, x_p)$ est multipliée par -1 lorsqu'on échange x_i et x_{i+1}, ce qui prouve le Théorème.

D'après les résultats du n° 1, on voit donc qu'une application p-linéaire alternée satisfait à l'identité

$$f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)}) = \mathfrak{p}(\sigma).f(x_1, \ldots, x_p); \tag{16}$$

pour $p = 2$ on retrouve la relation (2) du § 22, et pour $p = 3$ les relations (9).

THÉORÈME 3. *Soit f une application p-linéaire de X^p dans M; alors l'application g donnée par*

$$g(x_1, \ldots, x_p) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}\mathfrak{p}(\sigma).f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)})$$

est p-linéaire alternée.

Le terme général du second membre est évidemment une fonction p-linéaire de $x_1, \ldots, x_p$, de sorte qu'il en est de même de g; il reste donc à montrer que $g(x_1, \ldots, x_p)$ est nul si les vecteurs $x_1, \ldots, x_p$ ne sont pas deux à deux distincts, ce qui n'est autre qu'un cas particulier de l'assertion (12) du n° 2.

Exemple 2. Soient $u_1, \ldots, u_p$ des formes linéaires sur X; alors la forme p-linéaire

$$\sum\mathfrak{p}(\sigma)u_1(x_{\sigma(1)})\ \ldots\ u_p(x_{\sigma(p)})$$

est alternée : il suffit pour le voir d'appliquer le Théorème 3 à la forme $u_1\otimes\ldots\otimes u_p$ définie au § 21, *Exemple* 2.

La forme p-linéaire alternée ainsi obtenue s'appelle le **produit extérieur** des formes linéaires $u_1, \ldots, u_p$, et se désigne par la notation

$$u_1\wedge\ldots\wedge u_p.$$

THÉORÈME 4. *Soit f une application p-linéaire alternée de X^p dans M. On a*

$$f(a_1, \ldots, a_p) = 0$$

toutes les fois que les vecteurs $a_1, \ldots, a_p$ sont des combinaisons linéaires de $p - 1$ vecteurs au plus.

Supposons en effet qu'on ait des relations

$$a_i = \sum_{1 \leqslant j \leqslant q} \lambda_{ij} b_j;$$

la formule (10) du § 21, nº 3, montre qu'alors

$$f(a_1, \ldots, a_p) = \sum_{j_1, \ldots, j_p} \lambda_{1,j_1} \ldots \lambda_{p,j_p} f(b_{j_1}, \ldots, b_{j_p});$$

cela dit, supposons $q < p$; alors les p entiers $j_1, \ldots, j_p$, compris entre 1 et q, ne sont jamais deux à deux distincts; comme f est alternée, on a donc

$$f(b_{j_1}, \ldots, b_{j_p}) = 0$$

quels que soient $j_1, \ldots, j_p$, d'où le résultat cherché.

COROLLAIRE 1. *Soient X et M des espaces vectoriels sur un corps commutatif et f une application multilinéaire alternée de X^p dans M. On a*

$$f(a_1, \ldots, a_p) = 0$$

lorsque les vecteurs $a_1, \ldots, a_p$ ne sont pas linéairement indépendants.

S'il existe en effet une relation linéaire

$$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_p a_p = 0$$

non triviale, avec par exemple $\lambda_p \neq 0$, on peut puisque K est ici un corps en déduire que a_p est combinaison linéaire de $a_1, \ldots, a_{p-1}$; donc les p vecteurs $a_1, \ldots, a_p$ sont des combinaisons linéaires de $p - 1$ d'entre eux, et il reste à appliquer le Théorème 4.

COROLLAIRE 2. *Soit X un K-module libre ayant une base formée de r vecteurs. Toute application p-linéaire alternée de X^p dans M est nulle pour $p \geqslant r + 1$.*

Car quels que soient $x_1, \ldots, x_p \in X$ on peut alors exprimer linéairement les x_i à l'aide de $r < p$ vecteurs.

Exemple 3. Sur un espace vectoriel de dimension r il est inutile d'étudier les formes p-linéaires alternées pour $p > r$; il suffit de se borner aux entiers $p = 1, 2, \ldots, r$.

Si en particulier X est l'espace usuel à trois dimensions sur $K = \mathbf{R}$, il n'existe aucune forme p-linéaire alternée non identiquement nulle sur X si $p \geqslant 4$.

Le nº suivant nous permettra de préciser comme suit le Corollaire précédent :

si X possède une base formée de r vecteurs, il existe effectivement sur X des formes r-linéaires alternées non identiquement nulles.

4. Fonctions p-linéaires alternées sur un module isomorphe à K^p

Nous allons maintenant étudier les applications p-linéaires alternées de X^p dans M lorsque le module X est libre de type fini. Dans ce nº nous étudierons le cas particulier où X est isomorphe à K^p, i.e. admet une base formée de p vecteurs $a_1, \ldots, a_p$; le cas général fera l'objet du nº 7.

Posant

$$x_i = \sum_{1 \leqslant j \leqslant p} \xi_{ij} a_j$$

le Théorème 3 du § 21 montre que (*)

$$f(x_1, \ldots, x_p) = \sum c_{i_1 \ldots i_p} \xi_{1 i_1} \ldots \xi_{p i_p} \tag{17}$$

où

$$c_{i_1 \ldots i_p} = f(a_{i_1}, \ldots, a_{i_p}); \tag{18}$$

puisque f est alternée, on a tout d'abord

$$c_{i_1 \ldots i_p} = 0 \quad \text{si } i_1, \ldots, i_p \text{ ne sont pas deux à deux distincts;} \tag{19}$$

on peut donc se borner, dans (17), aux termes pour lesquels les p entiers $i_1, \ldots, i_p$ sont deux à deux distincts; mais comme ces entiers sont compris entre 1 et p, ils forment alors une permutation de $1, \ldots, p$ — autrement dit il existe une et une seule permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ telle que

$$i_1 = \sigma(1), \ldots, i_p = \sigma(p);$$

mais alors

$$c_{i_1 \ldots i_p} = f(a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma) f(a_1, \ldots, a_p)$$

puisque f est alternée.

On voit donc que la somme (17) s'écrit

$$f(x_1, \ldots, x_p) = f(a_1, \ldots, a_p) \cdot \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \varepsilon(\sigma) \cdot \xi_{1,\sigma(1)} \ldots \xi_{p,\sigma(p)}. \tag{20}$$

Inversement, toute application f de X^p dans M satisfaisant à cette relation est multilinéaire alternée. Pour le voir, il suffit évidemment de montrer que l'expression

$$D(x_1, \ldots, x_p) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \varepsilon(\sigma) \cdot \xi_{1,\sigma(1)} \ldots \xi_{p,\sigma(p)} \tag{21}$$

est une forme p-linéaire alternée sur X^p. Or désignons par $u_1, \ldots, u_p$ les fonctions

(*) Dans les calculs qui suivent on écrit les scalaires indifféremment à droite ou à gauche des éléments de M, ce qui n'a aucune importance puisque K est commutatif.

coordonnées du module X par rapport à la base $a_1, \ldots, a_p$; on a

$$\xi_{ij} = u_j(x_i)$$

et par suite

$$D(x_1, \ldots, x_p) = \sum \mathfrak{p}(\sigma) . u_{\sigma(1)}(x_1) \ldots u_{\sigma(1)}(x_p); \tag{22}$$

or au lieu d'écrire le produit figurant au second membre dans l'ordre $1, \ldots, p$, on peut, puisque K est commutatif, l'écrire dans l'ordre

$$\sigma^{-1}(1), \ldots, \sigma^{-1}(p);$$

on voit alors que

$$u_{\sigma(1)}(x_1) \ldots u_{\sigma(p)}(x_p) = u_1(x_{\sigma^{-1}(1)}) \ldots u_p(x_{\sigma^{-1}(p)}),$$

en sorte que (22) s'écrit aussi

$$D(x_1, \ldots, x_p) = \sum \mathfrak{p}(\sigma) . u_1(x_{\sigma^{-1}(1)}) \ldots u_p(x_{\sigma^{-1}(p)});$$

mais comme $\mathfrak{S}_p$ est un groupe l'application $\sigma \mapsto \sigma^{-1}$ de $\mathfrak{S}_p$ dans $\mathfrak{S}_p$ est bijective; en remplaçant σ par σ^{-1} dans la somme précédente on modifie donc simplement l'ordre des termes, et par suite

$$D(x_1, \ldots, x_p) = \sum \mathfrak{p}(\sigma^{-1}) u_1(x_{\sigma(1)}) \ldots u_p(x_{\sigma(p)});$$

en tenant compte du fait évident que

$$\mathfrak{p}(\sigma^{-1}) = \mathfrak{p}(\sigma)^{-1} = \mathfrak{p}(\sigma),$$

il reste en définitive

$$D(x_1, \ldots, x_p) = \sum \mathfrak{p}(\sigma) . u_1(x_{\sigma(1)}) \ldots u_p(x_{\sigma(p)}) \tag{23}$$

ce qui montre (*Exemple* 2) que D n'est autre que le produit extérieur des formes linéaires $u_1, \ldots, u_p$:

$$D = u_1 \wedge \ldots \wedge u_p; \tag{24}$$

par suite D est une forme p-linéaire alternée sur X^p comme annoncé, et la formule (20) caractérise les applications p-linéaires alternées de X^p dans un K-module M.

On remarquera que l'on a

$$D(a_1, \ldots, a_p) = 1; \tag{25}$$

en effet, on a

$$u_i(a_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

en sorte que si l'on calcule $D(a_1, \ldots, a_p)$ à l'aide de la formule (22) le seul terme éventuellement non nul est celui pour lequel on a $\sigma(1) = 1, \ldots, \sigma(p) = p$; on a alors $u_{\sigma(i)}(a_i) = 1$, et évidemment $\mathfrak{p}(\sigma) = +1$, de sorte qu'on trouve bien (25).

De plus, la relation (25) caractérise D; en effet, d'après (20), on a

$$f = f(a_1, \ldots, a_p) . D$$

pour toute forme p-linéaire alternée f sur X^p; donc la relation $f(a_1, \ldots, a_p) = 1$ implique $f = D$.

En définitive, on a démontré le résultat suivant :

THÉORÈME 5. *Soit* X *un module libre de type fini sur un anneau commutatif* K. *Soit* $(a_1, \ldots, a_p)$ *une base de* X. *Il existe alors une et une seule forme p-linéaire alternée* D *sur* X^p *telle que l'on ait*

$$D(a_1, \ldots, a_p) = 1;$$

on a

$$D(x_1, \ldots, x_p) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \mathfrak{p}(\sigma) . \xi_{1,\sigma(1)} \ldots \xi_{p,\sigma(p)}$$

quels que soient les vecteurs

$$x_i = \sum \xi_{ij} a_j \quad (1 \leqslant i \leqslant p);$$

enfin, pour toute application p-linéaire alternée f de X^p *dans un* K*-module* M, *on a*

$$f(x_1, \ldots, x_p) = D(x_1, \ldots, x_p) . f(a_1, \ldots, a_p)$$

quels que soient $x_1, \ldots, x_p \in X$.

Voici une conséquence intéressante de ce résultat :

COROLLAIRE. *Soit* X *un module libre de type fini sur un anneau* commutatif K. *Toutes les bases de* X *ont le même nombre d'éléments.*

Soient en effet $(a_1, \ldots, a_p)$ et $(b_1, \ldots, b_q)$ des bases de X; d'après le Théorème précédent il existe sur X une forme q-linéaire alternée f telle que

$$f(b_1, \ldots, b_q) = 1;$$

donc f n'est pas identiquement nulle; comme X possède une base formée de p vecteurs il s'ensuit que $q \leqslant p$ d'après le Corollaire du Théorème 4. Mais on a $p \leqslant q$ par un raisonnement identique, et finalement $p = q$ comme annoncé.

5. *Déterminant d'un système de vecteurs, d'une matrice, d'un endomorphisme*

Étant donnés un K-module X possédant une base $(a_1, \ldots, a_p)$ et p vecteurs $x_1, \ldots, x_p \in X$, on appelle **déterminant de** $x_1, \ldots, x_p$ **par rapport à la base** $a_1, \ldots, a_p$ le scalaire $D(x_1, \ldots, x_p)$ donné par la relation (21) du n° précédent.

D'autre part, étant donnée une matrice carrée

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{p1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{1p} & \ldots & \alpha_{pp} \end{pmatrix}$$

à coefficients dans K, on appelle **déterminant de** A le scalaire

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{p1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1p} & \dots & \alpha_{pp} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \mathfrak{p}(\sigma)\alpha_{1,\sigma(1)} \dots \alpha_{p,\sigma(p)};$$

on le désigne aussi par la notation

$$\text{dét}(A).$$

Il est clair qu'avec cette définition la formule (21) s'écrit encore

$$D(x_1, \dots, x_p) = \begin{vmatrix} \xi_{11} & \dots & \xi_{p1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \xi_{1p} & \dots & \xi_{pp} \end{vmatrix};$$

or on a vu au nº précédent que ce déterminant est aussi donné par la formule (23), i.e. est aussi égal à l'expression

$$\sum \mathfrak{p}(\sigma) . \xi_{\sigma(1),1} \dots \xi_{\sigma(p),p};$$

celle-ci se déduit de (21) en y remplaçant partout ξ_{ij} par ξ_{ji}; donc :

Théorème 6. *Le déterminant d'une matrice carrée à coefficients dans un anneau commutatif est égal à celui de la matrice transposée.*

Voici maintenant un autre résultat important :

Théorème 7. *Soient* A *et* B *deux matrices carrées d'ordre p à coefficients dans un anneau commutatif* K. *On a alors*

$$\text{dét}(AB) = \text{dét}(A)\text{dét}(B).$$

Soit X un K-module admettant une base $a_1, \dots, a_p$; soient u et v les endomorphismes de X admettant pour matrices, par rapport à la base en question, les matrices A et B données; la matrice AB correspond alors à l'application composée $u \circ v$.

Soit $D(x_1, \dots, x_p)$ le déterminant de $x_1, \dots, x_p \in X$ par rapport à la base $a_1, \dots, a_p$. Définissons une nouvelle application D_u de X^p dans K en posant

$$D_u(x_1, \dots, x_p) = D(u(x_1), \dots, u(x_p));$$

alors D_u est encore une application p-linéaire alternée. Tout d'abord D_u est multilinéaire; si en effet l'on donne à $x_2, \dots, x_p$ par exemple des valeurs fixes $b_2, \dots, b_p$, et si l'on pose $c_i = u(b_i)$, il reste l'expression

$$D(u(x_1), b_2, \dots, b_p);$$

comme fonction de x_1, celle-ci s'obtient en composant avec l'application *linéaire* u l'application *linéaire* $x_1 \to D(x_1, b_2, \dots, b_p)$, en sorte que le résultat est bien fonction linéaire de x_1. Ainsi la fonction D_u est multilinéaire, et il est évident qu'elle est

alternée car la relation $x_i = x_j$ implique $u(x_i) = u(x_j)$ et donc $D(u(x_1), \dots, u(x_p)) = 0$.

Puisque D_u est p-linéaire alternée, le Théorème 5 montre que l'on a

$$D_u(x_1, \dots, x_p) = D_u(a_1, \dots, a_p)D(x_1, \dots, x_p) \tag{26}$$

quels que soient les x_i; or comme

$$u(a_i) = \sum_j \alpha_{ij}a_j \quad \text{si} \quad A = (\alpha_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$$

on voit que

$$D_u(a_1, \dots, a_p) = D(u(a_1), \dots, u(a_p)) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{p1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1p} & \dots & \alpha_{pp} \end{vmatrix} = \text{dét}(A),$$

en sorte que (26) s'écrit

$$D(u(x_1), \dots, u(x_p)) = \text{dét}(A)D(x_1, \dots, x_p); \tag{27}$$

on a de même

$$D(v(x_1), \dots, v(x_p)) = \text{dét}(B)D(x_1, \dots, x_p),$$

et en posant $w = u \circ v$ on a aussi

$$D(w(x_1), \dots, w(x_p)) = \text{dét}(AB)D(x_1, \dots, x_p); \tag{28}$$

mais

$$\begin{aligned} D(w(x_1), \dots, w(x_p)) = D(u(v(x_1)), \dots, u(v(x_p))) &= \text{dét}(A).D(v(x_1), \dots, v(x_p)) \\ &= \text{dét}(A)\,\text{dét}(B)D(x_1, \dots, x_p), \end{aligned}$$

et en comparant avec (28) on voit que le Théorème est démontré.

La formule (27) conduit à la notion suivante. Soit u un endomorphisme de X; la forme p-linéaire alternée D_u étant proportionnelle à D, il existe un scalaire noté

$$\text{dét}(u)$$

tel que l'on ait

$$D(u(x_1), \dots, u(x_p)) = \text{dét}(u)D(x_1, \dots, x_p)$$

quels que soient les $x_i \in X$; comme du reste toute forme p-linéaire alternée f sur X^p est, d'après le Théorème 5, proportionnelle à D, on a aussi

$$f(u(x_1), \dots, u(x_p)) = \text{dét}(u) . f(x_1, \dots, x_p). \tag{29}$$

On dit que le scalaire dét(u) est le **déterminant de l'endomorphisme** u. Si A est la matrice de u par rapport à une base quelconque de X, les calculs ci-dessus (en appliquant (29) au déterminant par rapport à la dite base) montrent que

$$\text{dét}(u) = \text{dét}(A).$$

Il est clair que, si u et v sont deux endomorphismes de X, on a

$$\text{dét}(u \circ v) = \text{dét}(u)\text{dét}(v); \tag{30}$$

il est d'autre part évident sur la formule (29) que le déterminant de l'endomorphisme identique de X est égal à 1.

Remarque 2. Ce qui précède montre que, si u est un endomorphisme de X, le déterminant de la matrice de u par rapport à une base de X est indépendant de cette base. On peut le voir aussi à l'aide du raisonnement suivant. Soit A la matrice de u par rapport à une base de X; alors les matrices de u par rapport aux autres bases de X sont de la forme

$$\text{UAU}^{-1}$$

avec $\text{U} \in \text{GL}(p, \text{K})$ comme on l'a vu au § 15. Or on a

$$\text{dét}(\text{UAU}^{-1}) = \text{dét}(\text{U})\text{dét}(\text{A})\text{dét}(\text{U}^{-1}),$$

d'autre part

$$\text{dét}(\text{U})\text{dét}(\text{U}^{-1}) = \text{dét}(1_p) = 1,$$

donc

$$\text{dét}(\text{U}^{-1}) = \text{dét}(\text{U})^{-1},$$

et il vient finalement

$$\text{dét}(\text{UAU}^{-1}) = \text{dét}(\text{A})$$

comme annoncé.

6. Caractérisation des bases d'un espace vectoriel de dimension finie

Les résultats des n° précédents impliquent le théorème suivant :

THÉORÈME 8. *Soient* X *un espace vectoriel de dimension* p *sur un corps commutatif,* $a_1, \ldots, a_p$ *une base de* X, *et*

$$x_i = \sum \xi_{ij} a_j \quad (1 \leqslant i \leqslant p)$$

p *éléments de* X. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) Les vecteurs $x_1, \ldots, x_p$ *sont linéairement indépendants.*

b) Les vecteurs $x_1, \ldots, x_p$ *forment une base de* X.

c) La matrice

$$\begin{pmatrix} \xi_{11} & \cdots & \xi_{p1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_{1p} & \cdots & \xi_{pp} \end{pmatrix}$$

est inversible;

d) On a

$$\begin{vmatrix} \xi_{11} & \cdots & \xi_{p1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_{1p} & \cdots & \xi_{pp} \end{vmatrix} \neq 0.$$

L'équivalence des conditions a) et b) résulte du § 19, Théorème 10. L'équivalence de b) et c) a été établie au § 15, Théorème 1.

En désignant par D la forme multilinéaire alternée déterminant par rapport à la base $a_1, \ldots, a_p$, la condition d) s'écrit $\text{D}(x_1, \ldots, x_p) \neq 0$; elle implique a) en vertu du Corollaire 1 du Théorème 4. Il reste à montrer que b) implique d); or si les x_i forment une base, il existe (Théorème 5) une forme p-linéaire alternée f sur X^p telle que

$$f(x_1, \ldots, x_p) \neq 0;$$

comme toute forme p-linéaire alternée sur X^p est proportionnelle à D, on en déduit qu'on a *a fortiori*

$$\text{D}(x_1, \ldots, x_p) \neq 0,$$

ce qui est la condition d) et achève la démonstration.

COROLLAIRE 1. *Pour qu'une matrice carrée à coefficients dans un corps commutatif soit inversible, il faut et il suffit que son déterminant soit non nul.*

Cela résulte de l'équivalence entre les propriétés c) et d) dans l'énoncé du Théorème 8.

COROLLAIRE 2. *Soient* L *un espace vectoriel de dimension finie sur un corps commutatif* K *et* u *un endomorphisme de* L. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) u *est bijectif.*

b) u *est surjectif.*

c) u *est injectif.*

d) On a $\text{Ker}(u) = 0$, i.e. la relation $u(x) = 0$ implique la relation $x = 0$.

e) Le déterminant de u *n'est pas nul.*

L'équivalence des quatre premières conditions a déjà été établie pour K commutatif ou non (§ 19, Corollaire 1 du Théorème 13); d'autre part, pour que u soit bijectif il faut et il suffit (§ 15, n° 2) que sa matrice A par rapport à une base de L soit inversible, i.e. que dét (A) soit non nul d'après le Corollaire précédent; mais comme

$$\text{dét}(\text{A}) = \text{dét}(u),$$

on voit donc que les propriétés a) et e) sont équivalentes.

COROLLAIRE 3. *Pour qu'un système de n équations linéaires et homogènes à n inconnues*

$$\begin{cases} \alpha_{11}\xi_1 + \cdots + \alpha_{n1}\xi_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{1n}\xi_1 + \cdots + \alpha_{nn}\xi_n = 0 \end{cases}$$

à coefficients dans un corps commutatif K, *possède une solution non triviale, il faut et il suffit que*

$$\text{dét}((\alpha_{ij})) = 0.$$

En effet, d'après le Théorème 2 du § 20 (équivalence entre les conditions *e*) et *f*) dans l'énoncé du Théorème), l'existence d'une solution non triviale signifie que la matrice (α_{ij}) n'est pas inversible.

Corollaire 4. *Pour qu'un système de n équations linéaires à n inconnues*

$$\begin{cases} \alpha_{11}\xi_1 + \cdots + \alpha_{n1}\xi_n = \beta_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{1n}\xi_1 + \cdots + \alpha_{nn}\xi_n = \beta_n \end{cases}$$

à coefficients dans un corps commutatif, admette une et une seule solution (i.e. soit un système de Cramer) *il faut et il suffit que*

$$\text{dét}\,((\alpha_{ij})) \neq 0.$$

Cela résulte de l'équivalence entre les propriétés *a*), *d*) et *f*) dans l'énoncé du Théorème 2 du § 20.

Nous verrons au § suivant que la théorie des déterminants fournit en outre une formule explicite pour calculer la solution d'un système de Cramer.

Remarque 3. On verra au § suivant que le Corollaire 1 s'étend aux *anneaux* commutatifs, la condition dét (A) $\neq$ 0 étant remplacée par la condition que le déterminant de la matrice A soit un élément inversible de l'anneau K.

Remarque 4. Supposons que K soit le corps **R** des nombres réels, et soit X un espace vectoriel réel de dimension finie p. Étant données deux bases $(a_1, \ldots, a_p)$ et $(b_1, \ldots, b_p)$ de X, désignons par la notation

$$D(b_1, \ldots, b_p; a_1, \ldots, a_p)$$

le déterminant des vecteurs $b_1, \ldots, b_p$ par rapport à la base $(a_1, \ldots, a_p)$; c'est donc le déterminant de la matrice de passage de la base (a_i) à la base (b_i). Si l'on a trois bases (a_i), (b_i) et (c_i) de X, la matrice de passage de la première à la troisième est évidemment le produit de la matrice de passage de la première à la seconde par la matrice de passage de la seconde à la troisième; on en déduit (Théorème 7) que

$$D(c_1, \ldots, c_p; a_1, \ldots, a_p) = D(c_1, \ldots, c_p; b_1, \ldots, b_p) . D(b_1, \ldots, b_p; a_1, \ldots, a_p).$$

Comme on a

$$D(a_1, \ldots, a_p; a_1, \ldots, a_p) = 1,$$

il s'ensuit que

$$D(a_1, \ldots, a_p; b_1, \ldots, b_p) = D(b_1, \ldots, b_p; a_1, \ldots, a_p)^{-1}.$$

Cela étant, on dit que deux bases $(a_1, \ldots, a_p)$ et $(b_1, \ldots, b_p)$ de X ont **même orientation** si

$$D(b_1, \ldots, b_p; a_1, \ldots, a_p) > 0,$$

et sont **d'orientations opposées** dans le cas contraire. Les trois relations qu'on vient d'établir montrent que la propriété pour deux bases d'avoir la même orientation est une *relation d'équivalence* dans l'ensemble des bases de X; de plus, l'ensemble de ces bases se décompose, pour cette relation d'équivalence, en *deux* classes exactement [pour le voir, choisissons une base (a_i) une fois pour toutes; les bases orientées comme (a_i) forment une première classe; celles qui sont d'orientation opposée forment la seconde classe, car si (b_i) et (c_i) sont d'orientations opposées à (a_i), alors (b_i) et (c_i) sont de même orientation puisque le produit de deux nombres négatifs est positif].

Par définition, on appelle **orientation de** X chacune de ces deux classes d'équivalence : X possède donc deux orientations possibles. Toujours par définition, **orienter** X consiste à choisir une orientation de X, i.e. une de ces deux classes de bases. Pour orienter X, la façon la plus simple de procéder est de choisir une base (a_i) de X, et de déclarer qu'on choisit pour orientation celle des deux classes à laquelle la base (a_i) appartient.

Lorsqu'on a orienté l'espace vectoriel X, les bases de X qui appartiennent à l'orientation choisie sur X sont qualifiées de **directes** ou de **positivement orientés,** les autres étant qualifiées de **rétrogrades** ou de **négativement orientées.**

Étant donné un espace vectoriel X quelconque, il n'existe aucun moyen « naturel » ou « canonique » ou « intrinsèque » de choisir une orientation dans X — autrement dit, la notion de « base directe » suppose toujours un choix arbitraire, et n'a aucun sens absolu. Dans l'espace physique, la règle dite du « tire-bouchon de Maxwell » ou du « bonhomme d'Ampère » semble fournir un procédé « naturel » pour distinguer les trièdres « directs » des trièdres « rétrogrades »; mais la notion de tire-bouchon de Maxwell, comme celles de « gauche » et de « droite » sur lesquelles elle repose, n'a aucun sens *mathématique*.

Les seuls espaces où il soit possible de choisir *canoniquement* une orientation positive sont les espaces $\mathbf{R}^n$: il est en effet naturel de déclarer alors qu'on qualifiera de directe toute base orientée comme la base *canonique* de $\mathbf{R}^n$. Mais l'espace physique n'est qu'isomorphe à $\mathbf{R}^3$, il ne lui est pas identique, et on ne peut définir un isomorphisme du premier sur le second sans d'abord choisir une base du premier...

7. *Applications multilinéaires alternées : cas général*

Jusqu'à présent on a étudié les applications p-linéaires alternées sur un K-module isomorphe à K^p. Dans le cas général, on a des résultats analogues mais un peu plus compliqués :

Théorème 9. *Soient* X *et* M *des modules sur un anneau commutatif* K, *et supposons* X *libre de type fini; soit* $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *une base de* X. *Pour qu'une application p-linéaire f de* X^p *dans* M *soit alternée, il faut et il suffit que ses coefficients*

$$c_{i_1 \ldots i_p} = f(a_{i_1}, \ldots, a_{i_p})$$

par rapport à la base considérée vérifient les conditions suivantes :

(31) $\quad c_{i_1 \ldots i_p} = 0$ *si* $i_1, \ldots, i_p$ *ne sont pas deux à deux distincts;*

(32) $\quad c_{i_{\sigma(1)} \ldots i_{\sigma(p)}} = \varepsilon(\sigma) . c_{i_1 \ldots i_p}$ *pour toute permutation* $\sigma \in \mathfrak{S}_p$.

Si ces conditions sont remplies, on a

$$f(x_1, \ldots, x_p) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant n} c_{i_1 \ldots i_p} \cdot \begin{vmatrix} \xi_{1,i_1} & \cdots & \xi_{p,i_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_{1,i_p} & \cdots & \xi_{p,i_p} \end{vmatrix} \tag{33}$$

quels que soient les vecteurs

$$x_i = \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} \xi_{ij} a_j \in \mathrm{X}.$$

Posons $a_{i_1} = b_1, \ldots, a_{i_p} = b_p$; si les indices $i_1, \ldots, i_p$ ne sont pas deux à deux distincts, deux au moins des vecteurs $b_1, \ldots, b_p$ sont égaux, de sorte que si f est alternée il vient $f(b_1, \ldots, b_p) = 0$, d'où (31). En écrivant

$$f(b_{\sigma(1)}, \ldots, b_{\sigma(p)}) = \mathfrak{p}(\sigma) f(b_1, \ldots, b_p)$$

et en remarquant que

$$b_{\sigma(k)} = a_{i_{\sigma(k)}}$$

on obtient de même la relation (32).

Supposons inversement (31) et (32) vérifiées; dans la formule

$$f(x_1, \ldots, x_p) = \sum c_{i_1 \ldots i_p} \xi_{1,i_1} \cdots \xi_{p,i_p} \tag{34}$$

on peut se borner à étendre la sommation aux suites $i_1, \ldots, i_p$ formées d'entiers deux à deux distincts, compris entre 1 et n.

Désignons provisoirement par S l'ensemble de ces suites, et soit $\mathrm{S}^+ \subset \mathrm{S}$ l'ensemble des suites $i_1, \ldots, i_p$ telles que

$$i_1 < \cdots < i_p. \tag{35}$$

Il est clair que toute suite appartenant à S s'obtient, d'une façon et d'une seule, en faisant subir une permutation convenable à une suite vérifiant (35); autrement dit, si à toute suite $(i_1, \ldots, i_p)$ vérifiant (35) et à toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ on associe la suite $(i_{\sigma(1)}, \ldots, i_{\sigma(p)})$ on définit une *bijection* de l'ensemble produit $\mathrm{S}^+ \times \mathfrak{S}_p$ sur S.

La formule (34) peut donc s'écrire encore

$$f(x_1, \ldots, x_p) = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} c_{i_{\sigma(1)} \ldots i_{\sigma(p)}} \xi_{1,i_{\sigma(1)}} \cdots \xi_{p,i_{\sigma(p)}}$$

en tenant compte de (32) on trouve donc

$$f(x_1, \ldots, x_p) = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} c_{i_1 \ldots i_p} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \mathfrak{p}(\sigma) \xi_{1,i_{\sigma(1)}} \cdots \xi_{p,i_{\sigma(p)}};$$

mais en posant $\alpha_{kh} = \xi_{k,i_h}$ la somme partielle étendue à $\mathfrak{S}_p$ s'écrit

$$\sum \mathfrak{p}(\sigma) \alpha_{1,\sigma(1)} \cdots \alpha_{p,\sigma(p)},$$

i.e. n'est autre que le déterminant de la matrice

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{p1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{1p} & \cdots & \alpha_{pp} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi_{1,i_1} & \cdots & \xi_{p,i_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_{1,i_p} & \cdots & \xi_{p,i_p} \end{vmatrix}, \tag{36}$$

ce qui établit (33). Il reste à montrer que f est alternée.

En désignant par u_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ les fonctions coordonnées du module X par rapport à la base $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, l'expression $\xi_{1,i_1} \ldots \xi_{p,i_p}$ est la valeur sur les vecteurs $x_1, \ldots, x_p$ de la forme p-linéaire $u_{i_1} \otimes \cdots \otimes u_{i_p}$ puisqu'on a d'une manière générale

$$\xi_{ij} = u_j(x_i);$$

il s'ensuit, par un calcul analogue à celui qu'on a développé en détail au n° 4 (voir le passage de (22) à (23)), que le déterminant (36) est la valeur sur les vecteurs $x_1, \ldots, x_p$ du produit extérieur $u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_p}$ défini au n° 3, *Exemple* 2. Par suite (33) s'écrit

$$f(x_1, \ldots, x_p) = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} c_{i_1 \ldots i_p} \cdot u_{i_1 \ldots i_p}(x_1, \ldots, x_p) \tag{37}$$

où l'on a posé

$$u_{i_1 \ldots i_p} = u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_p}, \tag{38}$$

et comme les formes $u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_p}$ sont alternées (*Exemple* 2), il en est donc de même de f, ce qui achève la démonstration du Théorème.

Lorsque $\mathrm{M} = \mathrm{K}$, on déduit facilement de ce qui précède que les formes (38) pour $i_1 < \cdots < i_p$ constituent une *base* du module des formes p-linéaires alternées sur X^p. Les formes (38) sont en nombre

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!},$$

car ce coefficient binomial est aussi le nombre des suites strictement croissantes de p entiers compris entre 1 et n (ces suites correspondent en effet *biunivoquement* aux parties à p éléments de l'ensemble des entiers compris entre 1 et n).

Il est facile et utile de calculer les valeurs des formes p-linéaires alternées $u_{i_1 \ldots i_p}$ sur les vecteurs de base. Le résultat est le suivant : on a

$$u_{i_1 \ldots i_p}(a_{j_1}, \ldots, a_{j_p}) = \mathfrak{p}(\sigma) \quad \text{s'il existe une permutation } \sigma \in \mathfrak{S}_p \text{ telle que } j_1 = i_{\sigma(1)}, \ldots, j_p = i_{\sigma(p)} \tag{39}$$

$$u_{i_1 \ldots i_p}(a_{j_1}, \ldots, a_{j_p}) = 0 \quad \text{dans le cas contraire.} \tag{40}$$

En effet, le premier membre est (d'après le Théorème 3 du § 21) le coefficient de $\xi_{1j_1} \ldots \xi_{pj_p}$ dans le développement de $u_{i_1 \ldots i_p}(x_1, \ldots, x_p)$ en fonction des coordonnées des vecteurs $x_1, \ldots x_p$; or ce développement est

$$u_{i_1 \ldots i_p}(x_1, \ldots, x_p) = \sum \mathfrak{p}(\sigma) \xi_{1,i_{\sigma(1)}} \cdots \xi_{p,i_{\sigma(p)}},$$

d'où immédiatement les formules (39) et (40).

8. *Le critère d'indépendance linéaire*

Le Théorème 8 peut se généraliser comme suit :

THÉORÈME 10. *Soient* X *un espace vectoriel de dimension n sur un corps commutatif,* $a_1, \ldots, a_n$ *une base de* X, *et*

$$x_i = \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} \alpha_{ij} a_j \quad (1 \leqslant i \leqslant p)$$

des éléments de X. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) Les vecteurs $x_1, \ldots, x_p$ *sont linéairement indépendants.*

b) Il existe sur X *une forme p-linéaire alternée f telle que*

$$f(x_1, \ldots, x_p) \neq 0.$$

c) On peut extraire de la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{p1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{1n} & \cdots & \alpha_{pn} \end{pmatrix}$$

une matrice carrée d'ordre p de déterminant non nul.

Avec les notations du n° précédent, les déterminants d'ordre p extraits de cette matrice sont les scalaires $u_{i_1 \ldots i_p}(x_1, \ldots, x_p)$; si l'un d'eux est non nul, il est clair que la condition *b)* sera remplie — et même avec $f = u_{i_1 \ldots i_p}$ pour un choix convenable de $i_1, \ldots, i_p$. Donc *c)* implique *b)*. D'autre part *b)* implique *a)* en vertu du Théorème 4.

Si la condition *a)* est vérifiée, il existe une base de X qui commence par $x_1, \ldots, x_p$; la relation (39) montre alors l'existence d'une forme p-linéaire alternée qui prend sur $x_1, \ldots, x_p$ une valeur non nulle. Donc *a)* implique *b)*.

Il reste à montrer que *b)* implique *c)*. Or la formule (37) montre que si $f(x_1, \ldots, x_p)$ n'est pas nul, l'un au moins des scalaires $u_{i_1 \ldots i_p}(x_1, \ldots, x_p)$ n'est pas nul, ce qui est précisément la propriété *c)*. Le Théorème est donc démontré.

Remarque 5. Soit

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{p1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{1n} & \cdots & \alpha_{pn} \end{pmatrix}$$

une matrice à coefficients dans un corps commutatif K. D'après le Théorème 16 du § 19, le rang de A est le plus grand entier r tel qu'on puisse extraire de A une matrice carrée d'ordre r et *inversible*, autrement dit *de déterminant non nul* (Corollaire 1 du Théorème 8). La condition *c)* dans l'énoncé ci-dessus signifie donc que la matrice (α_{ij}) est de rang p, et l'équivalence avec la condition *a)* résulte alors du Théorème 15 du § 19.

Ce raisonnement permet bien entendu — c'est son principal intérêt — de calculer le rang d'une matrice (sur un corps commutatif) en examinant les déterminants qu'on peut en extraire, ce qui est fort utile dans la pratique. On voit d'autre part que, pour exprimer que p vecteurs $x_i = \sum \xi_{ij} a_j$

sont *liés*, il suffit d'écrire $\binom{n}{p}$ relations « algébriques » entre leurs coordonnées, à savoir

$$\begin{vmatrix} \xi_{1i_1} & \cdots & \xi_{pi_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_{1i_p} & \cdots & \xi_{pi_p} \end{vmatrix} = 0 \text{ quels que soient } i_1 < \cdots < i_p.$$

Pour exprimer par exemple que trois vecteurs

$$\begin{aligned} x &= (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \\ y &= (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) \\ z &= (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4) \end{aligned}$$

de $\mathbf{R}^4$ sont liés par une relation non triviale, on écrit que

$$\begin{vmatrix} \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \\ \xi_4 & \eta_4 & \zeta_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \\ \xi_4 & \eta_4 & \zeta_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \xi_4 & \eta_4 & \zeta_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \end{vmatrix} = 0$$

9. *Conditions de compatibilité d'un système d'équations linéaires*

La théorie des déterminants permet de mettre sous une forme commode les conditions de compatibilité d'un système d'équations linéaires (§ 19, Théorème 5) lorsque le corps de base K est *commutatif*.

Soit

$$f_j(x) = \alpha_{1j}\xi_1 + \cdots + \alpha_{pj}\xi_p = \beta_j \quad (1 \leqslant j \leqslant n) \tag{41}$$

un système de n équations linéaires à p inconnues à coefficients dans K ; nous noterons r le rang du système, i.e. (§ 20, n° 2) le rang de la famille des formes linéaires $f_1, \ldots, f_n$ sur K^p ; ou, ce qui revient au même, le rang de la matrice (α_{ij}) formée avec les coefficients des f_j. On peut alors extraire de celle-ci une matrice carrée d'ordre r inversible, i.e. de déterminant non nul ; nous supposons donc dans ce qui suit qu'on a

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{r1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{1r} & \cdots & \alpha_{rr} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{42}$$

en sorte que $f_1, \ldots, f_r$ sont linéairement indépendantes, et que $f_{r+1}, \ldots, f_n$ en sont des combinaisons linéaires.

THÉORÈME 11. *La relation* (42) *étant supposée vérifiée, pour que le système d'équations linéaires* (41) *possède au moins une solution il faut et il suffit qu'on ait*

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{r1} & \beta_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{1r} & \cdots & \alpha_{rr} & \beta_r \\ \alpha_{1j} & \cdots & \alpha_{rj} & \beta_j \end{vmatrix} = 0$$

pour tout entier j tel que $r + 1 \leqslant j \leqslant n$.

Le Théorème 5 du § 19 montre tout d'abord que, pour que le système (41) possède une solution, il est nécessaire *et suffisant* qu'il en soit de même du système

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \beta_1 \\ &\cdots\cdots \\ f_r(x) &= \beta_r \\ f_j(x) &= \beta_j \end{aligned}$$

pour tout j tel que $r + 1 \leqslant j \leqslant n$; on peut donc se borner à établir le Théorème 11 dans le cas particulier où $n = r + 1$, ce que nous supposerons donc dans ce qui suit.

Si le système (41) possède des solutions, on obtient alors celles-ci en résolvant le système formé par les r premières équations, et comme l'hypothèse (42) montre que le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} \alpha_{11}\xi_1 + \cdots + \alpha_{r1}\xi_r = \beta_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{1r}\xi_1 + \cdots + \alpha_{rr}\xi_r = \beta_r \end{cases}$$

est de Cramer (§ 20, Théorème 2 ou bien Corollaire 4 du Théorème 8 du présent §), on voit qu'on peut alors attribuer aux inconnues $\xi_{r+1}, \ldots, \xi_p$ figurant dans le système (41) des valeurs arbitraires (§ 20, n° 5); en particulier, si le système (41) admet une solution, il en admet une pour laquelle

$$\xi_{r+1} = \cdots = \xi_p = 0,$$

et la réciproque est bien entendu triviale. Dans le cas $n = r + 1$ qui nous intéresse, tout revient donc à exprimer que le système

$$(43)\qquad \begin{cases} \alpha_{11}\xi_1 + \cdots + \alpha_{r1}\xi_r = \beta_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{1,r+1}\xi_1 + \cdots + \alpha_{r,r+1}\xi_r = \beta_{r+1} \end{cases}$$

de $r + 1$ équations à r inconnues, et de rang r, possède au moins une solution, et à montrer que pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit que l'on ait

$$(44)\qquad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{r1} & \beta_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{1,r+1} & \ldots & \alpha_{r,r+1} & \beta_{r+1} \end{vmatrix} = 0.$$

Or la condition (44) exprime aussi que le système

$$(45)\qquad \begin{cases} \alpha_{11}\eta_1 + \cdots + \alpha_{r1}\eta_r + \beta_1\eta_{r+1} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{1,r+1}\eta_1 + \cdots + \alpha_{r,r+1}\eta_r + \beta_{r+1}\eta_{r+1} = 0 \end{cases}$$

possède une solution non triviale (Corollaire 3 du Théorème 8); on est donc ramené à montrer que, dans l'hypothèse (42), *l'existence d'une solution de* (43) *équivaut à l'existence d'une solution non triviale de* (45).

Il est tout d'abord clair que la première propriété implique la seconde, car si

$(\xi_1, \ldots, \xi_r)$ est une solution de (43), alors $(\xi_1, \ldots, \xi_r, -1)$ est une solution non triviale de (45).

Considérons inversement une solution non triviale $(\eta_1, \ldots, \eta_{r+1})$ de (45); on a alors

$$(46)\qquad \eta_{r+1} \neq 0,$$

car si l'on avait $\eta_{r+1} = 0$ il est clair que $(\eta_1, \ldots, \eta_r)$ serait une solution *non triviale* du système homogène associé à (43), et à fortiori du système

$$\begin{cases} \alpha_{11}\eta_1 + \cdots + \alpha_{r1}\eta_1 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{1r}\eta_1 + \cdots + \alpha_{rr}\eta_r = 0, \end{cases}$$

ce qui contredirait l'hypothèse (42) et le Corollaire 3 du Théorème 8. Cela dit, la relation (46) permet de diviser par η_{r+1} les relations (45), et on voit alors que les expressions

$$\xi_i = -\eta_i/\eta_{r+1} \quad (1 \leqslant i \leqslant r)$$

vérifient (43), ce qui achève la démonstration.

Exemple 4. Prenons $K = \mathbf{R}$ et considérons le système de 3 équations linéaires à 3 inconnues

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ 4x + 5y + 6z = b \\ 7x + 8y + 9z = c; \end{cases}$$

son déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

est nul comme on le voit immédiatement, de sorte que le système considéré *n'est pas* un système de Cramer. Comme

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3$$

n'est pas nul, le système est de rang $r = 2$; il y a une seule condition de compatibilité, à savoir

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 4 & 5 & b \\ 7 & 8 & c \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui s'écrit encore, comme on le voit facilement,

$$3(2b - a - c) = 0$$

ou, si l'on préfère (*),

$$2b = a + c.$$

Comme il est évident que

$$(x + 2y + 3z) + (7x + 8y + 9z) = 2(4x + 5y + 6z),$$

la *nécessité* de la condition trouvée pouvait être prévue *a priori*.

Remarque 6. Le lecteur aura intérêt à comparer le Théorème 11 à l'*Exercice* 23 du § 19.

(*) Le lecteur qui est déjà au courant de la notion de caractéristique d'un corps (§ 30, nº 6) fera bien d'étudier complètement le système considéré lorsque K est un corps commutatif quelconque; il est clair par exemple que le raisonnement du texte cesse d'être valable en caractéristique 3.

EXERCICES

Il est parfaitement utopique d'espérer apprendre des Mathématiques, si élémentaires ou si supérieures soient-elles, sans résoudre des Exercices.

Les Exercices qu'on trouvera dans ce livre sont de trois sortes. Certains sont des illustrations pratiques ou même numériques des théories exposées dans le texte; le lecteur débutant ne pourra pas acquérir la technique du calcul sans résoudre une partie appréciable des Exercices de ce genre. D'autres apportent au texte des compléments théoriques élémentaires; en les étudiant, le lecteur s'habituera à manipuler le langage et les modes de raisonnements utilisés dans le texte; ceux de ces Exercices qui ne sont pas *très* faciles sont précédés d'un signe ¶. Enfin, la dernière catégorie est constituée par des Exercices qui apportent au texte des compléments importants et difficiles; ils sont destinés uniquement aux étudiants déjà avancés qui s'intéressent vraiment aux Mathématiques; ces Exercices sont précédés de deux ou même trois signes ¶.

Nous ne saurions trop insister enfin sur le fait que résoudre un Exercice ne consiste pas seulement à se convaincre, à l'aide d'un « brouillon » fait à la hâte, du fait qu'on en a à peu près compris la solution; si cette méthode est admissible pour les Exercices de calcul numérique, il faut par contre s'efforcer de *rédiger intégralement* les Exercices plus théoriques, où l'on doit construire de véritables démonstrations. De cette façon, et uniquement de cette façon, l'étudiant parviendra à acquérir un langage clair et correct, et à utiliser les termes techniques dans leur sens propre, ce qui, en Mathématiques, est le signe le plus certain de la compréhension d'un sujet.

Calculer les déterminants suivants.

1. $\begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 2 \sin t \cos t & 2 \sin^2 t - 1 \\ 2 \cos^2 t - 1 & 2 \sin t \cos t \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} x^2 + 1 & xy & xz \\ xy & y^2 + 1 & yz \\ xz & yz & z^2 + 1 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} \cos a & \sin a \cos b & \sin a \sin b \\ -\sin a & \cos a \cos b & \cos a \sin b \\ 0 & -\sin b & \cos b \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 + i \\ 0 & 1 & i \\ 1 - i & -i & 1 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & z & z^2 \\ 1 & z^2 & z \end{vmatrix}$ où $z = \cos(4\pi/3) + i \sin(4\pi/3)$

9. $\begin{vmatrix} \sin^2 a & \cos 2a & \cos^2 a \\ \sin^2 b & \cos 2b & \cos^2 b \\ \sin^2 c & \cos 2c & \cos^2 c \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^4 \\ 1 & b & b^4 \\ 1 & c & c^4 \end{vmatrix}$

11. $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$

12. $\begin{vmatrix} x + a & b & c \\ a & x + b & c \\ a & b & x + c \end{vmatrix}$

13. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{vmatrix}$

14. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & x & c \\ a & b & x \end{vmatrix}$

15. $\begin{vmatrix} ab & ab' & ab'' \\ a'b & a'b' & a'b'' \\ a''b & a''b' & a''b'' \end{vmatrix}$

16. $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ a & 1 & x \\ b & c & 1 \end{vmatrix}$

¶ **17.** Soient V un espace vectoriel de dimension n sur un corps commutatif K, et f une forme bilinéaire *alternée* sur V. On suppose que le seul vecteur $a \in V$ tel que

$$f(a, x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in V$$

est $a = 0$ (on dit alors que f est non dégénérée).

a) Soit A la matrice formée par les coefficients $\alpha_{ij} = f(a_i, a_j)$ de f par rapport à une base (a_i) de V. Montrer que, pour que f soit non dégénérée, il faut et il suffit que A soit inversible (utiliser le Théorème 2 du § 20).

b) Soient $a, b \in V$ tels que $f(a, b) \neq 0$. On pose $f_a(x) = f(a, x)$ et $f_b(x) = f(b, x)$; montrer que f_a et f_b sont des formes linéaires non proportionnelles sur V, et que les $x \in V$ tels que

$$(*) \qquad f(a, x) = f(b, x) = 0$$

forment un sous-espace vectoriel de dimension $n - 2$ de V.

c) Les hypothèses restant celles de *b*), montrer que V est somme directe du plan engendré par a et b et du sous-espace V′ des solutions de (*). Montrer que la restriction de f à V′ est non dégénérée.

d) En raisonnant par récurrence sur n, montrer *i*) que s'il existe sur V une forme bilinéaire alternée non dégénérée alors la dimension de V est paire *ii*) que si f est une forme bilinéaire alternée non dégénérée sur un espace vectoriel V de dimension $2p$, il existe une base de V par rapport à laquelle la matrice de f est

$$\begin{pmatrix} 0_p & \mathbf{1}_p \\ -\mathbf{1}_p & 0_p \end{pmatrix}$$

où 0_p désigne la matrice nulle à p lignes et p colonnes.

e) Une matrice carrée $A = (\alpha_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ à coefficients dans K est dite **alternée** ou **antisymétrique** si elle vérifie les relations

$$\alpha_{ii} = 0, \qquad \alpha_{ij} + \alpha_{ji} = 0.$$

Montrer qu'une telle matrice ne peut être inversible si n est impair. Si A est inversible et si $n = 2p$, il existe une matrice $U \in GL(n, K)$ telle que

$$UA{}^tU = \begin{pmatrix} 0_p & \mathbf{1}_p \\ -\mathbf{1}_p & 0_p \end{pmatrix}.$$

f) Montrer que

$$\begin{vmatrix} 0 & x & z \\ -x & 0 & y \\ -z & -y & 0 \end{vmatrix} = 0$$

quels que soient $x, y, z \in K$.

18. Soient f, g, h trois formes linéaires sur un espace vectoriel V sur un corps commutatif K. Montrer que, pour que f, g, h soient linéairement indépendantes, il faut et il suffit que

$$f \wedge g \wedge h \neq 0.$$

19. Soient V un espace vectoriel de dimension n sur un corps commutatif K, $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de V, et f, g, h trois formes linéaires sur V. Montrer que les coefficients de $f \wedge g \wedge h$ par rapport à la base (a_i) sont les scalaires

$$\alpha_{ijk} = \begin{vmatrix} f(a_i) & f(a_j) & f(a_k) \\ g(a_i) & g(a_j) & g(a_k) \\ h(a_i) & h(a_j) & h(a_k) \end{vmatrix}$$

20. Soient V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps commutatif, (a_i) une base de V, f une forme bilinéaire alternée sur V, et g une forme linéaire sur V. Montrer que les coefficients par rapport à la base (a_i) de la forme trilinéaire alternée $f \wedge g$ sont les scalaires

$$\alpha_{ijk} = f(a_i, a_j)g(a_k) + f(a_j, a_k)g(a_i) + f(a_k, a_i)g(a_j).$$

21. Soit V un espace vectoriel de dimension 3 sur un corps commutatif, et soient x, y, z trois éléments de V.

a) Si x, y, z sont linéairement dépendants, on a $f(x, y, z) = 0$ pour toute forme trilinéaire alternée f sur V (exprimer l'un des vecteurs à l'aide des deux autres).

b) Si x, y, z sont linéairement indépendants, on a $f(x, y, z) \neq 0$ pour toute forme trilinéaire alternée $f \neq 0$ sur V (observer que x, y, z forment une base de V).

c) Soit a, b, c une base de V ; pour que x, y, z soient linéairement indépendants, il faut et il suffit que le déterminant de leurs coordonnées par rapport à la base a, b, c soit non nul (utiliser les questions *a*) et *b*) et l'*Exemple* 7 du § 22).

(Les résultats de cet *Exercice* seront généralisés au § suivant, mais on conseille au lecteur d'examiner tout d'abord en détail le cas des espaces à trois dimensions, du reste fort important dans la pratique).

22. Les vecteurs

$$(2, -3, 1), \qquad (3, -1, 5), \qquad (1, -4, 3)$$

sont-ils linéairement indépendants dans $\mathbf{R}^3$? Même question pour les vecteurs

$$(5, 4, 3), \qquad (3, 3, 2), \qquad (8, 1, 3).$$

1. Soit K un anneau commutatif. Montrer que les matrices $U \in M_n(K)$ telles que

$$\text{dét}(U) = 1$$

forment un sous-groupe de $GL(n, K)$ — on le désigne généralement par la notation $SL(n, K)$ et on l'appelle le **groupe spécial linéaire à n variables** sur l'anneau K.

2. Le déterminant d'une matrice nilpotente à coefficients dans un corps commutatif est nul.

3. Soit U une matrice carrée à coefficients entiers, de déterminant non nul. Montrer que les seuls nombres premiers p qui figurent dans les dénominateurs des coefficients (rationnels) de U^{-1} sont ceux qui divisent le déterminant de U.

4. Soit U une matrice carrée orthogonale (i.e. telle que ${}^tU.U = 1$) à coefficients dans un corps commutatif. Montrer que $\text{dét}(U) = +1$ ou -1.

5. Trouver le nombre d'inversions de la permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n & n+1 & n+2 & & \ldots & 2n \\ 1 & 3 & 5 & \ldots & 2n-1 & 2 & 4 & 6 & \ldots & 2n \end{pmatrix}.$$

6. De toutes les permutations des entiers $1, 2, \ldots, n$, quelle est celle dont le nombre d'inversions est maximum?

7. Montrer que pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant \binom{n}{2}$ il existe une permutation des entiers $1, 2, \ldots, n$ dont le nombre d'inversions est k.

8. On considère un déterminant d'ordre 6, dont on désigne les termes par a_{ij} $(1 \leqslant i, j \leqslant 6)$. Quel est le signe dont on doit faire précéder le produit

$$a_{61}a_{23}a_{45}a_{36}a_{12}a_{54}$$

dans le développement de ce déterminant?

¶ 9. Dans le groupe $\mathfrak{S}_n$ des permutations de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ on désigne par $\mathfrak{A}_n$ l'ensemble des permutations paires.

a) Montrer que $\mathfrak{A}_n$ est un sous-groupe invariant de $\mathfrak{S}_n$ (**groupe alterné** de n objets) et que le groupe quotient $\mathfrak{S}_n/\mathfrak{A}_n$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

b) Pour $3 \leqslant i \leqslant n$ (on suppose $n \geqslant 3$) on désigne par s_i la permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & i-1 & i & i+1 & \ldots & n \\ i & 1 & 3 & \ldots & i-1 & 2 & i+1 & \ldots & n \end{pmatrix};$$

montrer que les s_i engendrent $\mathfrak{A}_n$.

c) Montrer que, pour $n \geqslant 5$, les seuls sous-groupes invariants de $\mathfrak{A}_n$ sont $\mathfrak{A}_n$ lui-même et le sous-groupe réduit à l'identité (ce qu'on exprime en disant que $\mathfrak{A}_n$ est un groupe **simple** pour $n \geqslant 5$). Quels sont les sous-groupes invariants de $\mathfrak{A}_n$ pour $n = 2, 3$ ou 4?

d) Montrer que, pour $n \neq 4$, le seul sous-groupe invariant non trivial de $\mathfrak{S}_n$ est $\mathfrak{A}_n$.

¶ **10.** Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée inversible d'ordre n à coefficients dans un corps commutatif K. On cherche des matrices X et Y (carrées d'ordre n) à coefficients dans K, vérifiant la relation

$$A = X.Y,$$

et de la forme

$$X = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ * & * & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ * & * & * & \ldots & * \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} * & * & * & \ldots & * \\ 0 & * & * & \ldots & * \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & * \end{pmatrix}$$

(où les signes $*$ désignent des éléments arbitraires de K). Montrer que, pour que X et Y existent, il faut et il suffit qu'on ait

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1p} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{p1} & \ldots & a_{pp} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \text{pour} \qquad 1 \leqslant p \leqslant n-1.$$

Dans ce cas, on peut imposer aux coefficients diagonaux de X (ou de Y) d'être tous égaux à 1, et cette condition détermine entièrement X et Y.

11. Soit K un anneau commutatif. On appelle dérivation de K toute application D de K dans K telle que l'on ait

$$D(x+y) = D(x) + D(y), \qquad D(xy) = D(x).y + x.D(y)$$

quels que soient $x, y \in K$ (cf. § 30, nº 1).

Soient D une dérivation de K et $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans K. Pour chaque entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$, on note A_i la matrice obtenue en appliquant D aux termes situés sur la i^e colonne de A. Montrer que

$$D(\text{dét}(A)) = \text{dét}(A_1) + \cdots + \text{dét}(A_n)$$

(formule de dérivation des déterminants).

¶¶ **12.** Soient M un module sur un anneau commutatif, f une forme p-linéaire alternée sur M, et g une forme q-linéaire alternée sur M. On définit une application

$$h : M^{p+q} \to K$$

§ 23

1. Soit K un anneau commutatif. Montrer que les matrices $U \in M_n(K)$ telles que

$$\text{dét}(U) = 1$$

forment un sous-groupe de $GL(n, K)$ — on le désigne généralement par la notation $SL(n, K)$ et on l'appelle le **groupe spécial linéaire à n variables** sur l'anneau K.

2. Le déterminant d'une matrice nilpotente à coefficients dans un corps commutatif est nul.

3. Soit U une matrice carrée à coefficients entiers, de déterminant non nul. Montrer que les seuls nombres premiers p qui figurent dans les dénominateurs des coefficients (rationnels) de U^{-1} sont ceux qui divisent le déterminant de U.

4. Soit U une matrice carrée orthogonale (i.e. telle que ${}^tU.U = 1$) à coefficients dans un corps commutatif. Montrer que $\text{dét}(U) = +1$ ou -1.

5. Trouver le nombre d'inversions de la permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 & n+2 & & \dots & 2n \\ 1 & 3 & 5 & \dots & 2n-1 & 2 & 4 & 6 & \dots & 2n \end{pmatrix}.$$

6. De toutes les permutations des entiers $1, 2, \dots, n$, quelle est celle dont le nombre d'inversions est maximum ?

7. Montrer que pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant \binom{n}{2}$ il existe une permutation des entiers $1, 2, \dots, n$ dont le nombre d'inversions est k.

8. On considère un déterminant d'ordre 6, dont on désigne les termes par a_{ij} $(1 \leqslant i, j \leqslant 6)$. Quel est le signe dont on doit faire précéder le produit

$$a_{61}a_{23}a_{45}a_{36}a_{12}a_{54}$$

dans le développement de ce déterminant ?

¶ **9.** Dans le groupe $\mathfrak{S}_n$ des permutations de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ on désigne par $\mathfrak{A}_n$ l'ensemble des permutations paires.

a) Montrer que $\mathfrak{A}_n$ est un sous-groupe invariant de $\mathfrak{S}_n$ (**groupe alterné** de n objets) et que le groupe quotient $\mathfrak{S}_n/\mathfrak{A}_n$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

b) Pour $3 \leqslant i \leqslant n$ (on suppose $n \geqslant 3$) on désigne par s_i la permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & n \\ i & 1 & 3 & \dots & i-1 & 2 & i+1 & \dots & n \end{pmatrix};$$

montrer que les s_i engendrent $\mathfrak{A}_n$.

c) Montrer que, pour $n \geqslant 5$, les seuls sous-groupes invariants de $\mathfrak{A}_n$ sont $\mathfrak{A}_n$ lui-même et le sous-groupe réduit à l'identité (ce qu'on exprime en disant que $\mathfrak{A}_n$ est un groupe **simple** pour $n \geqslant 5$). Quels sont les sous-groupes invariants de $\mathfrak{A}_n$ pour $n = 2, 3$ ou 4 ?

d) Montrer que, pour $n \neq 4$, le seul sous-groupe invariant non trivial de $\mathfrak{S}_n$ est $\mathfrak{A}_n$.

¶ **10.** Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée inversible d'ordre n à coefficients dans un corps commutatif K. On cherche des matrices X et Y (carrées d'ordre n) à coefficients dans K, vérifiant la relation

$$A = X.Y,$$

et de la forme

$$X = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & * & \dots & * \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} * & * & * & \dots & * \\ 0 & * & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & * \end{pmatrix}$$

(où les signes $*$ désignent des éléments arbitraires de K). Montrer que, pour que X et Y existent, il faut et il suffit qu'on ait

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & \dots & a_{pp} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \text{pour} \qquad 1 \leqslant p \leqslant n-1.$$

Dans ce cas, on peut imposer aux coefficients diagonaux de X (ou de Y) d'être tous égaux à 1, et cette condition détermine entièrement X et Y.

11. Soit K un anneau commutatif. On appelle dérivation de K toute application D de K dans K telle que l'on ait

$$D(x+y) = D(x) + D(y), \qquad D(xy) = D(x).y + x.D(y)$$

quels que soient $x, y \in K$ (cf. § 30, nº 1).
Soient D une dérivation de K et $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i, j \leqslant n}$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans K. Pour chaque entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$, on note A_i la matrice obtenue en appliquant D aux termes situés sur la i^{e} colonne de A. Montrer que

$$D(\text{dét}(A)) = \text{dét}(A_1) + \dots + \text{dét}(A_n)$$

(formule de dérivation des déterminants).

¶¶ **12.** Soient M un module sur un anneau commutatif, f une forme p-linéaire alternée sur M, et g une forme q-linéaire alternée sur M. On définit une application

$$h : M^{p+q} \to K$$

(où K est l'anneau de base) en posant

$$(*)\qquad h(x_1, \ldots, x_{p+q}) = \sum_{\substack{s\in\mathfrak{S}_{p+q}\\ s(1)<\cdots<s(p)\\ s(p+1)<\cdots<s(p+q)}} \mathfrak{p}(s)\,.\,f(x_{s(1)}, \ldots, x_{s(p)})\,.\,g(x_{s(p+1)}, \ldots, x_{s(p+q)})$$

où la sommation est étendue à toutes les permutations s des entiers $1, \ldots, p+q$ qui respectent l'ordre des p premiers, ainsi que des q derniers, de ces entiers.

a) Montrer que h est une forme $(p+q)$-linéaire alternée sur M. On l'appelle le **produit extérieur** des formes f et g, et on la désigne par la notation

$$h = f \wedge g.$$

b) Montrer que

$$g \wedge f = (-1)^{pq} f \wedge g.$$

c) Montrer que, si f, g, h sont trois formes multilinéaires alternées sur M, on a

$$f \wedge (g \wedge h) = (f \wedge g) \wedge h$$

(« associativité » du produit extérieur).

d) Soient $u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q$ des formes linéaires sur M. Dans la formule $(*)$ on prend

$$f = u_1 \wedge \cdots \wedge u_p, \qquad g = v_1 \wedge \cdots \wedge v_q$$

(cf. § 23, nº 3, *Exemple* 2). Montrer qu'alors

$$h = u_1 \wedge \cdots \wedge u_p \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_q.$$

13. (Généralisation du théorème de multiplication des déterminants.) Soit

$$A = (a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant p,\ 1\leqslant j\leqslant q}$$

une matrice rectangulaire à coefficients dans un anneau commutatif K; on choisit un entier r tel que $1 \leqslant r \leqslant p$ et $1 \leqslant r \leqslant q$.
Étant données une partie I à r éléments de l'ensemble $\{1, \ldots, p\}$ et une partie J à r éléments de l'ensemble $\{1, \ldots, q\}$, on désigne par a_{IJ} la matrice carrée d'ordre r formée avec les a_{ij} tels que $i \in I$ et $j \in J$; enfin, on désigne par

$$\Lambda^r(A)$$

la matrice

$$(\det(a_{IJ}))_{I\subset\{1,\ldots,p\},\ J\subset\{1,\ldots,q\},\ \mathrm{Card}(I)=\mathrm{Card}(J)=r};$$

on peut par exemple ordonner lexicographiquement les parties I à r éléments de $\{1, \ldots, p\}$ en convenant qu'une partie

$$\{i_1, \ldots, i_r\} \qquad \text{avec} \qquad i_1 < \cdots < i_r$$

précède une partie

$$\{j_1, \ldots, j_r\} \qquad \text{avec} \qquad j_1 < \cdots < j_r$$

s'il existe un entier h $(1 \leqslant h \leqslant r)$ tel que l'on ait

$$i_1 = j_1,\ \ldots,\ i_{h-1} = j_{h-1},\ i_h < j_h$$

(cf. la méthode de numérotation des mots figurant dans un dictionnaire...) Les scalaires $\det(a_{IJ})$ s'appellent les **mineurs d'ordre** r de la matrice A.
Cela dit, montrer que si A et B sont deux matrices à coefficients dans K, telles que le produit AB ait un sens, on a

$$\Lambda^r(AB) = \Lambda^r(A)\,.\,\Lambda^r(B).$$

¶ **14.** Soient A et B deux matrices à p lignes et q colonnes à coefficients dans un anneau commutatif K. On dit que A et B sont **équivalentes** (sur l'anneau de base K) s'il existe des matrices

$$U \in GL(p, K), \qquad V \in GL(q, K)$$

telles que $B = UAV$.
S'il en est ainsi, montrer que pour tout $r \leqslant p, q$ l'idéal de K engendré par les mineurs d'ordre r de A est égal à l'idéal engendré par les mineurs d'ordre r de B.
[NB — La réciproque est vraie si K est *principal*; cf. § 31, *Exercice* 11, (*e*).]

¶ **15.** Soient K un anneau commutatif et $A \in M_p(K)$, $B \in M_q(K)$; on considère [§ 21, *Exercice* 4, *f*)] la matrice $A \otimes B \in M_{pq}(K)$. Montrer qu'on a

$$\det(A \otimes B) = \det(A)^q\,.\det(B)^p.$$

¶¶ **16.** Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans un anneau commutatif K. On considère, pour $1 \leqslant r \leqslant n$, la matrice $\Lambda^r(A)$ de l'*Exercice* 14. Montrer que

$$\det(\Lambda^r(A)) = \det(A)^{\binom{n-1}{r-1}}.$$

¶¶ **17.** Soient M un module libre de type fini sur un anneau commutatif, et u un automorphisme de M. Calculer le déterminant de l'automorphisme $T^p_q(u)$ de $T^p_q(M)$ (§ 21, *Exercice* 1) en fonction de celui de u.

¶ **18.** Soit A une matrice carrée d'ordre *impair* à coefficients dans un anneau commutatif K. On suppose A *antisymétrique*, i.e. que ${}^tA = -A$. Montrer que $\det(A) = 0$. (Utiliser l'*Exercice* 17 du § 22).