Déterminants.

Comme on l'a dit dans l'introduction aux §§ 18, 19 et 20, la théorie des déterminants a notamment pour but de fournir des critères *explicites* d'indépendance linéaire, et des formules *explicites* de résolution des systèmes d'équations linéaires.

Au lieu de la méthode traditionnelle qui consiste à définir un déterminant à l'aide de la formule du § 23, nº 5 et à en déduire ensuite les propriétés des déterminants, nous avons adopté, pour exposer la théorie des déterminants, la méthode « géométrique » fondée sur la théorie des formes multilinéaires alternées consistant, au contraire, à retrouver la règle de calcul des déterminants à partir des propriétés fondamentales de ceux-ci. Cette méthode était déjà enseignée par Kronecker il y a quatre-vingts ans, et se répand de plus en plus depuis une quinzaine d'années.

Alors que la théorie des modules développée au Chapitre III était valable sur un anneau de base K quelconque, celle des déterminants suppose K *commutatif.* Quelques-uns de ses résultats supposent même que K est un *corps* commutatif, mais nous n'avons fait cette hypothèse que lorsqu'elle était indispensable. Dans la plupart des cas, on n'a besoin que de calculs mécaniques pour établir les formules qu'on a en vue, et il est alors aussi simple (et plus utile) de les établir pour un anneau commutatif quelconque que pour un corps, ou même que pour le corps des nombres réels.

Le lecteur débutant qui trouvera trop difficiles les calculs du § 23 pourra passer d'abord au § 24 (en admettant le Théorème 1) et s'entraîner, à l'aide des *Exercices,* à calculer des déterminants. Il pourra revenir alors au § 23.

§ 21. Fonctions multilinéaires

1. *Définition des applications multilinéaires*

Soient X, Y et M des modules sur un anneau commutatif K. On dit qu'une application

$$f : X \times Y \to M$$

est **bilinéaire** si $f(x, b)$ est fonction linéaire de $x \in X$ pour tout $b \in Y$, et si $f(a, y)$ est fonction linéaire de $y \in Y$ pour tout $a \in X$; cela signifie donc qu'on a les identités

$$(1) \qquad \begin{array}{ll} f(x' + x'', y) = f(x', y) + f(x'', y), & f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y) \\ f(x, y' + y'') = f(x, y') + f(x, y''), & f(x, \lambda y) = \lambda f(x, y). \end{array}$$

Soient maintenant X, Y, Z et M des K-modules; on dit qu'une application

$$f : X \times Y \times Z \to M$$

est **trilinéaire** si $f(x, b, c)$ est fonction linéaire de $x \in X$ pour $b \in Y$ et $c \in Z$ donnés, si $f(a, y, c)$ est fonction linéaire de $y \in Y$ pour $a \in X$ et $c \in Z$ donnés, et si $f(a, b, z)$ est fonction linéaire de $z \in Z$ pour $a \in X$ et $b \in Y$ donnés.

Plus généralement, soient $X_1, \ldots, X_p$ et M des K-modules; on dit qu'une application de la forme

$$f : X_1 \times \cdots \times X_p \to M$$

est **multilinéaire** (et, plus précisément, p-**linéaire**) si, pour tout indice i tel que $1 \leqslant i \leqslant p$ et quels que soient les vecteurs

$$a_1 \in X_1, \ \ldots, \ a_{i-1} \in X_{i-1}, \qquad a_{i+1} \in X_{i+1}, \ \ldots, \ a_p \in X_p,$$

l'application

$$(2) \qquad x \mapsto f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_p)$$

de X_i dans M est linéaire. Autrement dit, f est multilinéaire si, en donnant à $p - 1$ des variables des valeurs fixes, on obtient une fonction linéaire de la variable non fixée. On pourrait exprimer cette condition par des formules généralisant (1), à savoir

$$(3)\quad f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i' + x_i'', x_{i+1}, \ldots, x_p) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i', x_{i+1}, \ldots, x_p) + f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i'', x_{i+1}, \ldots, x_p)$$

$$(4)\quad f(x_1, \ldots, x_{i-1}, \lambda x_i, x_{i+1}, \ldots, x_p) = \lambda . f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_p).$$

On désigne généralement l'ensemble de toutes les applications multilinéaires de $X_1 \times \cdots \times X_p$ dans M par la notation

$$\mathfrak{L}(X_1, \ldots, X_p; M).$$

C'est un *sous-module* du module (§ 10, *Exemple* 4) de toutes les applications (multilinéaires ou non) de l'ensemble $X = X_1 \times \cdots \times X_p$ dans M; autrement dit, si f et g sont multilinéaires, il en est de même de $\lambda f + \mu g$ quels que soient les scalaires λ et μ. Ce résultat (qui provient immédiatement du fait qu'une combinaison linéaire d'applications linéaires, par exemple d'applications de la forme (2), est encore une application linéaire) permet de considérer l'ensemble $\mathfrak{L}(X_1, \ldots, X_p; M)$ comme un *module sur l'anneau* K.

Donnons maintenant quelques exemples importants.

Exemple 1. Prenons $X_1 = \cdots = X_p = M = K$ et posons

$$f(x_1, \ldots, x_p) = x_1 \ldots x_p;$$

alors f est multilinéaire en vertu des axiomes des anneaux commutatifs. On notera du reste l'analogie de la relation (1) ou (3) avec celle qui exprime la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

Exemple 2. Soient X, Y deux K-modules; on appelle **forme bilinéaire sur** $X \times Y$ toute application bilinéaire de $X \times Y$ dans l'anneau de base K. Considérons par exemple une forme linéaire u sur X et une forme linéaire v sur Y; alors

$$f(x, y) = u(x)v(y)$$

est une forme bilinéaire sur $X \times Y$, car, si l'on donne par exemple à y une valeur fixe b, on obtient l'expression $u(x)v(b)$ qui est proportionnelle à $u(x)$, et est donc fonction linéaire de x.

Plus généralement, si $X_1, \ldots, X_p$ sont des modules sur l'anneau K, on appelle **forme multilinéaire sur** $X_1 \times \cdots \times X_p$ toute application multilinéaire de $X_1 \times \cdots \times X_p$ dans K. Si l'on choisit une forme linéaire u_i sur X_i pour tout i, et si l'on pose

$$f(x_1, \ldots, x_p) = u_1(x_1) \ldots u_p(x_p),$$

on obtient une forme multilinéaire sur $X_1 \times \cdots \times X_p$. On l'appelle le **produit tensoriel des formes linéaires** $u_1, \ldots, u_p$ et on la désigne généralement par la notation

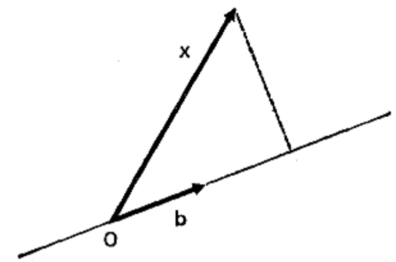
$$f = u_1 \otimes \cdots \otimes u_p.$$

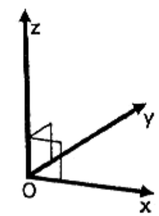
On montrera plus loin (Théorème 3) que si $X_1, \ldots, X_p$ sont des K-modules libres de type fini, alors *toute* forme multilinéaire sur $X_1 \times \cdots \times X_p$ est une somme de produits tensoriels de formes linéaires.

Exemple 3. Prenons $K = \mathbf{R}$ et désignons par E l'espace vectoriel formé par les vecteurs d'origine donnée O dans l'espace usuel à trois dimensions. Supposant choisie une unité de longueur, on peut définir le **produit scalaire de deux vecteurs** x et y : c'est le *nombre* produit des longueurs de x et y et du cosinus de l'angle amenant x sur y. On désigne ce produit scalaire par l'une ou l'autre des notations suivantes :

$$x . y, \qquad (x, y), \qquad (x \mid y);$$

nous utiliserons exclusivement la troisième (la seconde est exclue puisqu'elle désigne déjà le couple formé par x et y). Ceci dit, l'expression $(x \mid y)$ est une





forme bilinéaire sur $E \times E$; pour montrer par exemple que $(x \mid b)$ est fonction linéaire de x, on observe que ce nombre est proportionnel à la mesure orientée de la projection orthogonale du vecteur x sur la droite portant le vecteur b; or l'opération consistant à projeter sur une droite fixe est linéaire (*).

Exemple 4. K et E étant comme dans l'*Exemple* précédent, considérons le **produit vectoriel de deux vecteurs** x **et** y : c'est le *vecteur* z qui a pour longueur le produit des longueurs de x et y et du sinus de leur angle, autrement dit l'aire du parallélogramme de côtés x et y, qui est orthogonal au plan défini par x et y, et qui est orienté de telle sorte que le trièdre xyz soit direct, i.e. conforme aux injonctions d'Ampère et de Maxwell (la notion de trièdre direct n'a pas de sens *mathématique*; la seule notion correcte est celle de deux trièdres

(*) On laisse au lecteur le soin de développer en détail les considérations de géométrie élémentaire qui sont à la base de cet Exemple et du suivant.

de même orientation, qu'on peut définir à l'aide de la théorie des déterminants comme on le verra au § 23, *Remarque* 4). On le note

$$x \times y \qquad \text{ou} \qquad x \wedge y;$$

nous utiliserons uniquement la seconde notation. Cela dit, il est facile de voir (et le lecteur devra montrer à titre d'exercice) que l'application

$$(x, y) \mapsto x \wedge y$$

de $E \times E$ dans E est bilinéaire.

On notera les formules de commutation suivantes :

$$(x|y) = (y|x); \qquad x \wedge y = -y \wedge x.$$

Exemple 5. K et E restant comme ci-dessus, on appelle **produit mixte de trois vecteurs** x, y, z le nombre

$$(x|y|z) = (x|y \wedge z),$$

produit scalaire de x et du produit vectoriel de y et z. C'est une fonction trilinéaire de x, y, z. En valeur absolue, $(x|y|z)$ est égal au volume du parallélépipède construit sur les vecteurs x, y, z, et le signe de $(x|y|z)$ est positif si le trièdre x, y, z est direct, négatif s'il est rétrograde. Il s'ensuit donc que l'on a les relations

$$(x|y|z) = (y|z|x) = (z|x|y) = -(x|z|y) = -(y|x|z) = -(z|y|x).$$

¶ *Exemple* 6. Soient K un anneau commutatif quelconque, X un K-module, et X^* le module dual (§ 16, n° 1). Étant donnés des entiers $p, q \geqslant 0$, on appelle **tenseur p fois covariant et q fois contravariant**, ou encore **tenseur d'espèce** $\binom{p}{q}$, toute application $(p+q)$-linéaire de

$$(X^*)^p \times X^q = \underbrace{X^* \times \cdots \times X^*}_{p} \times \underbrace{X \times \cdots \times X}_{q}$$

dans l'anneau de base K. C'est donc une fonction $f(u_1, \ldots, u_p, x_1, \ldots, x_q)$ à valeurs dans K, définie lorsque $u_1, \ldots, u_p$ sont des formes linéaires sur X et $x_1, \ldots, x_q$ des vecteurs de X, et qui dépend linéairement de chacune des variables $u_1, \ldots, x_q$. En particulier, on appelle **forme q-linéaire sur X** tout tenseur d'espèce $\binom{0}{q}$, i.e. toute application multilinéaire de X^q dans K.

Parmi les tenseurs sur X figurent les formes linéaires sur X : ce sont les tenseurs d'espèce $\binom{0}{1}$. D'autre part, chaque vecteur x de X définit aussi un tenseur sur X, d'espèce $\binom{1}{0}$, i.e. une forme linéaire sur X^*, à savoir la forme linéaire $u \to u(x)$ déjà utilisée au § 16, n° 3 pour plonger un module dans son bidual. Lorsque X est libre de type fini, la correspondance entre éléments de X et tenseurs d'espèce $\binom{1}{0}$ est bijective (§ 16, Théorème 2), ce qui permet d'identifier ces deux notions; c'est ce qu'on fait en Physique notamment.

La plupart des physiciens donnent des tenseurs (dans le cas des espaces vectoriels de petite dimension sur **R**) une définition nettement plus compliquée que la précédente, et qu'on trouvera plus loin (n° 5, *Remarque* 3). En outre, en Physique, on s'intéresse exclusivement aux **champs de tenseurs;** on appelle ainsi toute application de l'espace vectoriel X considéré dans l'ensemble des tenseurs d'espèce donnée sur X — autrement dit, toute fonction sur X dont la valeur en chaque point de X est un tenseur d'espèce donnée sur X. L'utilisation des tenseurs en Physique a été pendant longtemps rendue difficilement compréhensible par le fait qu'on ne distinguait pas entre un tenseur (au sens donné ici à ce mot) et une fonction dont les valeurs sont des tenseurs; on obtenait ainsi une situation analogue à celle qui consisterait à parler de fonctions à valeurs vectorielles sans avoir d'abord défini ce qu'est un vecteur... Il faut préciser, à la décharge des physiciens, que la notion de forme linéaire sur un espace vectoriel (sans laquelle il est pratiquement impossible de donner une définition simple des tenseurs) ne s'est vraiment répandue en Mathématiques qu'à partir de 1930 environ.

2. *Produit tensoriel d'applications multilinéaires*

Soient

$$f : X_1 \times \cdots \times X_p \to K, \qquad g : Y_1 \times \cdots \times Y_q \to K$$

des formes multilinéaires. On appelle **produit tensoriel de f et g** l'application

$$f \otimes g : X_1 \times \cdots \times X_p \times Y_1 \times \cdots \times Y_q \to K$$

donnée par

$$f \otimes g(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q) = f(x_1, \ldots, x_p) g(y_1, \ldots, y_q); \tag{5}$$

c'est encore une application *multilinéaire*, car si l'on donne par exemple à $x_2, \ldots, y_q$ des valeurs fixes $a_2, \ldots, b_q$, il reste l'expression

$$f(x_1, a_2, \ldots, a_p) g(b_1, \ldots, b_q)$$

proportionnelle, comme fonction de x_1, à $f(x_1, a_2, \ldots, a_p)$, donc fonction linéaire de x_1 comme cette dernière.

Si l'on a trois formes multilinéaires f, g, h on a la relation d'associativité

$$(f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h),$$

et du reste la valeur commune des deux membres est la fonction

$$f(x_1, \ldots, x_p) g(y_1, \ldots, y_q) h(z_1, \ldots, z_r)$$

comme on le voit aussitôt.

Ceci permet de définir des produits tensoriels d'un nombre quelconque de formes multilinéaires, et de généraliser la notion introduite dans l'*Exemple* 2 ci-dessus pour les formes linéaires.

On notera que la formule

$$f \otimes g = g \otimes f,$$

même lorsque les deux membres sont de même espèce, est *fausse*. Si par exemple f et g

sont des formes linéaires sur un module X, on a

$$f \otimes g(x, y) = f(x)g(y)$$
$$g \otimes f(x, y) = f(y)g(x),$$

et ces expressions n'ont aucune raison d'être identiques.

¶ *Exemple* 7. Considérons, sur un module X, un tenseur f d'espèce $\binom{p}{q}$ et un tenseur g d'espèce $\binom{r}{s}$; alors $f \otimes g$ est une forme multilinéaire sur le produit cartésien

$$(X^*)^p \times X^q \times (X^*)^r \times X^s;$$

on identifie en général celui-ci à

$$(X^*)^{p+r} \times X^{q+s},$$

ce qui permet de considérer $f \otimes g$ comme un tenseur d'espèce $\binom{p+r}{q+s}$ sur X, donné par

$$f \otimes g(u_1, \ldots, u_{p+r}, x_1, \ldots, x_{q+s})$$
$$= f(u_1, \ldots, u_p, x_1, \ldots, x_q)\, g(u_{p+1}, \ldots, u_{p+r}, x_{q+1}, \ldots, x_{q+s})$$

quels que soient les $u_i \in X^*$ et les $x_j \in X$. On dit que $f \otimes g$ est le **produit tensoriel des tenseurs** f **et** g.

Considérons par exemple deux vecteurs a, $b \in X$ et trois formes linéaires f, g, $h \in X^*$; identifiant a et b à des tenseurs (*Exemple* 6) on peut définir le tenseur $a \otimes b \otimes f \otimes g \otimes h = \varphi$; il est deux fois covariant et trois contravariant, i.e. c'est une fonction multilinéaire de deux formes linéaires u, $v \in X^*$ et de trois vecteurs x, y, $z \in X$; on vérifie facilement qu'on a en fait

$$\varphi(u, v, x, y, z) = u(a)v(b)f(x)g(y)h(z).$$

Remarque 1. Dans la formule (5) définissant $f \otimes g$, il est essentiel, si l'on veut obtenir une fonction multilinéaire, que les variables y_j soient indépendantes des variables x_i. Par exemple, si f et g sont deux formes linéaires sur un module L, l'expression $f(x)g(y)$ est une forme bilinéaire sur L × L, mais la fonction $f(x)g(x)$ n'est pas, en général, une forme linéaire sur L.

3. *Quelques identités algébriques*

Lorsqu'on effectue des calculs algébriques dans un anneau, on a souvent à calculer un produit dont chaque terme est une somme d'autres termes, et à le « développer » à l'aide de la règle suivante : pour multiplier des sommes les unes par les autres, on choisit arbitrairement un terme dans chaque somme, on multiplie les termes choisis les uns par les autres, et on ajoute les résultats ainsi obtenus. Cette règle peut se traduire par des formules; par exemple si $(x_i)_{i \in I}$ et $(y_j)_{j \in J}$ sont deux familles finies d'éléments d'un anneau K, on a

(6) $$\sum_{i \in I} x_i \cdot \sum_{j \in J} y_j = \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} x_i y_j;$$

si l'on a trois familles finies $(x_i)_{i \in I}$, $(y_j)_{j \in J}$ et $(z_k)_{k \in K}$ d'éléments d'un anneau, on a la relation

(7) $$\sum_{i \in I} x_i \cdot \sum_{j \in J} y_j \cdot \sum_{k \in K} z_k = \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J \\ k \in K}} x_i y_j z_k;$$

plus généralement encore, supposons données p familles finies d'éléments d'un anneau, familles que nous noterons $(x_{1i_1})_{i_1 \in I_1}, \ldots, (x_{pi_p})_{i_p \in I_p}$; alors on a

(8) $$\sum_{i_1 \in I_1} x_{1i_1} \ldots \sum_{i_p \in I_p} x_{pi_p} = \sum_{i_1 \in I_1, \ldots, i_p \in I_p} x_{1i_1} \ldots x_{pi_p}.$$

Remarque 2. Dans la formule (6) il arrive fréquemment que I = J et qu'on désigne les familles données par $(x_i)_{i \in I}$ et $(y_i)_{i \in I}$; on fera attention dans ce cas à *ne pas* écrire la relation (6) sous la forme

$$\sum_{i \in I} x_i \cdot \sum_{i \in I} y_i = \sum_{i \in I} x_i y_i$$

car cette relation est évidemment fausse — par exemple, il serait déraisonnable de croire qu'on a toujours

$$(x' + x'')(y' + y'') = x'y' + x''y''\ldots$$

La seule méthode sûre pour éviter des erreurs de ce genre est de ne jamais désigner par la même lettre des indices de sommation figurant dans deux sommes distinctes. On fera bien aussi de garder présent à l'esprit le fait qu'un indice de sommation ne figure pas effectivement dans le résultat de la sommation, et ne joue que le rôle d'une abréviation destinée à désigner une opération à effectuer; on peut donc toujours le remplacer par toute autre lettre non encore utilisée. Si par exemple on a des éléments $x_1, \ldots, x_n$ d'un groupe additif, les expressions

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i, \qquad \sum_{1 \leqslant h \leqslant n} x_h, \qquad \sum_{1 \leqslant \lambda \leqslant n} x_\lambda$$

sont identiques.

On peut démontrer pour les applications multilinéaires des formules analogues à (6), (7) et (8), la raison en étant que les identités de « distributivité de la multiplication par rapport à l'addition » qui impliquent (6), (7) et (8) sont encore vérifiées, par définition, dans le cas des applications multilinéaires.

Considérons par exemple des modules X, Y, M sur un anneau commutatif K, et une application bilinéaire f de X × Y dans M. Étant données une famille finie $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de X, et une famille finie $(y_j)_{j \in J}$ d'éléments de Y, on a alors la relation

(6 *bis*) $$f\left(\sum_{i \in I} x_i, \sum_{j \in J} y_j\right) = \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} f(x_i, y_j).$$

Pour le voir, posons

$$a = \sum_{i\in I} x_i \qquad \text{et} \qquad f_a(y) = f(a, y);$$

comme f est bilinéaire, f_a est une application linéaire de Y dans M, et par suite

$$f\Big(a, \sum_{j\in J} y_j\Big) = f_a\Big(\sum_{j\in J} y_j\Big) = \sum_{j\in J} f_a(y_j) = \sum_{j\in J} f(a, y_j);$$

mais en posant $f_j(x) = f(x, y_j)$ on obtient, pour la même raison, une application linéaire de X dans M, en sorte que

$$f(a, y_j) = f_j(a) = f_j\Big(\sum_{i\in I} x_i\Big) = \sum_{i\in I} f_j(x_i) = \sum_{i\in I} f(x_i, y_j);$$

en portant ce résultat dans le précédent, on obtient évidemment (6 *bis*).

Soient de même X, Y, Z et M des K-modules, et f une application trilinéaire de $X \times Y \times Z$ dans M. Alors, si $(x_i)_{i\in I}$, $(y_j)_{j\in J}$ et $(z_k)_{k\in K}$ sont des familles finies d'éléments de X, Y et Z respectivement, on a la relation

$$f\Big(\sum_{i\in I} x_i, \sum_{j\in J} y_j, \sum_{k\in K} z_k\Big) = \sum_{\substack{i\in I\\ j\in J\\ k\in K}} f(x_i, y_j, z_k). \tag{7 bis}$$

Posons en effet

$$c = \sum z_k \qquad \text{et} \qquad f_c(x, y) = f(x, y, c);$$

il est clair que f_c est bilinéaire, et en appliquant (6 *bis*) à f_c on trouve donc que le premier membre de (7 *bis*) est égal à

$$\sum_{\substack{i\in I\\ j\in J}} f_c(x_i, y_j) = \sum_{\substack{i\in I\\ j\in J}} f\Big(x_i, y_j, \sum_{k\in K} z_k\Big);$$

mais l'application

$$f_{ij}(z) = f(x_i, y_j, z)$$

de Z dans M est linéaire, et comme le terme général de la somme qu'on vient d'écrire est la valeur de f_{ij} sur le vecteur $\sum z_k$ on voit que ce terme est égal à

$$\sum_{k\in K} f_{ij}(z_k) = \sum_{k\in K} f(x_i, y_j, z_k);$$

en définitive, le premier membre de (7 *bis*) est donc égal à

$$\sum_{\substack{i\in I\\ j\in J}} \sum_{k\in K} f(x_i, y_j, z_k) = \sum_{\substack{i\in I\\ j\in J\\ k\in K}} f(x_i, y_j, z_k),$$

ce qui prouve (7 *bis*).

Enfin, pour généraliser (8), on considère une application p-linéaire

$$f : X_1 \times \cdots \times X_p \to M$$

et l'on choisit dans chaque module X_h ($1 \leqslant h \leqslant p$) une famille finie de vecteurs, soit $(x_{hi_h})_{i_h \in I_h}$; on a alors l'identité

$$f\Big(\sum_{i_1\in I_1} x_{1i_1}, \ldots, \sum_{i_p\in I_p} x_{pi_p}\Big) = \sum_{\substack{i_1\in I_1\\ \cdots\\ i_p\in I_p}} f(x_{1i_1}, \ldots, x_{pi_p}). \tag{8 bis}$$

Cette identité se démontre par récurrence sur p ; posant

$$c = \sum_{i_p\in I_p} x_{pi_p} \qquad \text{et} \qquad f_c(x_1, \ldots, x_{p-1}) = f(x_1, \ldots, x_{p-1}, c)$$

on obtient une application $(p-1)$-linéaire f_c ; pour celle-ci la formule analogue à (8 *bis*) donne

$$f_c\Big(\sum_{i_1\in I_1} x_{1i_1}, \ldots, \sum_{i_{p-1}\in I_{p-1}} x_{p-1, i_{p-1}}\Big) = \sum_{\substack{i_1\in I_1\\ \cdots\\ i_{p-1}\in I_{p-1}}} f_c(x_{1i_1}, \ldots, x_{p-1, i_{p-1}})$$

$$= \sum_{\substack{i_1\in I_1\\ \cdots\\ i_{p-1}\in I_{p-1}}} f_{i_1\ldots i_{p-1}}\Big(\sum_{i_p\in I_p} x_{pi_p}\Big)$$

où l'on a posé

$$f_{i_1\ldots i_{p-1}}(x) = f(x_{1i_1}, \ldots, x_{p-1, i_{p-1}}, x) \quad \text{pour } x \in X_p;$$

or cette dernière expression est fonction linéaire de x, et on voit donc que le premier membre de (8 *bis*) est égal à

$$\sum_{\substack{i_1\in I_1\\ \cdots\\ i_{p-1}\in I_{p-1}}} \sum_{i_p\in I_p} f_{i_1\ldots i_{p-1}}(x_{pi_p}),$$

et comme

$$f_{i_1\ldots i_{p-1}}(x_{pi_p}) = f(x_{1i_1}, \ldots, x_{pi_p})$$

on obtient bien (8 *bis*).

On observera que dans ces formules l'anneau de base K n'est jamais intervenu, autrement dit on n'a utilisé que l'identité (3) du n° 1, et non pas l'identité (4). Pour faire intervenir celle-ci dans (8 *bis*), choisissons en outre des familles

$$(\lambda_{1i_1})_{i_1\in I_1}, \ \ldots, \ (\lambda_{pi_p})_{i_p\in I_p}$$

d'éléments de K, et dans (8 *bis*) remplaçons chaque vecteur x_{hi_h} par $\lambda_{hi_h}x_{hi_h}$; le terme général du second membre de (8 *bis*) est alors remplacé par

$$\lambda_{1i_1} \cdots \lambda_{pi_p} f(x_{1i_1}, \ldots, x_{pi_p})$$

en raison du fait qu'on a d'une manière générale

$$f(\xi_1 x_1, \ldots, \xi_p x_p) = \xi_1 \ldots \xi_p f(x_1, \ldots, x_p). \tag{9}$$

Ceci fait, on voit que (8 *bis*) conduit à la formule plus générale que voici :

$$f\Big(\sum_{i_1\in \mathrm{I}_1} \lambda_{1i_1} x_{1i_1}, \ldots, \sum_{i_p\in \mathrm{I}_p} \lambda_{pi_p} x_{pi_p}\Big) = \sum_{\substack{i_1\in \mathrm{I}_1 \\ \cdots \\ i_p\in \mathrm{I}_p}} \lambda_{1i_1} \ldots \lambda_{pi_p} f(x_{1i_1}, \ldots, x_{pi_p}) \tag{10}$$

qui permet de calculer les valeurs de f sur des combinaisons linéaires de vecteurs. Pour $p = 2$ cette formule s'écrit encore

$$f\Big(\sum_{i\in \mathrm{I}} \lambda_i x_i, \sum_{j\in \mathrm{J}} \mu_j y_j\Big) = \sum_{\substack{i\in \mathrm{I} \\ j\in \mathrm{J}}} \lambda_i \mu_j f(x_i, y_j), \tag{11}$$

et pour $p = 3$ on obtient

$$f\Big(\sum_{i\in \mathrm{I}} \lambda_i x_i, \sum_{j\in \mathrm{J}} \mu_j y_j, \sum_{k\in \mathrm{K}} \nu_k z_k\Big) = \sum_{\substack{i\in \mathrm{I} \\ j\in \mathrm{J} \\ k\in \mathrm{K}}} \lambda_i \mu_j \nu_k f(x_i, y_j, z_k). \tag{12}$$

4. *Cas des modules libres de type fini*

Les formules du n° précédent permettent de déterminer toutes les applications multilinéaires lorsque les modules de départ $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_p$ sont libres de type fini (par exemple lorsqu'il s'agit d'espaces vectoriels de dimension finie sur un corps, cas de loin le plus important dans la pratique).

Examinons d'abord le cas le plus simple, celui où $p = 2$:

THÉORÈME 1. *Soient* X, Y, *et* M *des modules sur un anneau commutatif* K. *Supposons que* X *et* Y *soient libres de type fini, et soient* $(a_i)_{1\leq i\leq m}$ *une base de* X, *et* $(b_j)_{1\leq j\leq n}$ *une base de* Y. *Pour qu'une application f de* X $\times$ Y *dans* M *soit bilinéaire, il faut et il suffit qu'il existe des* $c_{ij} \in$ M *tels que l'on ait*

$$f(x, y) = \sum_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}} \xi_i \eta_j c_{ij} \tag{13}$$

quels que soient les vecteurs

$$x = \sum_{1\leq i\leq m} \xi_i a_i \in \mathrm{X} \quad \textit{et} \quad y = \sum_{1\leq j\leq n} \eta_j b_j \in \mathrm{Y};$$

s'il en est ainsi on a nécessairement

$$c_{ij} = f(a_i, b_j). \tag{14}$$

La formule (11) montre que si f est bilinéaire on a nécessairement

$$f(x, y) = \sum \xi_i \eta_j f(a_i, b_j),$$

de sorte que f est bien donnée par une formule du type (13). Inversement supposons f donnée par (13); pour montrer que f est bilinéaire il suffit de montrer que le terme général $\xi_i \eta_j c_{ij}$ de la somme (13) est fonction bilinéaire de x et y; comme c_{ij} est indépendant de x et y, il suffit même de montrer que $\xi_i \eta_j$ est bilinéaire; or en désignant par u_i les fonctions coordonnées de X par rapport à la base (a_i), et par v_j celles de Y par rapport à la base (b_j), on a

$$\xi_i \eta_j = u_i(x) v_j(y),$$

ce qui montre bien (*Exemple* 2) que cette expression est une fonction bilinéaire de x et y.

Il reste à montrer que la relation (13), i.e.

$$f(x, y) = \sum u_i(x) v_j(y) c_{ij},$$

implique nécessairement $c_{ij} = f(a_i, b_j)$. Or on a

$$f(a_i, b_j) = \sum_{k,h} u_k(a_i) v_h(b_j) c_{kh}$$

et d'autre part

$$u_k(a_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq i, \\ 1 & \text{si } k = i, \end{cases} \qquad v_h(b_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } h \neq j, \\ 1 & \text{si } h = j, \end{cases}$$

(cf. par exemple § 16, n° 2, ou observer directement que

$$a_i = 0 . a_1 + \cdots + 0 . a_{i-1} + 1 . a_i + 0 . a_{i+1} + \cdots + 0 . a_m);$$

le seul terme éventuellement non nul de la somme définissant $f(a_i, b_j)$ est donc le terme pour lequel $k = i$ et $h = j$, lequel se réduit visiblement à c_{ij}, ce qui achève la démonstration du Théorème.

Les éléments c_{ij} de M s'appellent les **coefficients de** f par rapport aux bases (a_i) de X et (b_j) de Y; lorsque X = Y, on prend habituellement la même base (a_i) dans X et dans Y, et alors les $c_{ij} = f(a_i, a_j)$ s'appellent les coefficients de f par rapport à *la* base (a_i) de X.

Lorsque M = K, on écrit généralement (13) sous la forme

$$f(x, y) = \sum \gamma_{ij} \xi_i \eta_j, \qquad \text{où} \qquad \gamma_{ij} = f(a_i, b_j);$$

comme

$$\xi_i \eta_j = u_i \otimes v_j(x, y)$$

la formule précédente s'écrit encore, dans le module $\mathfrak{L}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}; \mathrm{K})$ des formes bilinéaires sur X $\times$ Y, sous la forme

$$f = \sum \gamma_{ij} . u_i \otimes v_j,$$

et comme cette décomposition de f est unique on en déduit que les mn formes $u_i \otimes v_j$ constituent une *base* de $\mathfrak{L}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}; \mathrm{K})$.

Exemple 8. Considérons la forme bilinéaire $(x|y)$ de l'*Exemple* 3. Étant donnée une base a_1, a_2, a_3 de E, on a donc

$$(x|y) = \sum(a_i|a_j) \,.\, \xi_i\eta_j.$$

Cette formule se simplifie lorsque la base a_1, a_2, a_3 est **orthonormale,** i.e. formée de vecteurs de longueur 1 et deux à deux orthogonaux, autrement dit lorsqu'on calcule en **coordonnées rectangulaires;** il est en effet clair que dans ce cas on a

$$(a_i|a_j) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq j, \\ 1 & \text{si} \quad i = j, \end{cases}$$

et par suite il reste

$$(x|y) = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3,$$

formule qui permet de calculer le produit scalaire de deux vecteurs en coordonnées rectangulaires.

Cette formule permet aussi de calculer, en coordonnées rectangulaires, la distance de deux points P et Q dans l'espace. C'est en effet la longueur du vecteur

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}};$$

si P a pour coordonnées (x, y, z) et Q pour coordonnées (x', y', z'), le vecteur PQ (ou, plus exactement, le vecteur d'origine O équipollent à PQ) a pour composantes $x' - x$, $y' - y$, $z' - z$; sa longueur, i.e. la racine carrée de son produit scalaire par lui-même, est donc

$$\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2},$$

et c'est l'expression cherchée de la distance des points P et Q en coordonnées *rectangulaires.*

Exemple 9. Dans l'*Exemple* précédent remplaçons le produit scalaire $(x|y)$ par le produit vectoriel $x \wedge y$ de l'*Exemple* 4. On a alors

$$x \wedge y = \sum \xi_i\eta_j a_i \wedge a_j;$$

or, quelle que soit la base choisie, on a les relations

$$a_i \wedge a_i = 0, \qquad a_i \wedge a_j = - a_j \wedge a_i;$$

il reste donc en fait la formule

$$x \wedge y = (\xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_2)a_2 \wedge a_3 + (\xi_3\eta_1 - \xi_1\eta_3)a_3 \wedge a_1 + (\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1)a_1 \wedge a_2;$$

si la base est orthonormale, on a en outre

$$a_2 \wedge a_3 = a_1, \qquad a_3 \wedge a_1 = a_2, \qquad a_1 \wedge a_2 = a_3,$$

et il reste la formule suivante, valable en coordonnées rectangulaires :

$$x \wedge y = (\xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_2)a_1 + (\xi_3\eta_1 - \xi_1\eta_3)a_2 + (\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1)a_3.$$

Ces formules, ainsi que celles de l'*Exemple* précédent, sont tout à fait fondamentales dans les applications pratiques (Géométrie analytique à trois dimensions, Mécanique, Physique, etc...), et reposent exclusivement sur la bilinéarité des produits scalaire et vectoriel.

On a un résultat analogue au Théorème 1 pour les applications trilinéaires :

THÉORÈME 2. *Soient* X, Y, Z *et* M *des modules sur un anneau commutatif* K. *Supposons que* X, Y *et* Z *soient libres de type fini, et soient* $(a_i)_{1 \leq i \leq m}$ *une base de* X, $(b_j)_{1 \leq j \leq n}$ *une base de* Y, *et* $(c_k)_{1 \leq k \leq p}$ *une base de* Z. *Pour qu'une application f de* X × Y × Z *dans* M *soit trilinéaire, il faut et il suffit qu'il existe des* $c_{ijk} \in$ M *tels que l'on ait*

$$f(x, y, z) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq p}} \xi_i\eta_j\zeta_k c_{ijk} \tag{15}$$

quels que soient les vecteurs

$$x = \sum \xi_i a_i \in \mathrm{X}, \qquad y = \sum \eta_j b_j \in \mathrm{Y}, \qquad z = \sum \zeta_k c_k \in \mathrm{Z};$$

s'il en est ainsi, on a nécessairement

$$c_{ijk} = f(a_i, b_j, c_k). \tag{16}$$

La formule (12) montre que si f est trilinéaire on a effectivement la relation (15) avec des c_{ijk} donnés par (16). Inversement, si f est donnée par une relation (15), il suffit, pour établir que f est trilinéaire, de montrer qu'il en est ainsi de la fonction $\xi_i\eta_j\zeta_k c_{ijk}$, ou même, puisque c_{ijk} est indépendant de x, y, z, de la fonction $\xi_i\eta_j\zeta_k$; or en introduisant les fonctions coordonnées u_i, v_j, w_k des modules X, Y, Z par rapport aux bases considérées, il est clair que

$$\xi_i\eta_j\zeta_k = u_i(x)v_j(y)w_k(z),$$

expression qui est bien une forme trilinéaire sur X × Y × Z, à savoir la forme

$$u_i \otimes v_j \otimes w_k.$$

Pour terminer la démonstration il reste à montrer que (15) implique (16); or de (15) résulte

$$f(a_i, b_j, c_k) = \sum_{\lambda, \mu, \nu} u_\lambda(a_i)v_\mu(b_j)w_\nu(c_k)c_{\lambda\mu\nu};$$

le seul terme éventuellement non nul du second membre est celui pour lequel on a $\lambda = i$, $\mu = j$ et $\nu = k$, et alors on a $u_\lambda(a_i) = v_\mu(b_j) = w_\nu(c_k) = 1$, d'où (16).

Les éléments c_{ijk} de M s'appellent, ici encore, les **coefficients de** f par rapport aux bases (a_i), (b_j) et (c_k) de X, Y et Z; lorsque X = Y = Z, on utilise généralement la même base (a_i) dans X, Y et Z, et on dit alors que les $c_{ijk} = f(a_i, a_j, a_k)$ sont les coefficients de f par rapport à *la* base (a_i) de X.

Lorsque M = K, on écrit habituellement (15) sous la forme

$$f(x, y, z) = \sum \gamma_{ijk}\xi_i\eta_j\zeta_k, \qquad \text{où} \qquad \gamma_{ijk} = f(a_i, b_j, c_k);$$

on a alors

$$f = \sum \gamma_{ijk}\, u_i \otimes v_j \otimes w_k$$

dans le module $\mathcal{L}(X, Y, Z; K)$ des formes trilinéaires sur $X \times Y \times Z$, et comme la décomposition précédente est unique on voit que les mnp formes $u_i \otimes v_j \otimes w_k$ constituent une *base* du module $\mathcal{L}(X, Y, Z; K)$.

Exemple 10. Considérons le produit mixte $(x|y|z)$ de l'*Exemple* 5; on a

$$(x|y|z) = \sum (a_i|a_j|a_k)\xi_i\eta_j\zeta_k;$$

mais on a $(a_i|a_j|a_k) = 0$ si les indices ne sont pas deux à deux distincts, et de plus

$$(a_1|a_2|a_3) = (a_2|a_3|a_1) = (a_3|a_1|a_2) = -(a_1|a_3|a_2) = -(a_2|a_1|a_3) = -(a_3|a_2|a_1);$$

par suite il reste

$$(x|y|z) = (a_1|a_2|a_3)\,.\,(\xi_1\eta_2\zeta_3 + \xi_2\eta_3\zeta_1 + \xi_3\eta_1\zeta_2 - \xi_1\eta_3\zeta_2 - \xi_2\eta_1\zeta_3 - \xi_3\eta_2\zeta_1).$$

Si la base a_1, a_2, a_3 est *orthonormale*, il reste

$$(x|y|z) = \xi_1\eta_2\zeta_3 + \xi_2\eta_3\zeta_1 + \xi_3\eta_1\zeta_2 - \xi_1\eta_3\zeta_2 - \xi_2\eta_1\zeta_3 - \xi_3\eta_2\zeta_1.$$

On désigne habituellement le second membre de cette relation par la notation condensée

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \end{vmatrix}.$$

On reviendra sur cette expression dans les § suivants.

¶ *Exemple* 11. Soit T un tenseur deux fois covariant et une fois contravariant sur un module X, i.e. une forme trilinéaire sur

$$X^* \times X^* \times X;$$

supposons que X possède une base $(a_1, \ldots, a_n)$, et désignons par la notation (*) $(a^1, \ldots, a^n)$ la base duale dans le module X^* (§ 16, n° 2) — autrement dit, les formes linéaires a^i ne sont autres que les fonctions coordonnées du module X par rapport à la base (a_i) considérée. Pour calculer $T(u, v, x)$ pour, $u, v \in X^*$ et $x \in X$, on pose

$$\begin{aligned} u &= \sum \alpha_i\,.\,a^i & &\text{d'où} & \alpha_i &= u(a_i),\\ v &= \sum \beta_i\,.\,a^i & &\text{d'où} & \beta_i &= v(a_i),\\ x &= \sum \xi^i\,.\,a_i, \end{aligned}$$

(*) Les indices supérieurs dans les formules qui suivent ne sont naturellement pas des exposants. Il est conforme aux traditions du Calcul Tensoriel de noter les composantes des *vecteurs* avec des indices *supérieurs*, celles des *formes linéaires* avec des indices *inférieurs*, et d'observer des conventions analogues pour les composantes des tenseurs de telle sorte qu'une simple inspection de la position des indices indique aussitôt l'espèce du tenseur considéré.

et alors il vient

$$T(u, v, x) = \sum T^{ij}_k \alpha_i \beta_j \xi^k$$

avec des constantes

$$T^{ij}_k = T(a^i, a^j, a_k)$$

qu'on appelle les coefficients (ou les **composantes**, ou les **coordonnées**) du tenseur T par rapport à la base (a_i) de X.

Pour terminer, il nous reste à étendre les Théorèmes 1 et 2 aux applications p-linéaires avec p quelconque :

THÉORÈME 3. *Soient* $X_1, \ldots, X_p$ *et* M *des modules sur un anneau commutatif* K. *Supposons* $X_1, \ldots, X_p$ *libres de type fini, et, pour tout indice h tel que* $1 \leqslant h \leqslant p$, *soit* $(a_{h1}, a_{h2}, \ldots, a_{hn})$ *une base de* X_h. *Pour qu'une application f de* $X_1 \times \cdots \times X_p$ *dans* M *soit multilinéaire, il faut et il suffit qu'il existe des constantes*

$$c_{i_1 \ldots i_p} \in M \quad (1 \leqslant i_1 \leqslant n_1, \ldots, 1 \leqslant i_p \leqslant n_p)$$

telles que l'on ait

$$f(x_1, \ldots, x_p) = \sum_{\substack{1 \leqslant i_1 \leqslant n_1 \\ \cdots\cdots \\ 1 \leqslant i_p \leqslant n_p}} \xi_{1i_1} \ldots \xi_{pi_p} c_{i_1 \ldots i_p} \tag{17}$$

quels que soient les vecteurs

$$x_h = \sum_{1 \leqslant i_h \leqslant n_h} \xi_{hi_h} a_{hi_h} \in X_h \quad (1 \leqslant h \leqslant p);$$

s'il en est ainsi on a nécessairement

$$c_{i_1 \ldots i_p} = f(a_{1i_1}, \ldots, a_{pi_p}). \tag{18}$$

La formule (17) lorsque f est multilinéaire résulte évidemment de la relation (10) du n° 3. Pour montrer qu'inversement (17) représente toujours une application multilinéaire, il suffit de montrer que la fonction

$$u_{i_1 \ldots i_p}(x_1, \ldots, x_p) = \xi_{1i_1} \ldots \xi_{pi_p}$$

est toujours p-linéaire; or en désignant par $u_{h1}, u_{h2}, \ldots, u_{hn_h}$ les fonctions coordonnées du module X_h par rapport à la base $a_{h1}, \ldots, a_{hn_h}$, il est clair que

$$u_{i_1 \ldots i_p}(x_1, \ldots, x_p) = u_{1i_1}(x_1) \ldots u_{pi_p}(x_p),$$

en sorte que la fonction

$$u_{i_1 \ldots i_p} = u_{1i_1} \otimes \cdots \otimes u_{pi_p}$$

est bien multilinéaire (*Exemple* 2). Enfin, on laisse au lecteur le soin de montrer que (17) implique (18) en procédant comme dans les démonstrations des Théorèmes 1 et 2.

Les éléments $c_{i_1 \ldots i_p}$ de M s'appellent les **coefficients** de f par rapport aux bases considérées dans $X_1, \ldots, X_p$; lorsque $X_1 = \cdots = X_p = X$, on utilise habituellement la même base (a_i) dans $X_1, \ldots, X_p$; la formule (17) ne change pas et (18) s'écrit

(18 *bis*) $$c_{i_1 \ldots i_p} = f(a_{i_1}, \ldots, a_{i_p});$$

ces éléments de M sont alors appelés les coefficients de f par rapport à *la* base (a_i) de X.

¶ *Exemple* 12. Soit T un tenseur d'espèce $\binom{p}{q}$ sur un module X libre de type fini; choisi dans X une base (a_i), et dans le module dual X^* la base duale (a^i); pour calculer $T(u_1, \ldots, u_p, x_1, \ldots, x_q)$ pour des vecteurs $x_j \in X$ et des formes linéaires (ou **covecteurs**) $u_i \in X^*$, on pose

$$u_h = \sum_{i_h} \alpha_{hi_h} . a^{i_h} \qquad \text{d'où} \qquad \alpha_{hi_h} = u_h(a_{i_h})$$

et

$$x_k = \sum_{j_k} \xi_k^{j_k} . a_{j_k};$$

on a alors

$$T(u_1, \ldots, u_p, x_1, \ldots, x_q) = \sum T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \alpha_{1i_1} \ldots \alpha_{pi_p} \xi_1^{j_1} \ldots \xi_q^{j_q}$$

avec des constantes

$$T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = T(a^{i_1}, \ldots, a^{i_p}, a_{j_1}, \ldots, a_{j_q})$$

qu'on appelle les **coefficients** (ou les **composantes**, ou les **coordonnées**) du tenseur T par rapport à la base (a_i) de X.

Supposons par exemple $p = 2$ et $q = 3$; on a alors

$$T(u, v, x, y, z) = \sum T^{ij}_{khl} \alpha_i \beta_j \xi^k \eta^h \zeta^l$$

pour

$$u = \sum \alpha_i a^i, \qquad v = \sum \beta_i a^i, \qquad x = \sum \xi^i a_i, \qquad y = \sum \eta^i a_i, \qquad z = \sum \zeta^i a_i$$

et les composantes T^{ij}_{khl} de T sont données par

$$T^{ij}_{khl} = T(a^i, a^j, a_k, a_h, a_l).$$

On notera qu'on peut facilement calculer les composantes d'un produit tensoriel (*Exemple* 7). Soient par exemple U un tenseur d'espèce $\binom{2}{1}$ et V un tenseur d'espèce $\binom{1}{1}$; alors $T = U \otimes V$ est le tenseur d'espèce $\binom{3}{2}$ donné par

$$T(u, v, w, x, y) = U(u, v, x) V(w, y);$$

les composantes

$$T^{ijk}_{hl} = T(a^i, a^j, a^k, a_h, a_l)$$

de T sont donc données par la relation

$$T^{ijk}_{hl} = U^{ij}_h . V^k_l.$$

On a évidemment des formules analogues dans le cas général.

Le lecteur débutant fera bien de ne pas se laisser impressionner par ces formules et les « débauches d'indices »; les résultats de ce § sont de simples identités algébriques ni plus ni moins profondes que la formule

$$x(y + z) = xy + xz;$$

par conséquent, toutes ces formules sont essentiellement *triviales* malgré leur aspect imposant, la seule difficulté en l'occurence étant de choisir des *notations* commodes, et non pas de construire des *raisonnements* ingénieux.

5. *Effet d'un changement de base sur les composantes d'un tenseur*

Soit X un K-module libre de type fini, et considérons deux bases

$$(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}, \qquad (b_\lambda)_{1 \leqslant \lambda \leqslant n}$$

de X; on utilisera des indices latins pour tout ce qui se rapporte à la première base, et des indices grecs pour tout ce qui se rapporte à la seconde. Étant donné un tenseur T sur X, on se propose de calculer ses composantes par rapport à la base (b_λ) en fonction de ses composantes par rapport à la base (a_i).

Posons pour cela

$$b_\lambda = \sum_i \theta^i_\lambda . a_i, \qquad a_i = \sum_\lambda \rho^\lambda_i . b_\lambda,$$

de sorte que les matrices de passage (θ^i_λ) et (ρ^λ_i) sont inverses l'une de l'autre (§ 15, n° 4). Nous aurons besoin des formules faisant passer de la base duale (a^i) de X^* à la base duale (b^λ). Observons que pour tout $f \in X^*$ on a

$$f = \sum f(a_i) . a^i = \sum f(b_\lambda) . b^\lambda$$

en vertu du § 16, n° 2. Donc

$$b^\lambda = \sum_i b^\lambda(a_i) . a^i;$$

or

$$b^\lambda(a_i) = b^\lambda\Big(\sum_\mu \rho^\mu_i . b_\mu\Big) = \sum_\mu \rho^\mu_i . b^\lambda(b_\mu)$$

et comme

$$b^\lambda(b_\mu) = \begin{cases} 0 \text{ si } \lambda \neq \mu \\ 1 \text{ si } \lambda = \mu \end{cases}$$

par définition d'une base duale, il reste

$$b^\lambda(a_i) = \rho^\lambda_i;$$

par conséquent, il vient

$$b^\lambda = \sum_i \rho_i^\lambda . a^i$$

et de même

$$a^i = \sum_\lambda \theta_\lambda^i . b^\lambda$$

Cela dit, considérons par exemple un tenseur T d'espèce $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$; ses composantes par rapport à la première base sont les scalaires

$$\mathrm{T}^{ijk}_{hl} = \mathrm{T}(a^i, a^j, a^k, a_h, a_l)$$

et ses composantes par rapport à la seconde sont les scalaires

$$\mathrm{T}^{\lambda\mu\nu}_{\alpha\beta} = \mathrm{T}(b^\lambda, b^\mu, b^\nu, b_\alpha, b_\beta) ;$$

or on a vu que

$$\mathrm{T}(u, v, w, x, y) = \sum \mathrm{T}^{ijk}_{hl}\, \alpha_i \beta_j \gamma_k \xi^h \eta^l$$

pour

$$u = \sum \alpha_i a^i, \qquad v = \sum \beta_i a^i, \qquad w = \sum \gamma_i a^i$$
$$x = \sum \xi^i a_i, \qquad y = \sum \eta^i a_i,$$

remplaçant u, v, w, x, y par $b^\lambda, b^\mu, b^\nu, b_\alpha, b_\beta$ il vient donc

$$(19) \qquad \mathrm{T}^{\lambda\mu\nu}_{\alpha\beta} = \sum_{i,\,j,\,k,\,h,\,l} \rho_i^\lambda \rho_j^\mu \rho_k^\nu \theta_\alpha^h \theta_\beta^l \mathrm{T}^{ijk}_{hl},$$

ce qui est la relation cherchée. On aurait évidemment des formules analogues pour les autres espèces de tenseurs.

Remarque 3. La formule (19) est très souvent utilisée comme *définition* des tenseurs, et l'a même été exclusivement jusqu'à une date récente. On procède alors comme suit : on appelle tenseur trois fois covariant et deux fois contravariant un « objet géométrique » dont on ne précise pas la nature « concrète », mais dont on convient que, par rapport à chaque base (a_i) de X, il possède des « composantes » T^{ijk}_{hl}, ces composantes étant assujetties à varier avec la base choisie conformément à la formule (19). Pour montrer que cette définition équivaut à celle du texte, tout revient à prouver que si l'on associe à chaque base (a_i) de X des scalaires

$$\mathrm{T}^{ijk}_{hl}$$

de façon que les relations (19) soient vérifiées quelles que soient les bases (a_i) et (b_λ) de X, alors il existe un et un seul tenseur T d'espèce $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ sur X dont les composantes par rapport à toute base (a_i) de X sont justement les T^{ijk}_{hl} associés à cette base. Pour cela, choisissons une base (a_i) une fois pour toutes, et à l'aide de cette base particulière construisons le tenseur

$$\mathrm{T}(u, v, w, x, y) = \sum \mathrm{T}^{ijk}_{hl}\, \alpha_i \beta_j \gamma_k \xi^h \eta^l ;$$

tout revient à montrer que ses composantes par rapport à toute autre base (b_λ) de X sont les scalaires

$$\mathrm{T}^{\lambda\mu\nu}_{\alpha\beta}$$

attachés à celle-ci; or, d'après les calculs précédents, les composantes de T par rapport à la base (b_λ) sont les scalaires

$$\sum_{i,\,j,\,k,\,h,\,l} \rho_i^\lambda \rho_j^\mu \rho_k^\nu \theta_\alpha^h \theta_\beta^l \mathrm{T}^{ijk}_{hl},$$

et comme par hypothèse ces expressions sont justement les $\mathrm{T}^{\lambda\mu\nu}_{\alpha\beta}$ attachés à la base (b_λ), notre assertion est établie.

On peut aussi regarder ce raisonnement sous la forme suivante : les formules (19) expriment qu'étant donnés des vecteurs $x, y \in \mathrm{X}$ et des covecteurs $u, v, w \in \mathrm{X}^*$, l'expression

$$\sum \mathrm{T}^{ijk}_{hl}\, \alpha_i \beta_j \gamma_k \xi^h \eta^l,$$

calculée à l'aide des coordonnées de x, y, u, v, w par rapport à cette base, est en fait *indépendante du système de coordonnées choisi pour la définir*. C'est précisément parce que les formules analogues à (19) permettent de définir des objets ayant une signification indépendante des systèmes de coordonnées utilisés pour les construire que la théorie des tenseurs s'est finalement introduite en Physique et en Mathématiques. L'idée fondamentale est que les systèmes de coordonnées ne sont que des instruments pour étudier des objets ayant une signification intrinsèque, et que seuls ces objets présentent un intérêt quelconque.

EXERCICES

Il est parfaitement utopique d'espérer apprendre des Mathématiques, si élémentaires ou si supérieures soient-elles, sans résoudre des Exercices.

Les Exercices qu'on trouvera dans ce livre sont de trois sortes. Certains sont des illustrations pratiques ou même numériques des théories exposées dans le texte; le lecteur débutant ne pourra pas acquérir la technique du calcul sans résoudre une partie appréciable des Exercices de ce genre. D'autres apportent au texte des compléments théoriques élémentaires; en les étudiant, le lecteur s'habituera à manipuler le langage et les modes de raisonnements utilisés dans le texte; ceux de ces Exercices qui ne sont pas *très* faciles sont précédés d'un signe ¶. Enfin, la dernière catégorie est constituée par des Exercices qui apportent au texte des compléments importants et difficiles; ils sont destinés uniquement aux étudiants déjà avancés qui s'intéressent vraiment aux Mathématiques; ces Exercices sont précédés de deux ou même trois signes ¶.

Nous ne saurions trop insister enfin sur le fait que résoudre un Exercice ne consiste pas seulement à se convaincre, à l'aide d'un « brouillon » fait à la hâte, du fait qu'on en a à peu près compris la solution; si cette méthode est admissible pour les Exercices de calcul numérique, il faut par contre s'efforcer de *rédiger intégralement* les Exercices plus théoriques, où l'on doit construire de véritables démonstrations. De cette façon, et uniquement de cette façon, l'étudiant parviendra à acquérir un langage clair et correct, et à utiliser les termes techniques dans leur sens propre, ce qui, en Mathématiques, est le signe le plus certain de la compréhension d'un sujet.

§ 21

1. Soit V un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps commutatif K ; quels que soient les entiers p, $q \geqslant 0$, on désigne par

$$\mathrm{T}_q^p(\mathrm{V})$$

l'espace vectoriel formé par les tenseurs p fois covariants et q fois contravariants sur V.

a) Soient $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de V et $(a^i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ la base duale de V*. Montrer que les éléments

$$(*) \qquad a_{i_1} \otimes \cdots \otimes a_{i_p} \otimes a^{j_1} \otimes \cdots \otimes a^{j_q}$$

(où $i_1, \ldots, j_q$ prennent toutes les valeurs comprises entre 1 et n) forment une base de l'espace vectoriel $\mathrm{T}_q^p(\mathrm{V})$ [NB — On trouvera dans l'*Exemple* 6 du § 21 la règle pour identifier chaque $a \in \mathrm{V}$ à un tenseur d'espèce $\binom{1}{0}$; elle est essentielle pour donner un sens à l'expression $(*)$ ci-dessus].

En déduire que $\mathrm{T}_q^p(\mathrm{V})$ est de dimension n^{p+q} sur K.

b) Soit u un *auto*morphisme de V. Étant donné un tenseur $f \in \mathrm{T}_q^p(\mathrm{V})$, on considère sur $(\mathrm{V}^*)^p \times \mathrm{V}^q$ la fonction f' donnée par

$$f'(y_1, \ldots, y_p, x_1, \ldots, x_q) = f[{}^tu(y_1), \ldots, {}^tu(y_p), u^{-1}(x_1), \ldots, u^{-1}(x_q)]$$

quels que soient les $y_i \in \mathrm{V}^*$ et les $x_i \in \mathrm{V}$. Montrer que $f' \in \mathrm{T}_q^p(\mathrm{V})$ et que l'application $f \to f'$ ainsi définie dans $\mathrm{T}_q^p(\mathrm{V})$ est linéaire. On désigne dans ce qui suit cette application par

$$\mathrm{T}_q^p(u).$$

Montrer que l'on a

$$\mathrm{T}_q^p(v \circ u) = \mathrm{T}_q^p(v) \circ \mathrm{T}_q^p(u)$$

quels que soient $u, v \in \mathrm{GL}(\mathrm{V})$. En déduire que l'application $u \to \mathrm{T}_q^p(u)$ est un homomorphisme du groupe des automorphismes de V dans le groupe des automorphismes de $\mathrm{T}_q^p(\mathrm{V})$.

On pose

$$u(a_i) = \sum_j \alpha_i^j a_j,$$

de sorte que $(\alpha_i^j)_{1 \leqslant i, j \leqslant n}$ est la matrice de u par rapport à la base (a_i) de V. Calculer la matrice de $\mathrm{T}_q^p(u)$ par rapport à la base de $\mathrm{T}_q^p(\mathrm{V})$ définie dans la question *a*).

c) Soit u un *endo*morphisme de V. Étant donné un tenseur $f \in \mathrm{T}_q^p(\mathrm{V})$, on définit une nouvelle fonction f'' sur $(\mathrm{V}^*)^p \times \mathrm{V}^q$ en posant

$$f''(y_1, \ldots, y_p, x_1, \ldots, x_q) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant p} f[y_1, \ldots, y_{i-1}, {}^tu(y_i), y_{i+1}, \ldots, y_p, x_1, \ldots, x_q] - \sum_{1 \leqslant j \leqslant q} f[y_1, \ldots, y_p, x_1, \ldots, x_{j-1}, u(x_j), x_{j+1}, \ldots, x_q].$$

Montrer qu'on a encore $f'' \in \mathrm{T}_q^p(\mathrm{V})$ et que l'application $f \to f''$ de $\mathrm{T}_q^p(\mathrm{V})$ dans lui-même ainsi définie est linéaire. On la note dans ce qui suit $\mathrm{D}_q^p(u)$. Montrer qu'on a

$$\mathrm{D}_q^p(u + v) = \mathrm{D}_q^p(u) + \mathrm{D}_q^p(v)$$
$$\mathrm{D}_q^p(u \circ v - v \circ u) = \mathrm{D}_q^p(u) \circ \mathrm{D}_q^p(v) - \mathrm{D}_q^p(v) \circ \mathrm{D}_q^p(u)$$

quels que soient les endomorphismes u et v de V. Connaissant la matrice de u par rapport à la base (a_i) de V, calculer celle de $\mathrm{D}_q^p(u)$ par rapport à la base $(*)$ de la question *a*).

¶ **2.** Soient V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps commutatif K, et T un tenseur deux fois covariant et trois fois contravariant sur V. Montrer qu'il existe un et un seul tenseur U une fois covariant et deux fois contravariant sur V dont les composantes par rapport à toute base de V sont données, en fonction de celles de T, par la relation

$$\mathrm{U}_{jk}^i = \sum_{1 \leqslant h \leqslant n} \mathrm{T}_{jkh}^{ih}.$$

Interpréter cette opération (**contraction** du tenseur T par rapport au second indice covariant et au troisième indice contravariant) en regardant U et T comme des formes multilinéaires.

¶ **3.** Soit T un tenseur deux fois covariant et deux fois contravariant. Montrer que le scalaire

$$\sum_{1 \leqslant i, j \leqslant n} \mathrm{T}_{ji}^{ij}$$

est indépendant de la base choisie pour le définir.

¶¶ **4.** Soient L et M deux modules sur un anneau commutatif K. On considère le module

$$\mathrm{N} = \mathrm{K}^{(\mathrm{L} \times \mathrm{M})}$$

admettant pour base l'ensemble L × M (§§ 10, 11, *Exercice* 15) ; identifiant chaque élément de L × M à l'élément correspondant de N, on considère dans N le sous-module N' engendré par les éléments de N qui sont de la forme

$$(\lambda' x' + \lambda'' x'', \mu' y' + \mu'' y'') - \lambda'\mu'(x', y') - \lambda'\mu''(x', y'') - \lambda''\mu'(x'', y') - \lambda''\mu''(x'', y'').$$

On appelle **produit tensoriel des modules** L et M le module quotient N/N' ; on le désigne par la notation

$$\mathrm{L} \otimes \mathrm{M}.$$

Étant donnés des éléments $x \in \mathrm{L}$ et $y \in \mathrm{M}$, on désigne par

$$x \otimes y$$

l'élément de $\mathrm{L} \otimes \mathrm{M} = \mathrm{N/N'}$ représenté par l'élément (x, y) de N.

a) Montrer que l'application

$$(x, y) \to x \otimes y$$

de $L \times M$ dans $L \otimes M$ est *bilinéaire*, et que les « produits » $x \otimes y$ engendrent le module $L \otimes M$.

b) Soit f une application de $L \times M$ dans un K-module quelconque E. Montrer que, pour que f soit *bilinéaire*, il faut et il suffit qu'il existe une application *linéaire*

$$\bar{f} : L \otimes M \to E$$

telle que l'on ait

$$f(x, y) = \bar{f}(x \otimes y)$$

quels que soient $x \in L$ et $y \in M$; l'application $\bar{f}$ est alors unique. (Ce résultat est la propriété fondamentale des produits tensoriels de modules : ils servent à ramener l'étude des applications bilinéaires à celle des applications linéaires).

c) On suppose L et M libres de type fini ; soient $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ une base de L et $(b_j)_{1 \leqslant j \leqslant q}$ une base de M ; montrer que les produits

$$a_i \otimes b_j \qquad (1 \leqslant i \leqslant p,\ 1 \leqslant j \leqslant q)$$

forment une base de $L \otimes M$. En déduire que

$$\dim(L \otimes M) = \dim(L) . \dim(M)$$

si K est un corps.

d) Montrer qu'il existe un isomorphisme et un seul de $L \otimes M$ sur $M \otimes L$ qui applique $x \otimes y$ sur $y \otimes x$ quels que soient $x \in L$ et $y \in M$.

e) Soient L, M, L' et M' quatre modules sur K ; on considère des homomorphismes

$$u : L \to L' \qquad \text{et} \qquad v : M \to M' ;$$

montrer qu'il existe un et un seul homomorphisme

$$f : L \otimes M \to L' \otimes M'$$

tel que l'on ait

$$f(x \otimes y) = u(x) \otimes v(y)$$

quels que soient $x \in L$ et $y \in M$ (observer que le second membre est fonction bilinéaire de x et y). On dit que f est le produit tensoriel des homomorphismes u et v, et on le note généralement $u \otimes v$. [Cette notation traditionnelle peut prêter à confusion, car elle désigne aussi un élément du module

$$\mathrm{Hom}(L, L') \otimes \mathrm{Hom}(M, M') ;$$

en pratique, on n'a presque jamais à considérer ce dernier produit tensoriel, et $u \otimes v$ a toujours la signification définie plus haut.]

f) On suppose L, ..., M' libres de type fini ; on choisit des bases de ces modules, donc (question *c*) ci-dessus) de $L \otimes M$ et $L' \otimes M'$; calculer la matrice de $u \otimes v$ par rapport à ces bases en fonction des matrices de u et v par rapport aux bases choisies dans L, ..., M'. [Le résultat obtenu conduit à la notion de **produit tensoriel de deux matrices** ; soient

$$A = (a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant p,\ 1 \leqslant j \leqslant q} \qquad \text{et} \qquad B = (b_{kh})_{1 \leqslant k \leqslant m,\ 1 \leqslant h \leqslant n}$$

deux matrices à coefficients dans un anneau commutatif K. On appelle produit tensoriel de A et B la matrice à pm colonnes et qn lignes définie comme suit : on numérote les colonnes du produit tensoriel à l'aide des couples (i, k) tels que $1 \leqslant i \leqslant p$, $1 \leqslant k \leqslant m$, et les lignes à l'aide

des couples (j, h) tels que $1 \leqslant j \leqslant q$, $1 \leqslant h \leqslant n$; cela dit, le terme de la matrice produit tensoriel

$$A \otimes B$$

situé à l'intersection de la colonne d'indice (i, k) et de la ligne d'indice (j, h) est par définition

$$a_{ij} b_{kh}.$$

Par exemple :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} u & v \\ u' & v' \\ u'' & v'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au & av & bu & bv \\ cu & cv & du & dv \\ au' & av' & bu' & bv' \\ cu' & cv' & du' & dv' \\ au'' & av'' & bu'' & bv'' \\ cu'' & cv'' & du'' & dv'' \end{pmatrix} ;$$

on utilise, pour ordonner les couples d'entiers (i, k), l'ordre lexicographique, qui consiste à convenir que (i, j) précède (k, h) si $i \leqslant k$, ou bien si $i = k$ et $j \leqslant h$.]

g) Soient L, L', L'', M, M' et M'' six modules sur l'anneau K ; on prend des homomorphismes

$$u' : L \to L', \qquad u'' : L' \to L'', \qquad v' : M \to M', \qquad v'' : M' \to M'' ;$$

montrer qu'on a

$$(u'' \circ u') \otimes (v'' \circ v') = (u'' \otimes v'') \circ (u' \otimes v').$$

En déduire que si A', A'', B', B'' sont des matrices à coefficients dans K, la formule

$$(A''A') \otimes (B''B') = (A'' \otimes B'') . (A' \otimes B')$$

est vraie pourvu qu'elle ait un sens.

h) Soient L, M et N trois modules. Montrer qu'il existe un et un seul isomorphisme

$$(L \otimes M) \otimes N \to L \otimes (M \otimes N)$$

qui, quels que soient $x \in L$, $y \in M$ et $z \in N$, applique $(x \otimes y) \otimes z$ sur $x \otimes (y \otimes z)$. [« Associativité » du produit tensoriel ; dans la pratique on ne fait aucune différence entre $(x \otimes y) \otimes z$ et $x \otimes (y \otimes z)$, qu'on écrit $x \otimes y \otimes z$].

i) Soient $M_1, \ldots, M_p$ des modules sur K ; on forme le module

$$M_1 \otimes M_2 \otimes \cdots \otimes M_p = M_1 \otimes (M_2 \otimes \cdots \otimes M_p)$$

(définition par récurrence sur p). Soit f une application de $M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_p$ dans un K-module N. Montrer que, pour que f soit p-linéaire, il faut et il suffit qu'il existe un *homomorphisme* de modules

$$\bar{f} : M_1 \otimes \cdots \otimes M_p \to N$$

tel que l'on ait

$$f(x_1, \ldots, x_p) = \bar{f}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p)$$

quels que soient les $x_i \in M_i$; l'application linéaire $\bar{f}$ est alors entièrement déterminée par f (raisonner par récurrence sur p en attribuant une valeur fixe à l'une des variables figurant dans f).

j) Soit M un K-module ; on considère le module

$$M \otimes M \otimes M^*$$

où M^* est le dual de M; à l'aide de la question précédente, montrer qu'il existe un et un seul homomorphisme

$$j : M \otimes M \otimes M^* \to T^2_1(M)$$

de $M \otimes M \otimes M^*$ dans le module des tenseurs 2 fois covariants et une fois contravariants sur M qui, quels que soient $x, y \in M$ et $u \in M^*$, applique l'élément

$$x \otimes y \otimes u \in M \otimes M \otimes M^*$$

sur l'élément

$$x \otimes y \otimes u \in T^2_1(M)$$

[on rappelle, *Exemple* 7 du § 21, que cette dernière expression est la forme trilinéaire sur $M^* \times M^* \times M$ dont la valeur en $(f, g, z) \in M^* \times M^* \times M$ est l'élément

$$f(x)\, g(y)\, u(z)$$

de K]. Montrer que *j est bijectif si* M *est libre de type fini.* Généraliser ce résultat en remplaçant

$$M \otimes M \otimes M^* \qquad \text{par} \qquad M \otimes \cdots \otimes M \otimes M^* \otimes \cdots \otimes M^*$$

(p facteurs M et q facteurs M^*) et

$$T^2_1(M) \qquad \text{par} \qquad T^p_q(M),$$

défini au début de l'*Exercice* 1 ci-dessus.

k) On prend $K = \mathbf{Z}$ et $M = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$; montrer que $T^2_0(M)$ est réduit à 0, mais qu'il n'en est pas ainsi de $M \otimes M$ [considérer l'application $(x, y) \to xy$ de $M \times M$ dans M, multiplication des entiers modulo p]. En conclure que dans ce cas l'homomorphisme j de la question précédente n'est pas bijectif (et est même nul...).

[La notion de produit tensoriel de deux modules définie dans cet *Exercice* est beaucoup plus utile que celle de tenseur définie au § 21, sauf lorsqu'il s'agit de modules libres de type fini. La raison en est que les tenseurs du § 21 sont adaptés à l'étude des applications multilinéaires *dans l'anneau de base* K lui-même, tandis que les produits tensoriels de l'*Exercice* 21 servent à étudier les applications multilinéaires *dans des* K-*modules quelconques*. Or il peut arriver, cf. la question (k) de l'*Exercice* 21, que les premières soient toutes identiquement nulles, sans qu'il en soit de même des secondes. Notons enfin que le produit tensoriel, lorsqu'il s'agit de matrices ou d'espaces vectoriels de dimension finie, remonte essentiellement à Kronecker; pour cette raison, certains auteurs l'appellent le **produit kroneckerien.**]