§ 19. La notion de dimension

1. Existence de bases

Le résultat suivant a déjà été annoncé au § 11, n° 4 :

Théorème 1. *Tout espace vectoriel de dimension finie* (*) *sur un corps admet une base.*

Ce théorème est évidemment une conséquence du résultat plus précis que voici :

Théorème 2. *Soient* M *un espace vectoriel de dimension finie sur un corps,* X *un ensemble fini de générateurs de* M, *et* A *une partie de* X. *Supposons les éléments de* A *linéairement indépendants. Alors il existe une base* B *de* M *telle que l'on ait.*

$$A \subset B \subset X.$$

Considérons en effet toutes les parties de X qui sont *libres* et contiennent A; il en existe, ne serait-ce que A elle-même. Parmi ces parties, considérons celles qui comportent *le plus grand nombre possible d'éléments;* soit B l'une de celles-ci. Pour établir le Théorème 2 il suffit de montrer que B est une base de M, ou même que B engendre M puisque B est libre par construction.

Comme X engendre M, il suffit pour cela d'établir que tout $x \in X$ est combinaison linéaire d'éléments de B. Comme c'est clair si $x \in B$, nous supposerons, pour le démontrer, que $x \notin B$.

L'ensemble $B' = B \cup \{x\}$ est contenu dans X et contient alors strictement plus d'éléments que B; comme on a en outre $A \subset B'$, on voit que B′ ne pas peut être libre. Si donc l'on désigne par $x_1, \ldots, x_r$ les divers éléments de B, il existe une relation

$$(1) \qquad \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_r x_r + \lambda x = 0$$

avec des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_r, \lambda$ non tous nuls. On a même $\lambda \neq 0$, car dans le cas contraire (1) se réduirait à une relation linéaire *non triviale* entre les éléments $x_i \in B$, contrairement au fait que B est libre.

(*) Les résultats du présent n° sont en fait valables pour tous les espaces vectoriels même de dimension infinie, mais les démonstrations générales sont trop compliquées pour être reproduites ici.

Puisque λ n'est pas nul, et puisque l'anneau de base K est un *corps,* λ est inversible dans K, et en multipliant le premier membre de (1) par l'inverse de λ on trouve

$$x = -\lambda^{-1}\lambda_1 x_1 - \cdots - \lambda^{-1}\lambda_r x_r;$$

nous avons donc démontré que tout $x \in X$ est combinaison linéaire d'éléments de B, d'où le Théorème 2.

Les théorèmes 1 et 2 (dont la démonstration aurait pu être donnée dès le § 11) ont des conséquences importantes; outre les deux Corollaires ci-dessous, on en trouvera quelques-unes dans les n° 2 et 3.

Corollaire 1. *Soit* M *un espace vectoriel de dimension finie sur un corps* K. *Pour que des éléments donnés de* M *fassent partie d'une base de* M, *il faut et il suffit qu'ils soient linéairement indépendants.*

S'il existe une base de M contenant des vecteurs donnés $x_1, \ldots, x_p$, il est clair que ceux-ci sont linéairement indépendants. Inversement, si cette condition est satisfaite, l'existence d'une base de M contenant les vecteurs donnés s'obtient en choisissant un système fini G de générateurs de M, et en appliquant le Théorème 2 aux ensembles

$$X = G \cup \{x_1, \ldots, x_p\}, \qquad A = \{x_1, \ldots, x_p\}.$$

Corollaire 2. *Soit* M *un espace vectoriel de dimension finie sur un corps. Tout sous-espace vectoriel de* M *est facteur direct dans* M.

Soit en effet M′ un sous-espace de M. D'après le § 18, Théorème 2, M′ est de dimension finie, donc (Théorème 1) admet une base $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$; appliquant le Corollaire 1 à ces vecteurs et à M on voit qu'il existe des vecteurs $x_{p+1}, \ldots, x_r$ tels que les x_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ forment une *base* de M. Il est alors clair que le sous-espace de M engendré par $x_{p+1}, \ldots, x_r$ est un supplémentaire de M′ dans M.

Remarque 1. La démonstration du Corollaire 2 ci-dessus utilise le fait qu'un sous-espace d'un espace vectoriel M de dimension finie sur un corps K est lui-même de dimension finie sur K, ce qui résulte en effet de ce qu'un corps est un anneau noethérien (on utilise alors le Théorème 2 du § 18) ou principal (on raisonne alors à l'aide du Théorème 3 du § 18). Mais il est évidemment possible de donner de ce fait une démonstration directe et élémentaire (qui ne diffère d'ailleurs pas sensiblement de celles des Théorèmes 2 et 3 du § 18); on procède comme suit.

Comme on sait déjà (Théorème 1) que M admet une base, on peut supposer $M = K^n$. Si $n = 1$, les seuls sous-espaces vectoriels de M sont 0 et M puisque K est un corps, et sont donc de dimension finie. Dans le cas général, soit M′ un sous-espace vectoriel de K^n, et identifions K^{n-1} au sous-espace de K^n formé des vecteurs $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ tels que $\xi_n = 0$. Si $M' \subset K^{n-1}$ on peut supposer M′ de dimension finie (on raisonne par récurrence sur n). Si M′ n'est pas contenu dans K^{n-1}, choisissons dans M' un vecteur

$$a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \quad \text{tel que} \quad \alpha_n \neq 0$$

et posons $M'' = M' \cap K^{n-1}$; pour tout élément

$$x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$$

de M', on peut écrire, puisque α_n est inversible dans K,

$$x = \xi_n \alpha_n^{-1} a + y$$

avec un vecteur y dont la dernière composante est nulle, donc appartenant à K^{n-1} et évidemment à M', donc à M''; ainsi, on voit aussitôt que M' est somme directe du sous-espace Ka engendré par a et de M''; mais celui-ci, étant contenu dans K^{n-1}, est de dimension finie d'après l'hypothèse de récurrence; il en est donc de même de M', ce qui achève la démonstration.

On trouvera dans la Bibliographie beaucoup d'autres méthodes de démonstration. Par exemple, on peut établir d'abord les Théorèmes 2 et 6, puis les Théorèmes 10, 11 et 12; le résultat établi dans cette *Remarque* se déduit alors aussitôt du Théorème 12.

2. *Définition d'un sous-espace vectoriel par des équations linéaires*

Soient L un espace vectoriel de dimension finie sur un corps K, et M un sous-espace vectoriel de L. Dans le dual L^* de L, considérons l'ensemble, noté

$$M^0,$$

des formes linéaires f sur L qui vérifient

$$f(x) = 0 \quad \text{pour tout} \quad x \in M.$$

Cet ensemble est un sous-espace vectoriel de L^*, car s'il contient deux formes f et g, et si l'on pose $h = \alpha f + \beta g$ où α et β sont des scalaires arbitraires, on a

$$h(x) = \alpha . f(x) + \beta . g(x) = 0 \quad \text{pour tout} \quad x \in M,$$

donc $h \in M^0$, ce qui prouve notre assertion.

On dit que M^0 est **l'orthogonal de M dans L^***. Le résultat suivant montre que la connaissance du sous-espace M^0 permet de reconstituer le sous-espace M :

THÉORÈME 3. *Soient L un espace vectoriel de dimension finie, M un sous-espace de L, et M^0 l'orthogonal de M dans L^*. Pour qu'un $x \in L$ soit dans M, il faut et il suffit que l'on ait*

$$f(x) = 0 \tag{2}$$

pour toute forme linéaire $f \in M^0$.

La condition étant trivialement nécessaire, nous allons montrer qu'elle est suffisante. Comme on l'a vu en démontrant le Corollaire 2 du Théorème 2, il existe une base $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ de L et un entier $p \leqslant r$ tels que M soit engendré par $a_1, \ldots, a_p$. Soient $f_1, \ldots, f_r$ les fonctions coordonnées par rapport à la base $a_1, \ldots, a_r$ de L; il est clair que M est défini par les relations

$$f_{p+1}(x) = \cdots = f_r(x) = 0, \tag{3}$$

autrement dit que M^0 contient les formes $f_{p+1}, \ldots, f_r$ et que les relations (3) *caractérisent* les éléments de M. Comme les relations (3) sont évidemment vérifiées si la condition (2) est remplie pour tout $f \in M^0$, le Théorème est démontré.

Remarque 2. En fait les formes $f_{p+1}, \ldots, f_r$ construites ci-dessus forment une *base* de M^0. Il est en effet clair qu'elles sont linéairement indépendantes (du reste les formes $f_1, \ldots, f_r$ constituent la base de L^* duale de la base $a_1, \ldots, a_r$ de L); il suffit donc d'établir qu'elles engendrent M^0. Or considérons une forme $f \in L^*$; posant $f(a_i) = \alpha_i$, on a

$$f(x) = f(a_1\xi_1 + \cdots + a_r\xi_r) = \alpha_1\xi_1 + \cdots + \alpha_r\xi_r$$

pour $x = a_1\xi_1 + \cdots + a_r\xi_r$, et comme $\xi_i = f_i(x)$ il vient donc

$$f = \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_r f_r \qquad \text{avec} \qquad \alpha_i = f(a_i);$$

si $f \in M^0$ on a en particulier $f(a_1) = \cdots = f(a_p) = 0$, donc

$$f = \alpha_{p+1} f_{p+1} + \cdots + \alpha_r f_r,$$

ce qui montre bien que $f_{p+1}, \ldots, f_r$ engendrent M^0.

On notera inversement que, si des formes f_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ engendrent M^0, alors les éléments de M sont caractérisés par les relations

$$f_1(x) = \ldots = f_m(x) = 0.$$

En effet toute $f \in M^0$ peut s'écrire sous la forme $f = \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_m f_m$ avec des coefficients $\alpha_i \in K$, et il est clair que les équations considérées impliquent alors $f(x) = 0$, donc $x \in M$ d'après le Théorème 3.

Le principal intérêt du Théorème 3 réside du reste dans la propriété que nous venons d'établir, et qui mérite un énoncé explicite :

COROLLAIRE 1. *Soit $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ un système de générateurs de M^0. Alors les éléments de M sont caractérisés par les équations*

$$f_1(x) = \ldots = f_m(x) = 0.$$

Voici une autre conséquence importante du Théorème 3 :

COROLLAIRE 2. *Soient L un espace vectoriel de dimension finie sur un corps et M un sous-*

espace vectoriel de L. *Pour que l'on ait* $M \neq L$, *il faut et il suffit qu'il existe sur* L *une forme linéaire f non nulle vérifiant*

$$f(x) = 0 \quad \text{pour tout} \quad x \in M.$$

Si $M = L$ il est clair qu'on a $M^\circ = \{0\}$. Inversement, si $M^\circ = \{0\}$, le Théorème 3 montre que $M = L$. Les relations $M = L$ et $M^\circ = \{0\}$ sont donc équivalentes; par suite, la relation $M \neq L$ équivaut à la relation $M^\circ \neq \{0\}$, ce qui établit le Corollaire.

3. Conditions de compatibilité d'un système d'équations linéaires

La théorie des systèmes d'équations linéaires sera étudiée en détail au § 20; mais nous pouvons dès maintenant résoudre la question de savoir à quelles conditions un système d'équations linéaires possède des solutions. Ce sera l'objet des deux Théorèmes établis dans ce n°.

Théorème 4. *Soient $f_1, \ldots, f_r$ des formes linéaires sur un espace vectoriel* M *sur un corps* K. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) Les formes $f_1, \ldots, f_r$ sont linéairement indépendantes.

b) Quels que soient les scalaires $\beta_1, \ldots, \beta_r \in K$, il existe au moins un $x \in M$ qui vérifie les relations

$$(4) \qquad \begin{cases} f_1(x) = \beta_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ f_r(x) = \beta_r. \end{cases}$$

Considérons en effet l'homomorphisme $f : M \to K^r$ donné par

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_r(x));$$

la propriété *b)* exprime que f est *surjectif*. Or $f(M)$ est un sous-espace de K^r; en vertu du Corollaire 2 du Théorème 3, tout revient donc à exprimer que, si une forme linéaire u sur K^r est nulle sur le sous-espace $f(M)$, on a $u = 0$.

Mais soit

$$u(\xi_1, \ldots, \xi_r) = \lambda_1\xi_1 + \cdots + \lambda_r\xi_r$$

une telle forme; on a

$$u(f(x)) = \lambda_1 f_1(x) + \cdots + \lambda_r f_r(x)$$

pour tout $x \in M$; dire que u est nulle sur $f(M)$ signifie donc que les formes f_i satisfont à la relation linéaire

$$\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_r f_r = 0.$$

Ainsi, la propriété *a)* de l'énoncé signifie bien que la seule forme u qui soit nulle sur le sous-espace $f(M)$ est $u = 0$, et le Théorème 4 est démontré.

Considérons maintenant un système d'équations

$$(5) \qquad \begin{cases} f_1(x) = \beta_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ f_n(x) = \beta_n \end{cases}$$

où les formes linéaires $f_1, \ldots, f_n$ sur l'espace vectoriel M ne sont plus nécessairement linéairement indépendantes. Dans le dual M^* de M, ces formes engendrent un sous-espace vectoriel F de dimension finie, et d'après le Théorème 2 on peut extraire de la famille $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de F; en modifiant au besoin la numérotation des f_i, on peut donc supposer que les formes $f_1, \ldots, f_r$ forment une base de F. Il est clair qu'on est alors dans les conditions d'application du résultat suivant :

Théorème 5. *Soient $f_1, \ldots, f_n$ des formes linéaires sur un espace vectoriel* M. *Supposons que $f_1, \ldots, f_r$ soient linéairement indépendantes, et qu'on ait des relations de la forme*

$$(6) \qquad f_j = \rho_{j1} f_1 + \cdots + \rho_{jr} f_r \quad \textit{pour} \quad r + 1 \leqslant j \leqslant n,$$

avec des constantes $\rho_{jk} \in K$. Alors, pour que le système d'équations (5) *possède au moins une solution $x \in M$, il faut et il suffit que l'on ait*

$$(7) \qquad \beta_j = \rho_{j1}\beta_1 + \cdots + \rho_{jr}\beta_r \quad \textit{pour} \quad r + 1 \leqslant j \leqslant n;$$

le système (5) *possède alors les mêmes solutions que le système*

$$(8) \qquad \begin{cases} f_1(x) = \beta_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ f_r(x) = \beta_r \end{cases}$$

Les relations (6) signifient qu'on a

$$(7\ bis) \qquad f_j(x) = \rho_{j1} f_1(x) + \cdots + \rho_{jr} f_r(x)$$

pour *tout* $x \in M$; il est donc clair que, s'il existe un x vérifiant les relations (5), les relations (7) seront nécessairement vérifiées.

Inversement, supposons les relations (7) vérifiées et considérons une solution de (8); on a alors, d'après (7 *bis*),

$$f_j(x) = \rho_{j1}\beta_1 + \cdots + \rho_{jr}\beta_r,$$

et en tenant compte de (7) on voit donc que les systèmes (5) et (8) ont les mêmes solutions. Comme (8) possède effectivement des solutions en vertu du Théorème précédent, le Théorème 5 est donc démontré.

Remarque 3. Les relations (7), qui sont nécessaires et suffisantes pour que le système d'équations linéaires (6) admette au moins une solution, sont appelées les **conditions de compatibilité** du système (6). Le Théorème 5 montre que, pour trouver les solutions d'un système d'équations linéaires, on peut toujours se ramener (si les conditions de compatibilité sont vérifiées) à un système d'équations dont les premiers membres sont des équations *linéairement indépendantes*. Ce résultat doit naturellement être complété par le Théorème 4 — à savoir qu'un système d'équations linéaires linéairement indépendantes possède *toujours* des solutions.

On notera également que nous n'avons pas supposé M de dimension finie dans les énoncés précédents; cette hypothèse est superflue dans le contexte actuel, et ne sera utilisée que pour établir les résultats plus précis du § 20.

4. Existence de relations linéaires

Nous allons maintenant établir l'un des résultats fondamentaux de l'Algèbre linéaire.

THÉORÈME 6. *Soit* M *un espace vectoriel de dimension finie sur un corps* K. *Toutes les bases de* M *ont le même nombre d'éléments.*

Soient $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ et $(b_j)_{1\leqslant j\leqslant q}$ deux bases de M; pour montrer que $p = q$, il suffit de prouver qu'on a $p \leqslant q$ et $q \leqslant p$; par raison de symétrie, il suffit même d'établir que $q \leqslant p$. Cela va évidemment résulter de l'énoncé suivant :

THÉORÈME 7. *Soient* M *un espace vectoriel de dimension finie sur un corps* K *et* p *un entier tel que* K *possède une base formée de* p *vecteurs. Pour que* q *éléments de* M *soient linéairement indépendants il faut que* $q \leqslant p$.

Il va de soi que la réciproque du Théorème 7 est fausse.

Soient $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ une base de M et $b_1, \ldots, b_q$ des éléments de M; nous allons montrer qu'il existe une relation linéaire non triviale entre les vecteurs b_j dès que l'on a $q > p$, ce qui établira le Théorème 7.

L'assertion à établir est triviale si $p = 0$: on a en effet alors $M = \{0\}$, et comme $q > 1$ il est clair que les b_j vérifient par exemple la relation

$$1 . b_1 + 0 . b_2 + \cdots + 0 . b_q = 0.$$

Nous supposerons maintenant le Théorème établi pour $p - 1$, et allons en déduire qu'il est vrai pour p. Soit M' le sous-espace de M engendré par les vecteurs $a_1, \ldots, a_{p-1}$; puisque $a_1, \ldots, a_p$ engendrent M, on a des relations

$$(9) \qquad b_j = b'_j + \alpha_j a_p \quad (1 \leqslant j \leqslant q)$$

avec des vecteurs $b'_j \in M'$ et des scalaires $\alpha_j \in K$. Si tous les α_j sont nuls, les b_j sont dans M'; mais comme M' admet une base formée de $p - 1$ vecteurs, le Théorème s'applique à M', et comme la relation $q > p$ implique *a fortiori* $q > p - 1$, on voit que l'existence d'une relation linéaire non triviale entre les b_j s'obtient immédiatement dans ce cas.

Reste donc à examiner le cas où les α_j ne sont pas tous nuls; supposons par exemple

$$\alpha_q \neq 0,$$

donc α_q inversible puisque K est un *corps*. Alors la dernière relation (9) donne

$$a_p = \alpha_q^{-1} (b_q - b'_q)$$

et en portant dans les autres relations (9) on obtient, après un calcul facile, les relations

$$(10) \qquad b_j - \nu_j b_q = b'_j - \nu_j b'_q \quad (1 \leqslant j \leqslant q - 1)$$

avec $\nu_j = \alpha_j \alpha_q^{-1}$.

Les relations (10) montrent que les $q - 1$ vecteurs $b_j - \nu_j b_q$ sont dans le sous-espace M'; comme $q > p$ implique $q - 1 > p - 1$, l'hypothèse de récurrence montre donc l'existence d'une relation

$$\lambda_1(b_1 - \nu_1 b_q) + \cdots + \lambda_{q-1}(b_{q-1} - \nu_{q-1} b_q) = 0$$

avec des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_{q-1}$ *non tous nuls*; mais cette relation s'écrit aussi

$$\lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_q b_q = 0 \qquad \text{avec} \qquad \lambda_q = -(\lambda_1\nu_1 + \cdots + \lambda_{q-1}\nu_{q-1}),$$

et l'existence d'une relation linéaire non triviale entre $b_1, \ldots, b_q$ est ainsi démontrée.

Remarque 4. Le Théorème 7 est en fait valable non seulement pour les espaces vectoriels sur un *corps* (commutatif ou non), mais aussi pour les modules sur un *anneau commutatif*; on peut le montrer à l'aide de la théorie des déterminants (§ 23, Corollaire du théorème 5).

COROLLAIRE. *Soit*

$$(11) \qquad \begin{cases} \alpha_{11}\xi_1 + \cdots + \alpha_{p1}\xi_p = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{1n}\xi_1 + \cdots + \alpha_{pn}\xi_p = 0 \end{cases}$$

un système de n *équations linéaires et homogènes à* p *inconnues* $\xi_1, \ldots, \xi_p$ *à coefficients dans un corps* K. *Si l'on a* $p > n$ (i.e. si le nombre des inconnues dépasse celui des équations), *le système* (11) *admet au moins une solution non triviale* (i.e. pour laquelle les inconnues ξ_i ne sont pas toutes nulles).

Considérons en effet les p éléments

$$a_i = (\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in})$$

de K^n; les relations (11) sont évidemment équivalentes à la relation

$$a_1\xi_1 + \cdots + a_p\xi_p = 0,$$

et pour que le système (11) possède une solution autre que $\xi_1 = \cdots = \xi_p = 0$ il est donc nécessaire et suffisant que les vecteurs a_i soient liés; c'est toujours le cas si $p > n$ en vertu du Théorème 7.

Remarque 5. L'explication intuitive du Corollaire précédent est la suivante :

comme le système (11) admet toujours la solution triviale

$$\xi_1 = \cdots = \xi_p = 0,$$

tout revient à trouver des hypothèses assurant que (11) admet *au moins deux* solutions, autrement dit assurant que les relations (11) ne déterminent pas entièrement les inconnues ξ_i; or, si l'on impose au moins p conditions à p inconnues ξ_i, on a de fortes chances de les déterminer entièrement, alors qu'au contraire il est peu probable qu'on arrive à les déterminer à l'aide de moins de p conditions...

5. *La notion de dimension*

Soit M un espace vectoriel de dimension finie sur K; il existe, d'après le Théorème 6, un entier n bien déterminé tel que toutes les bases de M possèdent n éléments. On dit que n est la **dimension de M sur le corps** K (ou la **dimension de** M tout court si aucune ambiguïté n'est possible sur le corps de base), ou que M **est de dimension** n **sur** K, et la dimension de M sur K se désigne par la notation

$$\dim_K(M)$$

ou simplement par dim (M) s'il ne peut y avoir aucune confusion quant au corps de base choisi. On convient de prendre dim (M) = 0 lorsque M = $\{0\}$.

Remarque 6. Un espace vectoriel *complexe* M peut aussi être regardé comme un espace vectoriel *réel*; on a alors la relation

$$\dim_{\mathbf{R}}(M) = 2 . \dim_{\mathbf{C}}(M)$$

(cf. *Exercice* 15), ce qui montre bien qu'il est indispensable de préciser le corps de base choisi.

Remarque 7. On peut aussi définir la notion de dimension pour les espaces vectoriels de dimension infinie, mais on doit, pour ce faire, utiliser la théorie des nombres cardinaux (§ 5); la méthode élémentaire consistant à poser dim (M) = $+\infty$ lorsque M n'est pas de dimension finie ne présente aucun intérêt, parce qu'avec cette définition trop simple de la notion de dimension aucun des énoncés qu'on a en vue (et en premier lieu une généralisation du Théorème 8 ci-dessous) n'est vrai; or l'intérêt d'une définition est avant tout, pour ne pas dire exclusivement, de conduire à des théorèmes (*).

Le principal intérêt de la notion de dimension est concentré dans l'énoncé suivant :

(*) C'est aussi parfois le cas dans la vie de tous les jours. Si l'on a par exemple pour but de démontrer que « l'armée poldève ne tire pas sur les Poldèves », il suffit d'introduire la définition suivante : en Poldévie, on appelle Poldèves les gens contre lesquels l'armée poldève ne tire pas. Ce procédé, malgré son efficacité certaine, présente un grave défaut : on peut en effet le retourner en une définition de l'armée poldève elle-même.

THÉORÈME 8. *Soient* L *et* M *deux espaces vectoriels de dimension finie sur un corps* K. *Pour que* L *et* M *soient isomorphes il faut et il suffit que* dim (L) = dim (M).

S'il existe un isomorphisme f de L sur M, celui-ci applique une base de L sur une base de M, de sorte que dim (L) = dim (M). Si inversement cette condition est réalisée, et si n est la dimension commune de L et M, alors L et M sont isomorphes à K^n en vertu du § 12, Corollaire 1 du théorème 3, donc isomorphes entre eux.

Remarque 8. *Il n'est pas vrai* que deux espaces vectoriels de dimension infinie soient toujours isomorphes.

Exemple 1. On a évidemment

$$\dim(K^n) = n$$

quel que soit n.

Exemple 2. Prenons K = **R** et pour M l'espace vectoriel formé des vecteurs d'origine donnée O dans l'espace usuel (§ 10, *Exemple* 2). On a alors dim (M) = 3. Si l'on prend pour M l'ensemble des vecteurs portés par un plan donné passant par O, on trouve dim (M) = 2. Si enfin on prend pour M l'ensemble des vecteurs portés par une droite donnée passant par O, on a dim (M) = 1.

Soient L et M des espaces vectoriels de dimension finie sur un corps K; on a alors

$$\dim(L \times M) = \dim(L) + \dim(M);$$

plus précisément : si $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ et $(b_j)_{1 \leqslant j \leqslant q}$ sont des bases de L et M respectivement, les $p + q$ vecteurs

$$(a_1, 0), \ldots, (a_p, 0), (0, b_1), \ldots, (0, b_q)$$

forment une base de L × M.

Exemple 3. L'**espace-temps** des physiciens est l'ensemble des couples (x, t) où x est un vecteur d'origine donnée O dans l'espace usuel, et t un nombre réel qu'on appelle le temps. C'est donc le produit cartésien M × **R** où M est l'espace usuel. Par suite, regardé comme espace vectoriel réel, l'espace-temps est de dimension 3 + 1 = 4. Le savant Cosinus a beaucoup travaillé pour pas grand'chose.

Soit L un espace vectoriel de dimension n; on a vu au § 16, Théorème 1, que son dual admet une base formée de n vecteurs; par suite, on a

$$\dim(L) = \dim(L^*).$$

THÉORÈME 9. *Soient* L *un espace vectoriel de dimension finie sur un corps,* M *un sous-espace de* L, *et* M^0 *l'orthogonal de* M *dans* L^*. *On a alors*

$$\dim(M) + \dim(M^0) = \dim(L).$$

Posons dim (M) $= p$ et dim (L) $= r$; comme on l'a vu en démontrant le Corollaire 2 du Théorème 2, il existe une base $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ de L telle que $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ soit une base de M. La *Remarque* 2 du nº 2 montre alors que le sous-espace M^o de L^* admet une base de $r - p$ vecteurs, donc est de dimension $r - p$, ce qui achève la démonstration.

Corollaire. *Soit* M *un sous-espace d'un espace vectoriel* L *de dimension finie sur un corps. On a alors*

$$\dim (M) \leqslant \dim (L),$$

et on ne peut avoir dim (M) = dim (L) *que si* M = L.

La première assertion résulte immédiatement du Théorème 9. Celui-ci montre aussi que la relation dim (L) = dim (M) équivaut à

$$\dim (M^o) = 0,$$

i.e. à $M^o = \{0\}$; or on sait (Corollaire 2 du Théorème 3) que cette dernière relation équivaut à L = M.

6. Caractérisations des bases et de la dimension

L'énoncé suivant fournit plusieurs caractérisations utiles des bases d'un espace vectoriel de dimension finie :

Théorème 10. *Soient* $x_1, \ldots, x_n$ *des éléments d'un espace vectoriel* M *sur un corps* K. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) Les vecteurs $x_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ *forment une base de* M.

b) Les vecteurs x_i *sont linéairement indépendants et* M *est de dimension* n.

c) Les vecteurs x_i *sont linéairement indépendants et toute partie libre de* M *comporte au plus* n *éléments.*

d) Les vecteurs x_i *engendrent* M *et* M *est de dimension* n.

e) Les vecteurs x_i *engendrent* M *et tout système de générateurs de* M *comporte au moins* n *éléments.*

Il est clair que a) implique b).

Pour montrer que b) implique c), on remarque qu'une famille libre fait partie d'une base de M (Corollaire 1 du Théorème 2), donc (Théorème 6) comporte au plus n éléments si M est de dimension n.

Pour montrer que c) implique d), considérons un $x \in M$; d'après c) les vecteurs $x_1, \ldots, x_n, x$, en nombre $n + 1$, sont liés par une relation *non triviale*

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n + \lambda x = 0;$$

on a du reste $\lambda \neq 0$, car dans le cas contraire on trouverait une relation *non triviale* entre les x_i, contrairement à c); donc λ est inversible et il vient

$$x = -\lambda^{-1}\lambda_1 x_1 - \cdots - \lambda^{-1}\lambda_n x_n,$$

ce qui prouve que les x_i engendrent M — et donc forment une base de M, qui est par suite de dimension n.

La propriété d) implique la propriété e), car tout système de générateurs de M contient une base de M (Théorème 2), donc comporte au moins n éléments si dim (M) $= n$.

Pour achever la démonstration, il reste à montrer que e) implique a); or d'après le Théorème 2 on peut extraire de la famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de M; celle-ci, étant un système de générateurs, comporte au moins n éléments d'après e); c'est donc nécessairement la famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ toute entière. Ainsi, celle-ci est une base de M, et le Théorème est démontré.

Théorème 11. *Soient* M *un espace vectoriel sur un corps* K *et* n *un entier. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) M *est de dimension* n.

b) n *est le plus grand entier tel qu'on puisse extraire de* M *une famille de* n *vecteurs linéairement indépendants.*

c) n *est le plus petit entier tel qu'on puisse extraire de* M *une famille de* n *vecteurs engendrant* M.

L'équivalence des propriétés a) et b) provient de l'équivalence entre les propriétés a) et c) du Théorème 10. De même, l'équivalence entre les propriétés a) et c) du Théorème 11 provient de l'équivalence entre les propriétés a) et e) du Théorème 10.

Théorème 12. *Pour qu'un espace vectoriel* M *sur un corps* K *soit de dimension finie, il faut et il suffit qu'il existe un entier* n *tel que toute partie libre de* M *possède au plus* n *éléments. On a alors* dim (M) $\leqslant n$.

La condition est évidemment nécessaire d'après le résultat précédent. Inversement, si elle est vérifiée, on peut considérer le plus grand entier r tel que M contienne une famille de r vecteurs linéairement indépendants; on a $r \leqslant n$ par hypothèse, et M est de dimension r d'après le Théorème 11, c); donc M est de dimension finie et dim (M) $\leqslant n$.

7. Dimensions du noyau et de l'image d'un homomorphisme

Lorsque l'anneau de base est un corps, le Théorème 1 du § 18 se traduit comme suit :

Théorème 13. *Soient* L *et* M *deux espaces vectoriels sur un corps et* f *un homomorphisme de* L *dans* M. *Si* L *est de dimension finie, on a*

$$\dim (L) = \dim (\operatorname{Ker} (f)) + \dim (\operatorname{Im} (f)).$$

En effet, Ker (f) est de dimension finie, donc isomorphe à K^p où $p = \dim (\operatorname{Ker} (f))$, et Im (f) est aussi de dimension finie (l'image d'un module de type fini par un homomorphisme est évidemment de type fini), donc isomorphe à K^q où $q = \dim(\mathrm{Im}(f))$; pour obtenir le Théorème 13 il reste donc à utiliser le Théorème 1 du § 18.

Remarque 9. Le Théorème 13, bien qu'étant un simple cas particulier du résultat beaucoup plus général établi au § 18, *ne peut pas* se démontrer plus simplement que celui-ci; il est par contre très facile d'en donner des démonstrations plus compliquées que celle du Théorème 1 du § 18...

Les Corollaires du Théorème 13 que nous allons maintenant énoncer sont au moins aussi importants dans la pratique que le Théorème 13 lui-même, tout particulièrement celui que voici :

COROLLAIRE 1. *Soient* L *et* M *deux espaces vectoriels de dimension finie sur un corps et f un homomorphisme de* L *dans* M. *On suppose* $\dim(L) = \dim(M)$. *Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) f est bijectif.

b) f est surjectif.

c) f est injectif.

d) on a $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.

On sait depuis longtemps (§ 7, Théorème 8) que les assertions *c*) et *d*) sont équivalentes. Comme d'autre part *a*) est la conjonction de *b*) et *c*), tout revient à prouver l'équivalence de *b*) et *d*). Or *b*) équivaut (Corollaire du Théorème 9) à la relation

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(M), \tag{12}$$

et *d*) équivaut à

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0; \tag{13}$$

l'équivalence de (12) et (13) résulte donc du Théorème 13 et de l'hypothèse $\dim(L) = \dim(M)$, d'où le Corollaire.

On utilise le plus souvent le Corollaire 1 lorsque $L = M$. On verra au § suivant qu'il peut aussi se traduire dans le langage de la théorie des systèmes d'équations linéaires.

COROLLAIRE 2. *Soient* E *et* F *des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel* M *de dimension finie sur un corps. On a alors*

$$\dim(E + F) = \dim(E) + \dim(F) - \dim(E \cap F).$$

Considérons en effet l'homomorphisme $f : E \times F \to M$ donné par $f(x, y) = x + y$ (cf. § 17, n° 3); on a $E + F = \mathrm{Im}(f)$, et d'autre part $\mathrm{Ker}(f)$ est isomorphe à $E \cap F$ (§ 17, *Remarque* 1); donc

$$\begin{aligned}\dim(E) + \dim(F) = \dim(E \times F) &= \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) \\ &= \dim(E \cap F) + \dim(E + F),\end{aligned}$$

ce qui est la relation annoncée.

COROLLAIRE 3. *Soient* $E_1, \ldots, E_r$ *des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel* E *de dimension finie. On a alors*

$$\dim(E_1 + \cdots + E_r) \leqslant \dim(E_1) + \cdots + \dim(E_r)$$

et pour que les deux membres de cette relation soient égaux, il faut et il suffit que les sous-espaces $E_1, \ldots, E_r$ *soient linéairement indépendants.*

Considérons en effet l'homomorphisme

$$f : E_1 \times \cdots \times E_r \to E_1 + \cdots + E_r$$

donné par

$$f(x_1, \ldots, x_r) = x_1 + \cdots + x_r;$$

il est surjectif, et par suite il résulte du Théorème 13 que

$$\begin{aligned}\dim(E_1 + \cdots + E_r) &= \dim(E_1 \times \cdots \times E_r) - \dim(\mathrm{Ker}(f)) \\ &= \dim(E_1) + \cdots + \dim(E_r) - \dim(\mathrm{Ker}(f))\end{aligned}$$

l'inégalité cherchée résulte de là, et il y a égalité si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = 0$, ce qui signifie précisément (§ 17, n° 3) que les sous-espaces E_i de E sont linéairement indépendants.

8. Rang d'un homomorphisme, d'une famille de vecteurs, d'une matrice

Soient L et M deux espaces vectoriels de dimension finie et f un homomorphisme de L dans M. On appelle **rang de l'homomorphisme** f la dimension du sous-espace $\mathrm{Im}(f) = f(L)$ de M.

Soit $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ un système de générateurs de L; alors $\mathrm{Im}(f)$ est engendré par les vecteurs $x_i = f(a_i)$. On est ainsi conduit à introduire la notion suivante : étant donnée une famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ d'éléments d'un espace vectoriel M (de dimension finie ou non), on appelle **rang de la famille** (x_i) la dimension du sous-espace de M engendré par les x_i (on notera que, même si M est de dimension infinie, ce sous-espace est toujours de dimension finie).

Soit r le rang d'une famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ d'éléments d'un espace vectoriel M, et désignons par M′ le sous-espace de M engendré par les x_i. D'après le Théorème 2, on peut extraire de la famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de M′, base comportant nécessairement r éléments. Au besoin en modifiant la numérotation des x_i, on peut donc supposer que $x_1, \ldots, x_r$ forment une base de M′. Il s'ensuit qu'alors les vecteurs $x_1, \ldots, x_r$ sont *linéairement indépendants* et que tout élément de M′ est combinaison linéaire de ces vecteurs; en particulier, on a des relations

$$x_j = \rho_{j1}x_1 + \cdots + \rho_{jr}x_r \qquad \text{pour} \qquad r + 1 \leqslant j \leqslant n. \tag{14}$$

Inversement, si l'on a des relations (14), le sous-espace engendré par $x_1, \ldots, x_r$ contient non seulement ces vecteurs eux-mêmes mais aussi $x_{r+1}, \ldots, x_n$, et par suite $x_1, \ldots, x_r$ engendrent M′; si de plus $x_1, \ldots, x_r$ sont linéairement indépendants, ils forment une base de M′, qui est donc de dimension r, et par suite la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est de rang r.

Ces considérations s'appliquent naturellement lorsque M est le dual d'un espace vectoriel L; les x_i sont alors des formes linéaires f_i sur L, ce qui permet de définir le **rang d'une famille de formes linéaires** sur L; c'est évidemment cette notion qui figure implicitement dans l'énoncé du Théorème 5.

Soit maintenant

$$A = (\alpha_{ij})_{1\leqslant i\leqslant p,\,1\leqslant j\leqslant n}$$

une matrice à p colonnes et n lignes, à coefficients dans un corps K. On appelle **rang de la matrice** A le rang de l'homomorphisme de K^p dans K^n représenté par A (§ 12, n° 3, *Remarque* 1). L'image de cet homomorphisme est le sous-espace vectoriel de K^n engendré par les images des éléments de la base canonique de K^p, i.e. par les colonnes de la matrice A. Donc, *le rang de la matrice* A *est la dimension du sous-espace vectoriel de* K^n *engendré par les* p *colonnes de* A.

THÉORÈME 14. *Soient* L *et* M *des espaces vectoriels de dimension finie,* f *un homomorphisme de* L *dans* M, *et* A *la matrice de* f *par rapport à une base* $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ *de* L *et à une base* $(b_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ *de* M. *Alors le rang de* f *est égal au rang de* A.

Considérons en effet les isomorphismes

$$u : K^p \to L, \qquad v : K^n \to M$$

qui appliquent les bases canoniques de K^p et K^n sur les bases données de L et M; alors l'homomorphisme

$$v^{-1}\circ f\circ u : \ K^p \to K^n$$

a précisément A pour matrice par rapport aux bases canoniques de K^p et K^n (§ 12, n° 3, *Remarque* 2), et le rang de cet homomorphisme est donc égal à celui de A par définition. Mais comme u et v sont bijectifs, il est clair que les images de f et de $v^{-1}\circ f\circ u$ sont isomorphes, de sorte que ces deux homomorphismes ont même rang. D'où le Théorème.

THÉORÈME 15. *Soient* M *un espace vectoriel de dimension finie,* $(b_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ *une base de* M, *et*

$$x_i = \alpha_{i1}b_1 + \cdots + \alpha_{in}b_n \quad (1\leqslant i\leqslant p)$$

une famille d'éléments de M. *Alors le rang de la famille* $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ *est égal au rang de la matrice* $(\alpha_{ij})_{1\leqslant i\leqslant p,\,1\leqslant j\leqslant n}$.

Il suffit pour le voir d'appliquer le Théorème précédent en prenant pour L l'espace K^p, pour base de L la base canonique, et pour f l'homomorphisme qui applique les éléments de la base canonique sur les vecteurs x_i donnés; ceux-ci engendrent le sous-espace Im (f), de sorte que le rang de la famille (x_i) est égal au rang de f, i.e. au rang de la matrice de f, laquelle est justement la matrice (α_{ij}).

9. *Calcul effectif du rang d'une matrice*

Les résultats du n° précédent montrent que le calcul du rang d'un homomorphisme ou d'un système de vecteurs peut se ramener à celui du rang d'une matrice. Le résultat fondamental à ce sujet est l'énoncé suivant :

THÉORÈME 16. *Soit* $A = (\alpha_{ij})_{1\leqslant i\leqslant p,\,1\leqslant j\leqslant n}$ *une matrice à coefficients dans un corps* K. *Le rang de* A *est le plus grand entier* r *tel que l'on puisse extraire de* A *une matrice carrée* inversible *d'ordre* r.

Soient L et M des espaces vectoriels de dimension p et n respectivement sur K; choisissons une base $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ de L et une base $(b_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ de M, et considérons l'homomorphisme f de L dans M admettant A pour matrice par rapport aux bases considérées; le rang de A est égal à celui de f, i.e. à la dimension de Im (f). Soit r ce rang; nous allons montrer tout d'abord qu'on peut effectivement extraire de la matrice A une matrice carrée *inversible* d'ordre r.

En vertu du Théorème 13, on a dim (Ker (f)) $= p - r$, et par suite Ker (f) admet une base formée de $p-r$ vecteurs $c_1, \ldots, c_{p-r}$; comme les vecteurs

$$c_1, \ \ldots, \ c_{p-r}, \ a_1, \ \ldots, \ a_p$$

engendrent L, et comme les $p-r$ premiers d'entre eux sont linéairement indépendants, il est possible (Théorème 2) de former une base de L en adjoignant aux $p-r$ vecteurs $c_1, \ldots, c_{p-r}$ des vecteurs en nombre r, choisis parmi $a_1, \ldots, a_p$; en modifiant au besoin la numérotation des vecteurs $a_1, \ldots, a_p$ (ce qui revient à permuter entre elles les *colonnes* de la matrice A), on peut donc supposer que les vecteurs

$$c_1, \ \ldots, \ c_{p-r}, \ a_1, \ \ldots, \ a_r$$

forment une base de L. Désignant par L′ le sous-espace de L engendré par $a_1, \ldots, a_r$ on a donc

$$L = \mathrm{Ker}\,(f)\oplus L'.$$

Si $x = y + z$ avec $y\in \mathrm{Ker}(f)$, $z\in L'$, il est clair que $f(x) = f(z)$; donc $f(L') = \mathrm{Im}(f)$ et comme Ker $(f)\cap L' = \{0\}$, la restriction de f à L′ est un *isomorphisme* de L′ sur le sous-espace Im (f) de M. Il en résulte que les vecteurs

$$f(a_1), \ \ldots, f(a_r)$$

forment une base de Im (f).

En utilisant à nouveau, comme ci-dessus, le Théorème 2, on voit donc qu'au besoin en modifiant la numérotation des vecteurs b_j (ce qui revient à permuter les *lignes* de la matrice A), on peut supposer que les vecteurs

$$f(a_1), \ldots, f(a_r), \ b_{r+1}, \ldots, b_n$$

forment une base de M. On a alors

$$M = \mathrm{Im}\,(f)\oplus M'' \tag{15}$$

où M″ est le sous-espace engendré par $b_{r+1}, \ldots, b_n$. On a aussi du reste

$$\mathrm{M} = \mathrm{M}' \oplus \mathrm{M}'' \tag{16}$$

en désignant par M′ le sous-espace engendré par $b_1, \ldots, b_r$. Nous désignerons par u l'homomorphisme de M sur M′ correspondant à la décomposition (16) — autrement dit, si

$$x = x' + x'' \qquad \text{avec} \qquad x' \in \mathrm{M}', \quad x'' \in \mathrm{M}'',$$

on pose $u(x) = x'$ (cf. § 17, n° 4).

On a évidemment Ker (u) = M″, et comme la somme (15) est directe on a donc

$$\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(f) = 0;$$

donc l'application de Im (f) dans M′ induite par u est *injective*; mais comme

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{M}') = r,$$

cette application est en fait *bijective* (Corollaire 1 du Théorème 13); et comme on a déjà montré que f induit une *bijection* de L′ sur Im (f), il s'ensuit que l'application

$$f' : \mathrm{L}' \to \mathrm{M}'$$

donnée par

$$f'(x) = u(f(x)) \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathrm{L}'$$

est elle-même bijective, autrement dit est un *isomorphisme*, en sorte que la matrice de f' par rapport à la base $(a_1, \ldots, a_r)$ de L′ et à la base $(b_1, \ldots, b_r)$ de M′ est *inversible* (§ 15, n° 1). Or, si $\mathrm{A} = (\alpha_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant p,\, 1 \leqslant j \leqslant n}$, on a

$$f(a_i) = \alpha_{i1} b_1 + \cdots + \alpha_{in} b_n$$

et par suite

$$u(f(a_i)) = \alpha_{i1} b_1 + \cdots + \alpha_{ir} b_r;$$

la matrice de f' est donc la matrice $(\alpha_{ij})_{1 \leqslant i,\, j \leqslant r}$ formée avec les r premières lignes et colonnes de A, et ceci démontre comme annoncé que, si A est de rang r, on peut extraire de A une matrice carrée inversible d'ordre r.

Remarque 10. En général ce n'est pas la matrice $(\alpha_{ij})_{1 \leqslant i, j \leqslant r}$ qui sera inversible; on n'oubliera pas en effet que, dans la démonstration précédente, on a dû admettre la possibilité de permuter les lignes, et les colonnes, de la matrice A.

Pour achever la démonstration du Théorème, il reste à faire voir que si A est de rang r, et si l'on peut extraire de A une matrice carrée inversible d'ordre s, alors on a nécessairement $s \leqslant r$.

Or supposons par exemple que la matrice $(\alpha_{ij})_{1 \leqslant i, j \leqslant s}$ soit inversible. Désignons maintenant par L′ le sous-espace de L engendré par $a_1, \ldots, a_s$, par M′ le sous-espace de M engendré par $b_1, \ldots, b_s$, par M″ le sous-espace engendré par $b_{s+1}, \ldots, b_n$, et par u l'homomorphisme de M sur M′ consistant à projeter parallèlement à M″. Alors $(\alpha_{ij})_{1 \leqslant i,\, j \leqslant s}$ est la matrice, par rapport aux bases $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant s}$ et $(b_j)_{1 \leqslant j \leqslant s}$, de l'homomorphisme f' de L′ dans M′ donné par $f'(x) = u(f(x))$ pour $x \in \mathrm{L}'$. Cette matrice étant inversible par hypothèse, f' est bijectif, donc injectif, et la restriction de f à L′ est *à fortiori* injective; donc f applique L′ sur un sous-espace de même dimension s que L′, ce qui montre que Im (f) est de dimension s au moins; autrement dit, on a $s \leqslant r$, ce qui termine la démonstration.

Remarque 11. Si le corps K est *commutatif*, on dispose en outre d'un critère théoriquement très simple pour décider si une matrice carrée est inversible ou non : il suffit d'examiner son déterminant (§ 23, Corollaire 1 du Théorème 8).

Exemple 4. Considérons dans K^3 deux vecteurs

$$x' = (a', b', c'), \qquad x'' = (a'', b'', c'');$$

dire qu'ils sont linéairement indépendants signifie que le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} a' & a'' \\ b' & b'' \\ c' & c'' \end{pmatrix}$$

est égal à 2, autrement dit que l'une au moins des matrices

$$\begin{pmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a' & a'' \\ c' & c'' \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a' & a'' \\ b' & b'' \end{pmatrix}$$

est inversible. Si K est commutatif, cela signifie que les scalaires

$$b'c'' - b''c', \qquad a'c'' - a''c', \qquad a'b'' - a''b'$$

ne sont pas tous nuls (§ 15, n° 3).

Corollaire. *Le rang d'une matrice* A *à coefficients dans un corps est égal au rang de la matrice transposée* ${}^t\mathrm{A}$.

Il est en effet clair que les matrices carrées extraites de ${}^t\mathrm{A}$ sont les transposées des matrices carrées extraites de A; or, si une matrice carrée est inversible, il en est de même de sa transposée, et réciproquement.

10. Calcul de la dimension d'un sous-espace vectoriel à partir de ses équations

Soient L un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps K et M un sous-espace vectoriel de L; on a vu plus haut (Corollaire 1 du Théorème 3) qu'il existe des formes linéaires f_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ sur L telles que M soit l'ensemble des $x \in \mathrm{L}$

satisfaisant aux relations

(17) $$f_1(x) = \cdots = f_m(x) = 0.$$

Il est clair inversement que, quelles que soient les formes linéaires f_i, les relations (17) définissent un sous-espace vectoriel M de L.

Ceci dit, le calcul de la dimension de M s'effectue comme suit :

THÉORÈME 17. *Soient $f_1, \ldots, f_m$ des formes linéaires sur un espace vectoriel L de dimension finie n sur un corps K. La dimension du sous-espace vectoriel M de L défini par les relations (17) est égale à $n - r$, où r est le rang de la famille $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$.*

On peut supposer $f_1, \ldots, f_r$ linéairement indépendantes, auquel cas on a des relations

$$f_j = \rho_{j1} f_1 + \cdots + \rho_{jr} f_r \quad \text{pour} \quad r + 1 \leqslant j \leqslant m;$$

il est alors clair que les solutions de (17) sont aussi les solutions de

(18) $$f_1(x) = \cdots = f_r(x) = 0,$$

ce qui nous ramène au cas où les formes f_i données sont linéairement indépendantes.

Considérons alors l'homomorphisme $f : \mathrm{L} \to \mathrm{K}^r$ donné par

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_r(x));$$

il est clair que $\mathrm{M} = \mathrm{Ker}\,(f)$, et par suite (Théorème 13) que

$$\dim\,(\mathrm{M}) = n - \dim\,(\mathrm{Im}\,(f));$$

tout revient donc à montrer que

$$\dim\,(\mathrm{Im}\,(f)) = r = \dim\,(\mathrm{K}^r),$$

autrement dit que $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{K}^r$; mais cela résulte du Théorème 4.

§ 20. Équations linéaires

1. *Notations et traductions*

Étant donné un anneau K, on appelle **système de n équations linéaires à p inconnues à coefficients dans K** tout système de relations

(1) $$\begin{cases} \alpha_{11}\xi_1 + \cdots + \alpha_{p1}\xi_p = \beta_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{1n}\xi_1 + \cdots + \alpha_{pn}\xi_p = \beta_n \end{cases}$$

où les **coefficients** α_{ij} et les **seconds membres** β_j sont des éléments donnés de K. On appelle **solution** de (1), ou **solution dans l'anneau** K lorsqu'on veut écarter toute ambiguïté, tout vecteur

$$x = (\xi_1, \ldots, \xi_p) \in \mathrm{K}^p$$

dont les coordonnées satisfont aux relations (1).

Pour étudier le système (1), il est utile, et même indispensable, de le considérer sous les trois points de vue que voici.

Tout d'abord, on doit introduire l'homomorphisme

$$f : \mathrm{K}^p \to \mathrm{K}^n$$

dont la matrice, par rapport aux bases canoniques, est

(2) $$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{p1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{1n} & \ldots & \alpha_{pn} \end{pmatrix};$$

en considérant le vecteur

$$b = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathrm{K}^n,$$

il est clair, d'après le § 12, nº 3, que les solutions de (1) ne sont autres que les vecteurs $x \in \mathrm{K}^p$ qui vérifient la relation

(3) $$f(x) = b.$$

En second lieu, identifions les vecteurs x et b aux matrices colonnes

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_p \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix};$$

alors le système (1) prend la forme

$$\text{(4)} \qquad Ax = b.$$

Enfin, introduisons sur K^p les formes linéaires

$$f_j(\xi_1, \ldots, \xi_p) = \alpha_{1j}\xi_1 + \cdots + \alpha_{pj}\xi_p;$$

alors le système (1) s'écrit

$$\text{(5)} \qquad \begin{cases} f_1(x) = \beta_1 \\ \ldots\ldots\ldots \\ f_n(x) = \beta_n. \end{cases}$$

Dans toute la suite de ce § nous utiliserons sans explication les notations introduites ci-dessus, et nous supposerons que K est un *corps*

2. *Rang d'un système d'équations linéaires. Conditions d'existence de solutions*

On appelle **rang du système** (1) le rang r de la famille de formes linéaires $(f_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$; comme les coordonnées de f_j par rapport à la base de $(K^p)^*$ duale de la base canonique de K^p sont les scalaires α_{ij}, on voit (§ 19, Théorème 15) que le rang cherché est aussi celui de la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{p1} & \ldots & \alpha_{pn} \end{pmatrix}$$

i.e. de la transposée de A; donc (§ 19, Corollaire du Théorème 16) *le rang du système* (1) *est égal au rang de la matrice* A.

Soit r ce rang; au besoin en modifiant la numérotation des équations (1), on peut supposer que les formes $f_1, \ldots, f_r$ sont linéairement indépendantes; on a alors des relations de la forme

$$f_j = \rho_{j1}f_1 + \cdots + \rho_{jr}f_r \quad (r + 1 \leqslant j \leqslant n),$$

et comme on l'a établi au § 19, n° 3, le système (15) possède des solutions si et seulement si les *conditions de compatibilité*

$$\beta_j = \rho_{j1}\beta_1 + \cdots + \rho_{jr}\beta_r \quad (r + 1 \leqslant j \leqslant n)$$

sont vérifiées. S'il en est ainsi, les solutions de (5) sont les solutions de

$$\text{(6)} \qquad \begin{cases} f_1(x) = \beta_1 \\ \ldots\ldots\ldots \\ f_r(x) = \beta_r. \end{cases}$$

On est ainsi ramené à étudier les systèmes dont les premiers membres sont des formes linéaires *linéairement indépendantes*; un tel système, comme on l'a montré au § 19 (Théorème 4), *possède toujours au moins une solution.*

3. *Système homogène associé*

Si l'équation (2) possède au moins une solution x, les autres sont évidemment les vecteurs $x + y$ où $f(y) = 0$, i.e. où $y \in \operatorname{Ker}(f)$. La question du nombre de solutions de (2) dépend donc de l'équation $f(y) = 0$; cf. § 7, Théorème 8.

Si l'on pose $y = (\eta_1, \ldots, \eta_p)$, il est clair que la relation $f(y) = 0$ s'écrit

$$\text{(1 bis)} \qquad \begin{cases} \alpha_{11}\eta_1 + \cdots + \alpha_{p1}\eta_p = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{1n}\eta_1 + \cdots + \alpha_{pn}\eta_p = 0; \end{cases}$$

on dit que (1 *bis*) est le **système d'équations linéaires et homogènes associé au système** (1) donné; on appelle **solution triviale** de ce système la solution pour laquelle

$$\eta_1 = \cdots = \eta_p = 0.$$

On peut encore écrire (1 *bis*) sous la forme

$$\text{(5 bis)} \qquad \begin{cases} f_1(y) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ f_n(y) = 0. \end{cases}$$

Les solutions y de ce système d'équations forment un sous-espace vectoriel de K^p dont la dimension, d'après le Théorème 17 du § précédent, est $p - r$, où r est le rang de la famille $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

4. *Systèmes de Cramer*

Rappelons que, jusqu'à la fin de ce §, l'anneau de base K est supposé être un *corps*.

THÉORÈME 1. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) *Quels que soient les scalaires* $\beta_1, \ldots, \beta_n \in K$, *le système* (1) *possède une et une seule solution.*

b) *On a* $p = n$ *et le système homogène associé au système* (1) *n'admet que la solution triviale.*

c) *On a* $p = n$ *et les formes linéaires* $f_1, \ldots, f_n$ *sont linéairement indépendantes.*

La propriété *a*) exprime que l'homomorphisme

$$f : K^p \to K^n$$

est *bijectif*; s'il en est ainsi, f est un isomorphisme, de sorte que $\operatorname{Ker}(f) = \{0\}$ et que $\dim(K^p) = \dim(K^n)$, donc que $p = n$; ainsi *a*) implique *b*). Réciproquement, si f est injectif et si $p = n$ alors f est bijectif en vertu du § 19, Corollaire 1 du Théorème 13; donc *b*) implique *a*).

Montrons que *a*) implique *c*) ; on a déjà vu que *a*) implique $p = n$; si

$$\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n = 0$$

est une relation linéaire entre les formes f_i, on a

$$\lambda_1 f_1(x) + \cdots + \lambda_n f_n(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in K^p;$$

prenant pour x une solution de (1) il vient donc

$$\lambda_1\beta_1 + \cdots + \lambda_n\beta_n = 0; \tag{7}$$

si (1) admet une solution quelles que soient les valeurs des seconds membres, la relation (7) est donc vérifiée quels que soient les $\beta_j \in K$, ce qui implique évidemment

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0;$$

donc *a*) implique *c*) (on pourrait aussi remarquer que, si les f_i ne sont pas linéairement indépendantes, le système (5) n'admet de solutions que si les β_i vérifient des conditions non triviales, à savoir les conditions de compatibilité du nº 2).

Il reste à établir que *c*) implique *a*). D'après le nº 2, ou le Théorème 4 du § 19, le système (1) possède toujours *au moins une* solution ; donc l'homomorphisme f est surjectif ; mais comme K^p et K^n ont par hypothèse même dimension, il est aussi injectif, et par suite (1) possède toujours *au plus une* solution, ce qui termine la démonstration.

On appelle **système de Cramer** tout système d'équations linéaires vérifiant les conditions *a*), *b*), *c*) du Théorème 1. Le but du présent § est essentiellement de montrer que *la résolution d'un système quelconque d'équations linéaires peut toujours se ramener à celle d'un système de Cramer.*

Lorsqu'on sait d'avance que $p = n$ (autrement dit, lorsqu'on a un système comportant autant d'équations que d'inconnues), on peut utiliser le Théorème suivant, qui donne plusieurs caractérisations importantes des systèmes de Cramer :

Théorème 2. *Étant donné un système*

$$Ax = b \tag{4}$$

de n équations linéaires à n inconnues, les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) *Quel que soit b, le système* (4) *admet une et une seule solution.*

b) *Quel que soit b, le système* (4) *possède au moins une solution.*

c) *Quel que soit b, le système* (4) *possède au plus une solution.*

d) *Il existe une valeur de b pour laquelle le système* (4) *possède une et une seule solution.*

e) *Le système homogène* $Ay = 0$ *associé au système* (4) *n'admet que la solution triviale* $y = 0$.

f) *La matrice* A *est inversible.*

En outre, si ces conditions sont vérifiées, la solution du système (4) *est*

$$x = A^{-1}b. \tag{8}$$

En écrivant (4) sous la forme $f(x) = b$, où f est l'endomorphisme de K^n dont la matrice par rapport à la base canonique est A, on voit que *a*) signifie que f est bijectif, *b*) que f est surjectif, *c*) que f est injectif, *e*) que Ker $(f) = 0$, et *f*) que f est inversible dans l'anneau des endomorphismes de K^n (cf. § 15, nº 2) ; l'équivalence des conditions *a*), *b*), *c*), *e*) et *f*) résulte donc du Corollaire 1 du Théroème 13 du § 19.

Il est clair par ailleurs que *a*) implique *d*) ; et que *d*) implique *e*) comme il résulte des raisonnements du nº 2.

Pour achever la démonstration, il reste donc à établir la formule (8), ce qui est trivial.

Exemple 1. Supposons $n = 2$ et K commutatif; on a donc un système

$$\begin{cases} ax + by = u \\ cx + dy = v \end{cases}$$

de deux équations linéaires à deux inconnues x et y. D'après le § 15, nº 3, la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si

$$ad - bc \neq 0,$$

de sorte que cette condition caractérise donc les systèmes de Cramer dans ce cas. Si elle est remplie, il est facile de voir que la solution du système considéré est donnée par les formules

$$x = \frac{du - bv}{ad - bc}, \qquad y = \frac{av - cu}{ad - bc}.$$

La théorie des déterminants permet, comme on le verra au § 24, d'étendre ces formules aux systèmes de Cramer à un nombre quelconque d'équations, à coefficients dans un corps K *commutatif.* Toute la question est évidemment de trouver des formules explicites pour calculer l'inverse d'une matrice carrée inversible.

5. *Systèmes d'équations indépendantes : réduction à un système de Cramer*

Nous allons maintenant examiner le système (1) dans le cas où les formes linéaires $f_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ sont linéairement indépendantes, cas auquel on peut toujours se ramener comme on l'a vu nº 2 ; mais nous ne supposerons plus que $p = n$. On a alors nécessairement

$$n \leqslant p,$$

puisque $f_1, \dots, f_n$ sont par hypothèse des éléments linéairement indépendants d'un espace vectoriel de dimension p (à savoir le dual de K^p).

La matrice $A = (\alpha_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant p,\ 1 \leqslant j \leqslant n}$ est alors de rang n (nº 2), et par suite (§ 19, Théorème 16) on peut en extraire une matrice carrée inversible d'ordre n; nous supposerons que la matrice

$$U = (\alpha_{ij})_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n}$$

est inversible dans ce qui suit — on peut toujours s'y ramener, au besoin en modifiant la numérotation des inconnues ξ_i.

Écrivons alors le système (1) sous la forme

$$(9)\qquad \begin{cases} \alpha_{11}\xi_1 + \cdots + \alpha_{n1}\xi_n = \gamma_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{1n}\xi_1 + \cdots + \alpha_{nn}\xi_n = \gamma_n \end{cases}$$

où l'on a posé

$$(10)\qquad \gamma_j = \beta_j - (\alpha_{n+1,j}\xi_{n+1} + \cdots + \alpha_{p,j}\xi_p);$$

comme U est inversible, (9) est un *système de Cramer* par rapport aux inconnues $\xi_1, \ldots, \xi_n$ et par suite admet une et une seule solution quelles que soient les valeurs des seconds membres γ_i : or ceux-ci dépendent uniquement des inconnues $\xi_{n+1}, \ldots, \xi_p$; il s'ensuit donc que le système (1) possède une et une seule solution pour laquelle les inconnues $\xi_{n+1}, \ldots, \xi_p$ ont des valeurs données d'avance.

D'ailleurs, la solution de (9) est donnée par la relation

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \mathrm{U}^{-1}.\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix};$$

posant

$$\mathrm{U}^{-1} = (\nu_{ij})_{1 \leqslant i, j \leqslant n}$$

il vient donc

$$(11)\qquad \xi_i = \nu_{1i}\gamma_1 + \cdots + \nu_{ni}\gamma_n,$$

et en remplaçant les γ_j par leurs valeurs (10) il vient évidemment des formules du type

$$(12)\qquad \xi_i = \nu_{1i}\beta_1 + \cdots + \nu_{ni}\beta_n + \lambda_{n+1,i}\xi_{n+1} + \cdots + \lambda_{pi}\xi_p \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

où les λ_{ki} sont de nouvelles constantes, qui ne dépendent que des coefficients α_{ij} du système (1).

Comme (1) est équivalent à la conjonction de (9) et (10), et comme (9) est équivalent à (11), il est clair que l'ensemble des relations (1) est équivalent à l'ensemble des relations (12). Autrement dit :

Théorème 3. *Supposons que les formes linéaires $f_1, \ldots, f_n$ soient linéairement indépendantes. On peut alors numéroter les inconnues ξ_i de telle sorte que le système* (1) *possède une et une seule solution pour laquelle les inconnues $\xi_{n+1}, \ldots, \xi_p$ aient des valeurs arbitrairement données. S'il en est ainsi, il existe des constantes ν_{ij} et λ_{ki}, ne dépendant que des coefficients α_{ij} du système* (1), *et telles que les solutions de* (1) *soient toutes les suites $(\xi_1, \ldots, \xi_p)$ vérifiant les relations* (12).

Exemple 2. Prenons un système

$$\begin{aligned} a'x + b'y + c'z &= u' \\ a''x + b''y + c''z &= u'' \end{aligned}$$

de deux équations à trois inconnues. Le rang du système est 0, 1 ou 2.

Si le rang est 0, on a

$$a' = b' = c' = a'' = b'' = c'' = 0,$$

et le système n'a de solutions que si $u' = u'' = 0$ (auquel cas toutes les suites (x, y, z) sont des solutions).

Si le rang est 1, cela veut dire que les coefficients $a, \ldots, c''$ ne sont pas tous nuls, mais que les deux formes linéaires figurant dans les premiers membres du système donné sont proportionnelles; si K est commutatif, cela veut dire aussi (§ 19, Exemple 4) que

$$(13)\qquad b'c'' - b''c' = a'c'' - a''c' = a'b'' - a''b' = 0.$$

Supposons alors par exemple $a' \neq 0$; on a nécessairement une relation

$$a''x + b''y + c''z = \rho(a'x + b'y + c'z),$$

ce qui donne en particulier $a'' = \rho a'$, donc

$$\rho = a''/a'.$$

Dans ce cas, le système admet une solution si et seulement si $u'' = \rho u'$, i.e. si $u''a' - u'a'' = 0$. S'il en est ainsi on est ramené à résoudre

$$a'x + b'y + c'z = u'$$

et puisque $a' \neq 0$ la solution « générale » est donnée par

$$x = \frac{u' - b'y - c'z}{a'},$$

en sorte qu'on peut choisir arbitrairement y et z.

Si enfin le système est de rang 2, et si K est commutatif, les relations (13) ne sont pas toutes vérifiées; supposons par exemple que

$$a'c'' - a''c' \neq 0;$$

en écrivant le système donné sous la forme

$$\begin{aligned} a'x + c'z &= u' - b'y \\ a''x + c''z &= u'' - b''y \end{aligned}$$

on est ramené à un système de Cramer en x et z; autrement dit, on peut attribuer à y une valeur arbitraire, et alors la solution du système donné est fournie par les formules

$$x = \frac{c''(u' - b'y) - c'(u'' - b''y)}{a'c'' - a''c'} = \frac{c''u' - c'u''}{a'c'' - a''c'} + \frac{c'b'' - c''b'}{a'c'' - a''c'}y,$$

$$z = \frac{a'u'' - a''u'}{a'c'' - a''c'} + \frac{a''b' - a'b''}{a'c'' - a''c'}y.$$

EXERCICES

Il est parfaitement utopique d'espérer apprendre des Mathématiques, si élémentaires ou si supérieures soient-elles, sans résoudre des Exercices.

Les Exercices qu'on trouvera dans ce livre sont de trois sortes. Certains sont des illustrations pratiques ou même numériques des théories exposées dans le texte; le lecteur débutant ne pourra pas acquérir la technique du calcul sans résoudre une partie appréciable des Exercices de ce genre. D'autres apportent au texte des compléments théoriques élémentaires; en les étudiant, le lecteur s'habituera à manipuler le langage et les modes de raisonnements utilisés dans le texte; ceux de ces Exercices qui ne sont pas *très* faciles sont précédés d'un signe ¶. Enfin, la dernière catégorie est constituée par des Exercices qui apportent au texte des compléments importants et difficiles; ils sont destinés uniquement aux étudiants déjà avancés qui s'intéressent vraiment aux Mathématiques; ces Exercices sont précédés de deux ou même trois signes ¶.

Nous ne saurions trop insister enfin sur le fait que résoudre un Exercice ne consiste pas seulement à se convaincre, à l'aide d'un « brouillon » fait à la hâte, du fait qu'on en a à peu près compris la solution; si cette méthode est admissible pour les Exercices de calcul numérique, il faut par contre s'efforcer de *rédiger intégralement* les Exercices plus théoriques, où l'on doit construire de véritables démonstrations. De cette façon, et uniquement de cette façon, l'étudiant parviendra à acquérir un langage clair et correct, et à utiliser les termes techniques dans leur sens propre, ce qui, en Mathématiques, est le signe le plus certain de la compréhension d'un sujet.

1. On considère dans $\mathbf{R}^4$ les vecteurs

$$(1, 0, 0, -1), \quad (2, 1, 1, 0), \quad (1, 1, 1, 1), \quad (1, 2, 3, 4), \quad (0, 1, [illegible])$$

extraire de ces cinq vecteurs une base du sous-espace qu'ils engendrent.

2. On considère dans $\mathbf{R}^4$ le sous-espace L engendré par les vecteurs

$$(1, 1, 1, 1), \quad (1, -1, 1, -1), \quad (1, 3, 1, 3)$$

et le sous-espace M engendré par

$$(1, 2, 0, 2), \quad (1, 2, 1, 2), \quad (3, 1, 3, 1);$$

calculer les dimensions de $L \cap M$ et $L + M$.

3. Soient V un espace vectoriel de dimension n sur un corps et L un sous-espace de dimension [illegible] r de V. Pour qu'un sous-espace M de V soit un supplémentaire de L dans V, il faut et il [illegible] qu'on ait

$$L \cap M = \{0\}, \quad \dim(M) = n - r.$$

4. Soient V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps, $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de [illegible] $x_1, \ldots, x_r$ des éléments de V en nombre $r \leqslant n$. Pour que les x_i soient linéairement indépendants [illegible] il faut et il suffit qu'il existe un automorphisme u de V tel que l'on ait

$$u(a_i) = x_i \quad \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant r.$$

¶ **5.** Soient L et M des espaces vectoriels de dimension finie sur un corps K, et f un homomor[illegible] phisme de L dans M, de rang r. Montrer qu'il existe une base $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ de L et une [illegible] $(b_j)_{1 \leqslant j \leqslant q}$ de M telles que l'on ait les relations

$$\begin{aligned} f(a_i) &= b_i \quad \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant r \\ f(a_i) &= 0 \quad \text{pour } r + 1 \leqslant i \leqslant p. \end{aligned}$$

En déduire le résultat suivant : soit A une matrice à q lignes et p colonnes à coefficients [illegible] K, de rang r; alors il existe des matrices

$$U \in GL(q, K) \quad \text{et} \quad V \in GL(p, K)$$

telles que

$$\mathrm{UAV} = \begin{pmatrix} 1_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(les 0 figurant au second membre désignent des matrices nulles ayant les nombres de lignes et de colonnes requis pour que le second membre soit une matrice à q lignes et p colonnes). Soient A et B deux matrices à q lignes et p colonnes à coefficients dans K; pour qu'il existe des matrices $\mathrm{U} \in \mathbf{GL}(q, \mathrm{K})$ et $\mathrm{V} \in \mathbf{GL}(p, \mathrm{K})$ telles que $\mathrm{B} = \mathrm{UAV}$, il faut et il suffit que A et B aient même rang.

6. Soient E et F deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel V de dimension finie; pour qu'il existe un automorphisme u de V tel que $\mathrm{F} = u(\mathrm{E})$, il faut et il suffit que $\dim(\mathrm{E}) = \dim(\mathrm{F})$.

7. Soient $x_1, \ldots, x_n$ des éléments d'un espace vectoriel; on suppose que $x_1, \ldots, x_r$ sont linéairement indépendants, et qu'on a des relations

$$x_j = \rho_{j1}x_1 + \cdots + \rho_{jr}x_r \quad (r + 1 \leqslant j \leqslant n).$$

Soit L l'espace des relations linéaires entre $x_1, \ldots, x_n$, i.e. des systèmes de scalaires $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathrm{K}^n$ tels que

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0.$$

Montrer que les $n - r$ éléments

$$(\rho_{j1}, \ldots, \rho_{jr}, 0, \ldots, 0, -1, 0, \ldots, 0),$$

où -1 se trouve à la j^e place, forment une base de L.

8. Soient $f_1, \ldots, f_n$ des formes linéaires sur un espace vectoriel; pour que le système d'équations

$$f_i(x) = \beta_i \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

possède au moins une solution, il faut et il suffit qu'on ait

$$\lambda_1\beta_1 + \cdots + \lambda_n\beta_n = 0$$

pour toute relation linéaire $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ entre $f_1, \ldots, f_n$.

9. Soit K un corps commutatif.

a) Pour qu'une forme linéaire f sur $\mathbf{M}_n(\mathrm{K})$, regardé comme espace vectoriel de dimension n^2 sur K, vérifie

$$f(\mathrm{XY}) = f(\mathrm{YX}),$$

il faut et il suffit qu'il existe un scalaire $\lambda \in \mathrm{K}$ tel que

$$f(\mathrm{X}) = \lambda.\mathrm{Tr}(\mathrm{X}) \quad \text{pour tout } \mathrm{X} \in \mathbf{M}_n(\mathrm{K})$$

(on rappelle — § 12, *Exercice* 8 — que Tr(X) désigne la somme des coefficients diagonaux de X).

b) Déduire de là et du Théorème 3 du § 19 le résultat suivant : pour qu'une matrice $\mathrm{A} \in \mathbf{M}_n(\mathrm{K})$ puisse s'écrire comme somme de matrices de la forme $\mathrm{XY} - \mathrm{YX}$, il faut et il suffit que $\mathrm{Tr}(\mathrm{A}) = 0$.

10. Soient V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps K et $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de V.

a) Soit x un élément non nul de V. Montrer (sans utiliser les résultats du § 19) qu'il existe un indice i tel que les vecteurs $a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n$ forment encore une base de V.

b) Soient $x_1, \ldots, x_p$ des vecteurs linéairement indépendants dans V. A l'aide de la question *a*), et en raisonnant par récurrence sur p, montrer qu'il existe une base de V formée des p vecteurs x_j et de $n - p$ des vecteurs a_i. En déduire une nouvelle démonstration des Théorèmes [illegible] du § 19.

11. Démontrer directement le Corollaire du Théorème 7 en raisonnant par récurrence sur p (on utilisera l'une des équations pour exprimer une inconnue à l'aide des $p - 1$ autres; si on se ramènera à un système de $n - 1$ équations à $p - 1$ inconnues).

¶ **12.** Soient L et M deux espaces vectoriels de dimension finie sur un corps, f une application linéaire de L dans M, et

$${}^t f : \mathrm{M}^* \to \mathrm{L}^*$$

l'application transposée (§ 16). Montrer que $\mathrm{Im}({}^t f)$ est le sous-espace de L^* orthogonal à $\mathrm{Ker}(f)$, et que $\mathrm{Ker}({}^t f)$ est le sous-espace de M^* orthogonal à $\mathrm{Im}(f)$ (utiliser le Théorème 3). Déduire de là que f et sa transposée ont le même rang, et appliquer ce résultat pour obtenir une autre démonstration du Corollaire du Théorème 16. Montrer que si f est un endomorphisme de L, les noyaux de f et ${}^t f$ ont même dimension.

13. Soit K un corps. Pour qu'une matrice $\mathrm{A} \in \mathbf{M}_n(\mathrm{K})$ soit inversible, il faut et il suffit que A ne soit pas diviseur de zéro dans l'anneau $\mathbf{M}_n(\mathrm{K})$.

14. Soit X une matrice à coefficients dans un corps. Montrer que le rang de X n'est pas modifié lorsqu'on ajoute à une ligne (resp. colonne) de X une combinaison linéaire quelconque des autres lignes (resp. colonnes) de X, ou lorsqu'on fait subir une permutation quelconque aux lignes (resp. colonnes) de X.

15. Soient V un espace vectoriel complexe de dimension finie et $(a_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ une base de V; On regarde V comme un espace vectoriel réel; montrer que les $2n$ vecteurs

$$a_1, \ldots, a_n, \quad ia_1, \ldots, ia_n$$

forment une base de V sur **R**. En conclure que

$$\dim_{\mathbf{R}}(\mathrm{V}) = 2.\dim_{\mathbf{C}}(\mathrm{V}).$$

¶ **16.** Soient L un corps et K un sous-corps de L; on dit que L est une **extension de degré fini** de K si L, regardé comme espace vectoriel sur K, est de dimension finie; la dimension en question s'appelle alors le **degré de L sur K**, et se note [L : K].

Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur L. On regarde V comme un espace vectoriel sur K; montrer que, si L est extension finie de K, on a

$$\dim_{\mathrm{K}}(\mathrm{V}) = [\mathrm{L} : \mathrm{K}].\dim_{\mathrm{L}}(\mathrm{V})$$

(imiter le raisonnement de l'*Exercice* précédent).

Soient K un corps, L un corps extension finie de K, et M un corps extension finie de L. Montrer que M est extension finie de K et que

$$[\mathrm{M} : \mathrm{K}] = [\mathrm{M} : \mathrm{L}].[\mathrm{L} : \mathrm{K}].$$

17. Soit

$$L_1 \xrightarrow{f_1} L_2 \xrightarrow{f_2} L_3 \ldots \xrightarrow{f_n} L_{n+1}$$

une suite formée d'espaces vectoriels de dimension finie sur un corps, et d'homomorphismes de chaque espace dans le suivant. On suppose que f_1 est injectif, f_n surjectif, et que

$$\mathrm{Im}(f_i) = \mathrm{Ker}(f_{i+1}) \quad \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Montrer qu'on a alors

$$\dim(L_1) - \dim(L_2) + \dim(L_3) - \cdots + (-1)^n \dim(L_{n+1}) = 0.$$

¶ **18.** Soit p un nombre premier. Quelles conditions doivent vérifier les entiers u et v pour qu'on puisse résoudre les congruences

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &\equiv u \pmod p \\ 4x + 5y + 6z &\equiv v \pmod p)? \end{aligned}$$

¶ **19.** Soit V un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps.

a) Soient $L_1, \ldots, L_r$ des sous-espaces vectoriels de V tels que

$$L_1 \subset L_2 \subset \ldots \subset L_r = V;$$

on pose $\dim(L_i) = d_i$; montrer qu'il existe une base de V telle que, pour chaque i, les d_i premiers éléments de cette base forment une base de L_i.

b) Soit u un endomorphisme nilpotent de V, i.e. tel que $u^k = 0$ pour un entier k au moins. Soit r le plus petit entier non nul tel que

$$u^r = 0;$$

on pose

$$L_1 = \mathrm{Ker}(u), \quad L_2 = \mathrm{Ker}(u^2), \quad \ldots, \quad L_r = \mathrm{Ker}(u^r).$$

Montrer que ces sous-espaces de V vérifient les hypothèses de la question *a*). En déduire qu'il existe une base de V par rapport à laquelle la matrice de u est de la forme (*)

$$\begin{pmatrix} 0 & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 0 & * & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \end{pmatrix}.$$

Réciproque?

c) Soit $N \in M_n(K)$ une matrice nilpotente. Montrer qu'il existe une matrice $U \in GL(n, K)$ telle que

$$UNU^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Réciproque?

¶¶ **20.** Soit V un espace vectoriel de dimension finie n sur **Q**, et soit M un sous-*groupe* de type fini de V.

a) Montrer qu'il existe une base de V par rapport à laquelle les coordonnées de tout $x \in M$ soient entières.

(*) On trouvera un résutat plus précis au § 35.

b) Montrer qu'il existe un entier $r \leqslant n$ tel que M soit le sous-groupe de V engendré par r éléments linéairement indépendants convenablement choisis de V (autrement dit que le groupe M est isomorphe à $\mathbf{Z}^r$ pour un entier $r \leqslant n$). (Utiliser le Théorème 3 du § 18.)

c) Soit $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de V. Montrer qu'il existe une base $(b_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de V telle que (*i*) M soit engendré par $b_1, \ldots, b_r$ (*ii*) la matrice de passage de la base (a_i) à la base (b_i) soit triangulaire (imiter la démonstration du Théorème 3 du § 18).

d) En déduire que *toute matrice* $X \in M_n(\mathbf{Q})$ *est produit d'une matrice* $U \in GL(n, \mathbf{Z})$ *et d'une matrice triangulaire.*

¶ **21.** Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n à coefficients dans un corps. Montrer qu'on a

$$\mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B) - n \leqslant \mathrm{rg}(AB) \leqslant \mathrm{Min}(\mathrm{rg}(A), \mathrm{rg}(B))$$

(inégalités de Sylvester).

22. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel V de dimension finie sur un corps *commutatif* K; montrer que, si A et B sont les matrices de u par rapport à deux bases quelconques de V, on a

$$\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B)$$

(§ 12, *Exercice* 8). La valeur commune des traces des matrices de u par rapport aux diverses bases de V s'appelle la **trace de l'endomorphisme** u, et se note

$$\mathrm{Tr}(u).$$

Montrer qu'on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(u+v) &= \mathrm{Tr}(u) + \mathrm{Tr}(v), \quad & \mathrm{Tr}(\lambda u) &= \lambda \mathrm{Tr}(u) \quad \text{pour } \lambda \in K, \\ \mathrm{Tr}(u \circ v) &= \mathrm{Tr}(v \circ u), & \mathrm{Tr}(j_V) &= \dim(V), \end{aligned}$$

et que ces propriétés caractérisent entièrement l'application

$$\mathrm{Tr} : \mathcal{L}(V) \to K.$$

Montrer qu'on a aussi

$$\mathrm{Tr}(u) = \mathrm{Tr}({}^t u)$$

pour tout endomorphisme u de V.

¶ **23.** Pour qu'un système d'équations linéaires

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

à coefficients dans un corps, possède au moins une solution, il faut et il suffit que les deux matrices

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

possèdent le même rang.

¶¶ **24.** Soient L un corps commutatif et A un sous-*anneau* de L; on suppose que, comme A-module, L est de type fini; on se propose d'en déduire que A est un sous-*corps* de L.

a) Soit K l'ensemble des $x \in L$ qui peuvent s'écrire sous la forme u/v avec $u, v \in A$ et $v \neq 0$.

Montrer que c'est un sous-corps de L, et que L est de dimension finie en tant qu'espace vectoriel sur K.

b) Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ un système de générateurs du A-module L; on choisit une base $(v_0, v_1, \ldots, v_r)$ de L regardé comme espace vectoriel sur K, telle que $v_0 = 1$, et on pose

$$u_i = \sum_{0 \leqslant j \leqslant r} x_{ij} v_j$$

avec des $x_{ij} \in$ K. Montrer que le A-module K est engendré par les éléments x_{i0}.

c) Terminer la démonstration à l'aide de l'*Exercice* 9 des §§ 10, 11.

§ 20

Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants (*) par la méthode des éliminations successives (celle-ci consiste à utiliser une équation pour calculer une inconnue en fonction des autres, puis à reporter le résultat ainsi obtenu dans les autres équations, de façon à se ramener à un système comportant une inconnue et une équation de moins que le système initial).

1.
$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 9 \\ 3x - 5y + z &= -4 \\ 4x - 7y + z &= 5 \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} 2x + 3y + 5z &= 10 \\ 3x + 7y + 4z &= 3 \\ x + 2y + 2z &= 3 \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} 5x + 2y + 3z &= -2 \\ 2x - 2y + 5z &= 0 \\ 3x + 4y + 2z &= -10 \end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned} 4bcx + acy - 2abz &= 0 \\ 5bcx + 3acy - 4abz &= -abc \\ 3bcx + 2acy - abz &= 4abc \end{aligned} \qquad \text{(on suppose } abc \neq 0\text{)}$$

5.
$$\begin{aligned} x + y + z &= a \\ x + \omega y + \omega^2 z &= b \\ x + \omega^2 y + \omega z &= c \end{aligned} \qquad \text{(où } \omega \text{ est une racine cubique de l'unité)}$$

6.
$$\begin{aligned} ax - 3y + 5z &= 4 \\ x - ay + 3z &= 2 \\ 9x - 7y + 8az &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(discuter suivant les valeurs de } a\text{)}$$

(*) Dans les *Exercices* 1 à 17 (extraits du recueil de Proskurjakov, où l'on en trouvera beaucoup d'autres) le corps de base est **C**. Toutefois, le lecteur désireux d'introduire plus de variété dans les calculs pourra se placer sur un corps commutatif K quelconque et tenir compte de la caractéristique de K, ou bien chercher les solutions dans l'anneau **Z** des entiers rationnels lorsque la question a un sens. Il va de soi d'autre part qu'après avoir étudié la théorie des déterminants, le lecteur devra l'appliquer à la résolution de ces *Exercices*.

7.
$$\begin{aligned} ax + 2z &= 2\\ 5x + 2y &= 1\\ x - 2y + bz &= 3 \end{aligned}$$
(discuter suivant les valeurs de a et b)

8.
$$\begin{aligned} 2x + 2y - z + t &= 4\\ 4x + 3y - z + 2t &= 6\\ 8x + 5y - 3z + 4t &= 12\\ 3x + 3y - 2z + 2t &= 6 \end{aligned}$$

9.
$$\begin{aligned} 2x - y - 6z + 3t &= -1\\ 7x - 4y + 2z - 15t &= -32\\ x - 2y - 4z + 9t &= 5\\ x - y + 2z - 6t &= -8 \end{aligned}$$

10.
$$\begin{aligned} 2x - 5y + 3z + t &= 5\\ 3x - 7y + 3z - t &= -1\\ 5x - 9y + 6z + 2t &= 7\\ 4x - 6y + 3z + t &= 8 \end{aligned}$$

11.
$$\begin{aligned} 6x + 6y + 5z + 18t + 20u &= 14\\ 10x + 9y + 7z + 24t + 30u &= 18\\ 12x + 12y + 13z + 27t + 35u &= 32\\ 8x + 6y + 6z + 15t + 20u &= 16\\ 4x + 5y + 4z + 15t + 15u &= 11 \end{aligned}$$

12.
$$\begin{aligned} 2x + 7y + 3z + t &= 5\\ x + 3y + 5z - 2t &= 3\\ x + 5y - 9z + 8t &= 1\\ 5x + 18y + 4z + 5t &= 12 \end{aligned}$$

13.
$$\begin{aligned} 2x + 5y - 8z &= 8\\ 4x + 3y - 9z &= 9\\ 2x + 3y - 5z &= 7\\ x + 8y - 7z &= 12 \end{aligned}$$

14.
$$\begin{aligned} 6x + 3y + 2z + 3t + 4u &= 5\\ 4x + 2y + z + 2t + 3u &= 4\\ 4x + 2y + 3z + 2t + u &= 0\\ 2x + y + 7z + 3t + 2u &= 1 \end{aligned}$$

(on déterminera en outre toutes les solutions *entières* de ce dernier système).

15.
$$\begin{aligned} 2x + 3y + z + 2t &= 3\\ 4x + 6y + 3z + 4t &= 5\\ 6x + 9y + 5z + 6t &= 7\\ 8x + 12y + 7z + \lambda t &= 9 \end{aligned}$$
(discuter suivant les valeurs de λ)

16.
$$\begin{aligned} ax + y + z &= 1\\ x + ay + z &= 1\\ x + y + az &= 1 \end{aligned}$$
(discuter suivant les valeurs de a)

17.
$$\begin{aligned} (a+1)x + y + z &= a^2 + 3a\\ x + (a+1)y + z &= a^3 + 3a^2\\ x + y + (a+1)z &= a^4 + 3a^3 \end{aligned}$$
(discuter suivant les valeurs de a).

18. Soit K un corps. On considère d'une part le système

$$(i)\qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{n1}x_n = b_1\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{1n}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

de n équations linéaires à n inconnues, à coefficients dans K, et d'autre part le système

$$(ii)\qquad \begin{cases} a_{11}y_1 + \cdots + a_{n1}y_n - b_1y_{n+1} = 0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{1n}y_1 + \cdots + a_{nn}y_n - b_ny_{n+1} = 0 \end{cases}$$

de n équations linéaires et homogènes à $n+1$ inconnues.

a) Montrer que si une solution de (ii) vérifie $y_{n+1} \neq 0$, alors les

$$x_i = y_i y_{n+1}^{-1}$$

forment une solution de (i), et que réciproquement toute solution de (i) permet de construire une solution de (ii) telle que $y_{n+1} \neq 0$.

b) Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes : le système homogène associé à (i) ne possède aucune solution non triviale ; toute solution non triviale de (ii) vérifie $y_{n+1} \neq 0$.

c) En utilisant le Corollaire du Théorème 7 du § 19, déduire de là une démonstration du fait que les conditions *a*) et *e*) du Théorème 2 du § 20 sont équivalentes.

19. Si un système d'équations linéaires à coefficients réels admet au moins une solution complexe, il admet une solution réelle.

¶¶ 20. Soient L un corps et K un sous-corps de L.

a) On considère un système de n équations linéaires et homogènes à n inconnues, à coefficients dans K. Montrer que si le système admet une solution non triviale dans L, il admet une solution non triviale dans K (raisonner par récurrence sur n en utilisant par exemple la méthode des éliminations successives).

b) Montrer que si une matrice $A \in M_n(K)$ est inversible dans l'anneau $M_n(L)$, elle est inversible dans l'anneau $M_n(K)$.

c) Si des éléments de K^n (resp. des formes linéaires sur K^n) sont linéairement indépendants sur K, ils sont aussi linéairement indépendants sur L, et réciproquement.

d) Pour qu'un système d'équations linéaires, à coefficients et seconds membres dans K, admette une solution dans K, il faut et il suffit qu'il admette une solution dans L.

e) Les solutions dans L d'un système d'équations linéaires et homogènes à coefficients dans K, sont les combinaisons linéaires, à coefficients dans L, des solutions dans K du système considéré.

f) Si un système d'équations linéaires et homogènes à coefficients dans **Z** admet une solution non triviale dans **C**, il admet une solution non triviale dans **Z**.