Relations binaires sur un ensemble.

Relations d'équivalence, relation d'ordre.

Table des matières

0.1 Définition et exemples de relation binaires sur un ensemble.

0.1.1 Définitions. Soit un ensemble E. Une *relation binaire* $\mathcal{R}$ *sur* E est la donnée d'une partie $\Gamma_{\mathcal{R}} \subset E \times E$, dite *graphe* de la relation $\mathcal{R}$, de l'ensemble produit $E \times E$ de E par lui même.
Si $x, y \in E$ on dit que x et y (dans cet ordre) sont *liés par la relation* $\mathcal{R}$ et on note $x\mathcal{R}y$ si $(x, y) \in \Gamma_{\mathcal{R}}$
Si $X \subset E$ est une partie d'un ensemble E et $\mathcal{R}$ est une relation sur E la *relation* $\mathcal{R}_X$ induite de $\mathcal{R}$ sur X est la relation de graphe $\Gamma_{\mathcal{R}_X} = \Gamma_{\mathcal{R}} \cap X \times X$.
Si $x, y \in E$ ne sont pas lié par $\mathcal{R}$ on note $x \not\mathcal{R} y$ et dit que x et y sont liés par la *relation complémentaire* $\not\mathcal{R}$ de $\mathcal{R}$, dont le graphe est $\Gamma_{\not\mathcal{R}} = (X \times X) \setminus \Gamma_{\mathcal{R}}$

0.1.2 Exemples.
1. Sur tout ensemble E l'*égalité* $=$ sur E est une relation binaire. Son graphe est $\Gamma_= = \Delta_E = \{(x, x) \mid x \in E\}$, la *diagonale* de l'ensemble E.
2. Si X est un ensemble, l'inclusion $\subset$ est une relation sur l'ensemble $E = \mathcal{P}(X)$ des parties de X.
3. Soit $\mathcal{N} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ l'ensemble des entiers positifs *(strictement) inférieur* $<$ sur $\mathcal{N}$ est définie par : pour $m, n \in \mathcal{N}$ alors $m < n$ si et seulement si il y a $l \in \mathcal{N}$ tel que $l + m = n$.
4. *inférieur ou égal* $\leq$ sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels est définie par : pour $m, n \in \mathbb{N}$, alors $m \leq n$ si et seulement si il y a $l \in \mathbb{N}$ tel que $l + m = n$.
5. La relation *divise* $|$ sur l'ensemble $\mathcal{N}$ des entiers positifs est définie par : si $m, n \in \mathbb{N}$ alors $m|n$ si il y a $l \in \mathcal{N}$ tel que $l \cdot m = n$.
6. Si V est un espace vectoriel réel la *colinéarité* $\mathcal{L}$ *sur* V est définie par : pour $u, v \in V$, alors $u\mathcal{L}v$ si et seulement si et seulement si il y a $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tels que $x \cdot u + y \cdot v = 0$.

   0.1.3 Exercice. Si $u, v \in V$ on note $< v >, < v, u >$ les sous-espaces vectoriels de V engendrés respectivement par v et par $\{v, u\}$.
   (a) Si $< v, u > \subset < v >$ alors $u\mathcal{L}v$. la réciproque est-elle vraie ?
   (b) Prouver que si $0 \neq v \in V$ alors pour tout $u \in V$ il y a équivalence entre :

   i. $u\mathcal{L}v$ ii. il y a $t \in \mathbb{R}$ tel que $u = t \cdot v$. iii. $< v, u > = < v >$ iv. $< v, u > \subset < v >$

0.2 Propriétés d'une relation binaires sur un ensemble.

0.2.1 Définitions. Soit $\mathcal{R}$ une relation sur un ensemble X. La relation $\mathcal{R}$ est :
1. *réflexive* si pour tout $x \in E$ on a $x\mathcal{R}x$ (équivalent à le graphe $\Gamma_{\mathcal{R}} \supset \Delta_X$ contient la diagonale).
2. *symétrique* si pour tout $x, y \in E$ alors $x\mathcal{R}y$ implique $y\mathcal{R}x$
3. *antisymétrique* si pour tout $x, y \in E$ alors $(x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x)$ implique $x = y$
4. *transitive* si pour tout $x, y, z \in E$ alors $(x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z)$ implique $x\mathcal{R}z$

0.2.2 Exercices.
1. Dans **0.1.2** : **1**, **2**, **4**, **5**, **6** sont réflexives, mais **3** ne l'est pas.
2. Dans **0.1.2** : **1** et **6** sont symétriques, mais **3**, **4**, **5** ne le sont pas et **2** ne l'est que si $X = \emptyset$.
3. Dans **0.1.2** : **1**, **2**, **3**, **4**, **5** sont antisymétriques, mais **6** ne l'est que si $V = 0$.
4. Dans **0.1.2** : **1**, **2**, **3**, **4**, **5** sont transitives, mais **6** ne l'est que si $\dim(V) \leq 1$.

1 Relations d'équivalence.

1.1 Définition et exemples de relations d'équivalence.

1.1.1 Définition. Une *relation d'équivalence* sur un ensemble E est une relation $\mathcal{R}$ sur E qui est réflexive, symétrique et transitive. On note alors $x \equiv y \bmod \mathcal{R}$ pour $x\mathcal{R}y$.

1.1.2 Exemples. 1. Dans **0.1.2** : **1** est d'équivalence mais **2**, **3**, **4**, **5** et, si $\dim(V) > 1$, **6** ne le sont pas. Par contre la relation induite par la colinéarité **6** sur $V \setminus \{0\}$ est une relation d'équivalence.

Démonstration : D'après l'exercice **0.2.2** **1** et **2** il suffit de montrer la transitivité de $\mathcal{L}_{V\setminus\{0\}}$. Si $u, v, w \in V \setminus \{0\}$ tels que $u\mathcal{L}v$ et $v\mathcal{L}w$ alors l'exercice 0.1.3 pour $u,$ donne $< u, v > \subset < v >$ et $< v, w > \subset < w >$ donc $< u, v, w > \subset < v, w > \subset < w >$ d'où, puisque $< u, w > \subset < u, v, w >$, on tire $< u, w > \subset < w >$, soit $u\mathcal{L}w$.

2. Soit $f : X \to E$ une application alors
   (a) la relation $\bmod(f)$ sur X définie par $x \equiv y \bmod(f)$ si et seulement si $f(x) = f(y)$ est une relation d'équivalence sur X.
   Comme $=$ est d'équivalence cela suit, si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E, de :
   (b) la relation $f^*(\mathcal{R})$ sur X définie par $x \equiv y \bmod f^*(\mathcal{R})$ ssi $f(x) \equiv f(y) \bmod \mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur X.

Démonstration : Pour tout $x, y, z \in E$ comme $f(x) \equiv f(x) \bmod \mathcal{R}$ puisque $\mathcal{R}$ est réflexive on a $x \equiv x \bmod f^*(\mathcal{R})$ donc $f^*(\mathcal{R})$ est réflexive.
Si $x \equiv y \bmod f^*(\mathcal{R})$, par définition $f(x) \equiv f(y) \bmod \mathcal{R}$ donc, puisque $\mathcal{R}$ est symétrique on a $f(y) \equiv f(x) \bmod \mathcal{R}$ *c. à d.* $y \equiv x \bmod f^*(\mathcal{R})$ et $f^*(\mathcal{R})$ est symétrique.
Si $x \equiv y \bmod f^*(\mathcal{R})$ et $y \equiv z \bmod f^*(\mathcal{R})$ alors $f(x) \equiv f(y) \bmod \mathcal{R}$ et $f(y) \equiv f(z) \bmod \mathcal{R}$ donc, $\mathcal{R}$ étant transitive, $f(x) \equiv f(z) \bmod \mathcal{R}$: $x \equiv z \bmod f^*(\mathcal{R})$ et $f^*(\mathcal{R})$ est tr

1.1.3 Remarque. Si $f : X \to E$ est l'inclusion d'une partie $X \subset E$ alors $f^*(\mathcal{R}) = \mathcal{R}_X$ est la relation induite sur X

1.1.4 Exercices. 1. Si $X = \mathcal{N}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}$ et $m, n, N \in X$ on note $m \equiv n \bmod(N)$ et dit m *congru à* n *modulo* N, si il y a $p, q \in X$ tels que $m + pN = n + qN$. Prouver que $\equiv \bmod(N)$ est une relation d'équivalence.

2. Soit $A = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \{0, 1\}, B = \mathcal{N}, \mathbb{Z}, A[X]$ et $E = B \times (B \setminus \{0\})$. Prouver que la relation $\mathcal{R} = \underset{\text{frac}}{\sim}$, dite d'*égalité des fractions de* B définie par $(P_1, Q_1) \underset{\text{frac}}{\sim} (P_2, Q_2)$ si et seulement si il y a $Q \in (B \setminus \{0\})$ tel que $Q \cdot (P_1 \cdot Q_2 - P_2 \cdot Q_1) = 0$ est une relation d'équivalence.

1.2 Classes d'équivalence et ensemble quotient.

Dans cette sous-section on se fixe un ensemble E et une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur E.

1.2.1 Définition. Soit $x \in E$. La *classe (d'équivalence) de* $x \in E$ est

$$\overline{x} = \overline{x}_{\mathcal{R}} = \{t \in E \mid t \equiv x \bmod \mathcal{R}\}$$

1.2.2 Exemples. 1. Soit V un espace vectoriel réel, $\mathcal{L}$ la colinéarité sur l'ensemble $E = V \setminus \{0\}$ des vecteurs non nuls de V et $x \in E$ alors la classe d'équivalence de x est $\overline{x} = \{t \cdot x \mid 0 \neq t \in \mathbb{R}\}$, l'ensemble des points non nuls de la droite engendrée par x.

2. Soit $N \in \mathcal{N}$ et $E = \mathcal{N}$ muni de $\equiv \bmod(N)$. Soit $m \in \mathcal{N}$. Si $m = kN$ est multiple de N alors $\overline{m} = \{lN \mid l \in \mathcal{N}\}$. Sinon la division euclidienne par N de $m = qN + r$ a un reste r et $\overline{m} = \{lN + r \mid l \in \mathcal{N}\}$ est l'ensemble des entirs positifs (non divisibles par N) qui ont même reste dans la division par N.

.

1.2.3 PROPOSITION. *1. Pour tout $x \in E$ on a $x \in \overline{x}$ donc $\overline{x} \neq \emptyset$.*

2. Pour tout $x, y \in E$ il y a équivalence entre :

(a) $x \equiv y \bmod \mathcal{R}$ (b) $\overline{x} \subset \overline{y}$ (c) $\overline{x} \cap \overline{y} \neq \emptyset$ (d) $\overline{x} = \overline{y}$

Démonstration : Comme $\mathcal{R}$ est réflexive on a $x \equiv x \bmod \mathcal{R}$ donc $x \in \overline{x}$ et le premier point. Pour le second :

Si **(2c)** il y a $t \in \overline{x} \cap \overline{y}$ donc $t \equiv x \bmod \mathcal{R}$, soit par symétrie $x \equiv t \bmod \mathcal{R}$ et $t \equiv y \bmod \mathcal{R}$ d'où par transitivité $x \equiv y \bmod \mathcal{R}$, ainsi **(2c)⇒(2a)**
Si **(2a)**, pour tout $z \in \overline{x}$, on a $z \equiv x \bmod \mathcal{R}$ et $x \equiv y \bmod \mathcal{R}$ d'où par transitivité $z \equiv y \bmod \mathcal{R}$ *c. a d.* $z \in \overline{y}$ et $\overline{x} \subset \overline{y}$, ainsi **(2a)⇒(2b)**
Si **(2b)**, d'après **(1)** on a $x \in \overline{x} \subset \overline{x} \cap \overline{y}$ donc $\overline{x} \cap \overline{y} \neq \emptyset$, ainsi **(2b)⇒(2c)** et ces trois premiers énoncés sont équivalents.
Comme **(2d)⇒(2b)** il suffit pour conclure de remarquer que, si on a **(2a)** on a $x \equiv y \bmod \mathcal{R}$, donc par symétrie $y \equiv x \bmod \mathcal{R}$.
(2a)⇒(2b), déjà prouvée donne alors $\overline{x} \subset \overline{y}$ et $\overline{y} \subset \overline{x}$ d'où $\overline{y} = \overline{x}$, ainsi **(2a)⇒(2d)**) d'où l'équivalence du dernier énoncé avec les trois premiers. □

1.2.4 Définition. Une *partition d'un* ensemble E est une famille $(Y_t)_{t \in T}$ de parties $T_t \subset E$ vérifiant

1. Pour tout $t \in T$ on a $Y_t \neq \emptyset$
2. Pour tout $s \neq t \in T$ on a $Y_s \neq Y_t$
3. Pour tout $x \in E$ il y a $t \in T$ tel que $x \in Y_t$

On note $X = \amalg_{t \in T} Y_t$.

La proposition **1.2.3** se reformule donc en *Les classes d'équivalences de $\mathcal{R}$ sur E forment une partition de E.*

1.2.5 Définitions. Les classes d'équivalences de $\mathcal{R}$ forment une partie $\{\overline{x} \,|\, x \in E\} \subset \mathcal{P}(E)$ de $\mathcal{P}(E)$ dite *ensemble quotient de E par $\mathcal{R}$*. On le note $E/_{\mathcal{R}} = \{\overline{x} \,|\, x \in E\}$.
L'application envoyant chaque élément sur sa classe est l'*application quotient*[1] *de* $\mathcal{R}$, on la note

$$\pi = \pi_{\mathcal{R}} : E \to E/\mathcal{R}, \pi(x) = \overline{x}$$

.

Un système de représentants de $\mathcal{R}$ dans E est une partie $R \subset E$ contenant un et un seul élément par classe d'équivalence : pour tout $x \in E$ $\operatorname{card}(\overline{x} \cap R) = 1$.

[1] Ainsi toute relation d'équivalence est donnée par le procédé de l'exemple **1.1.2 2a**. Ce n'est pas la mort des relations d'équivalence car, via ces ensembles et applications quotient, elles permettent de construire de nouveaux ensembles à partir d'ensembles connus comme dans les exemples **1.2.6** ci-dessous.

1.2.6 Exemples. 1. Les ensembles quotients des relatins d'équivalences de **1.1.4 2** sont respectivement $\mathbb{Q}_{>0}$ les rationnels positifs, $\mathbb{Q}$ les rationnels et $A(X)$ les fractions rationnelles à coefficients dans A.

2. $\{1, \ldots, N\}$ est un système de représentants pour $\equiv \bmod(N)$ sur $\mathcal{N}$. Si $0 < N \in \mathbb{N}$ alors $\{0, \ldots, N-1\}$ est un système de représentants pour $\equiv \bmod(N)$ ur $\mathbb{N}$..
3. L'ensemble quotient de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par la colinéarité est noté $P^1(\mathbb{R})$ et appelé la *droite projective réelle.*
La classe d'équivalence de $(u, v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est notée $[u : v] = \overline{(u, v)} \in P^1(\mathbb{R})$.
Ainsi $\{[t : 1] \,|\, t \in \mathbb{R}\} \cup \{[1 : 0]\}$ est un système de représentants de la colinéarité et $[t : 1] \mapsto t, [1 : 0] \mapsto \infty$ identifie $P^1(\mathbb{R})$ à $\mathcal{R} \cup \{\infty\}$.

2 Relations d'ordre sur un ensemble E.

2.1 Définition et exemples.

2.1.1 Définition. Une *relation d'ordre*[2] sur un ensemble E est une relation binaire sur E, réflexive, anti-symétrique et transitive. On utilise $\prec$ pour la noter[3] et dit que $(E, \prec_{\mathcal{R}})$ est un *ensemble ordonné.*

[2] ou un *ordre.*

[3] ou $\prec_{\mathcal{R}}$ si il y a plusieurs ordres dans le contexte.

2.1.2 Exemples. $=$ sur E ; $\subset$ sur $\mathcal{P}(\mathcal{X})$; $\leq$ sur $\mathcal{N}$; $\leq$ sur $\mathbb{R}$; $|$ sur $\mathcal{N}$, le raffinement $<$ sur $A(a,b)$, les subdivisions de $[a,b]$ sont des ordres mais, $<$ sur $\mathcal{N}$ (ou sur $\mathbb{R}$) n'étant pas réflexive n'est pas une relation d'ordre.

2.1.3 Exercice. Si $\prec$ est un ordre sur E alors $\succ$ défini par $x \succ y$ si e seulement si $y \prec x$ est un ordre sur E, dit *opposé de* $\prec$.

2.1.4 Définition. Soit $(E, \prec_E), (F, \prec_F)$ deux ensembles ordonnés.
Une *application croissante* [resp. *décroissante*] $f : (E, \prec_E) \to (F \prec_F)$ est $f : E \to F$ telle ;
que pour tout $x, y \in E$ avec $x \prec_E y$ on a $f(x) \prec_F f(y)$ [resp. $f(y) \prec_F f(x)$]

2.1.5 Exercice. Soit X un ensemble et $B \subset X$. On considère l'ensemble ordonné $(\mathcal{P}(X), \subset)$ et les applications $u_B, \eta_B, c_B : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ définies par $u_B(A) = A \cup B$, $\eta_B(A) = A \cap B$, $c_B(A) = B \setminus A$.
Prouver que u_B et η_B sont croissantes et que c_B est décroissante.

2.1.6 Proposition. *Soit* $(E, \prec_E), (F, \prec_F), (G, \prec_G)$ *trois ensembles ordonnés et* $f : (E, \prec_E) \to (F, \prec_F)$, $\quad g : (F, \prec_F) \to (G, \prec_G)$ *deux applications croissantes alors :*

(i) $\mathrm{Id}_E : (E, \prec_E) \to (E, \prec_E)$ *est croissante.*

(ii) la composée $g \circ f(E, \prec_E) \to (G, \prec_G)$ *est croissante.*

2.1.7 Exercices.

1. Prouver que l'application $f : (\mathbf{R}, \leq) \to (\mathbf{R}, \leq)$, $f(x) = 1 - x$ est décroissante. Après l'avoir déterminée, dire si l'application composée $f \circ f$ est aussi décroissante.
2. Soit $(E, \prec_E), (F, \prec_F), (G, \prec_G)$ des ensembles ordonnés et $f : (E, \prec_E) \to (F, \prec_F)$, $\quad g : (F, \prec_F) \to (G, \prec_G)$ qui sont soit croissante soit décroissante. Dans chacun des trois cas non couverts par la proposition **2.1.6** que dire de l'application composée $g \circ f : (E, \prec_E) \to (G, \prec_G)$? Prouver les trois variantes de la proposition que vous venez d'énoncer.

2.1.8 Définition. Un *isomorphisme* d'un ens. ordonné $(E, \prec_E)$ sur un ens. ordoné $(G, \prec_G)$ est une application croissante $f : (E, \prec_E) \to (F, \prec_F)$ telle que :
il y a $g : (F, \prec_F) \to (E, \prec_E)$ croissante avec $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_E$.

2.1.9 Remarque. Un isomorphisme d'ensembles ordonnés est une application croissante bijective mais la réciproque n'est pas vraie :

2.1.10 Exercices. 1. Prouver que si $(E, \prec_E)$ est un ensemble ordonné alors $\mathrm{Id}_E : (E, \prec_E) \to (E, \prec_E)$ est croissante.
2. Prouver que $\mathrm{Id}_{\mathcal{N}} : (\mathcal{N}, |) \to (\mathcal{N}, \leq)$ est croissante et que $\mathrm{Id}_{\mathcal{N}} : (\mathcal{N}, \leq) \to (\mathcal{N}, |)$ ne l'est pas [un morphisme d'ensemble ordonné, bijectif mais non isomorphisme].
3. Est-ce que $\mathrm{Id}_{\mathbf{N}} : (\mathbf{N}, |) \to (\mathbf{N}, \leq)$ est croissante ? (On utilisera que pour tout $x \in \mathbf{N}$ on a $x \cdot 0 = 0$: tout $x \in \mathbf{N}$ divise 0) ?

2.2 Propriétés d'une relation d'ordre.

Dans cette sous-section on se fixe un ensemble ordonné $(E, <_E)$

2.2.1 Définition. Une relation d'orde $<_E$ est *totale* (ou l'ordre $<_E$ est *total*) si pour tout $x, y \in E$:

$$\text{soit} \quad x <_E y \qquad \text{soit} \quad y <_E x$$

2.2.2 Exemples. $\leq$ sur $\mathcal{N}$ (resp. $\mathbb{R}$) est total, mais $|$ sur $\mathcal{N}$ n'est pas total et, si X a au moins deux éléments, $\subset$ sur $\mathcal{P}(X)$ n'est pas total.

Démonstration : Pour $x = 2, y = 3 \in \mathcal{N}$ on a $2 \not| 3$ et $3 \not| 2$. De même, si $a \neq b \in X$, on a $\{a\} \not\subset \{b\}$.

2.2.3 Exercice. Soit $(E, \prec_E), (F, \prec_F)$ deux ensembles ordonnés avec $\prec_E$ total. Prouver que :
Une application croissante $f : (E, \prec_E) \to (F, \prec_F)$ est isomorphisme d'ensemble ordonné ssi elle est bijective. [*et qu'alors $\prec_F$ est total*], comparer avec **2.1.10 2**

2.2.4 Définition. Un *majorant* [respectivement un *minorant*] d'une partie $A \subset E$ est un élément $M \in E$ [respectivement $m \in E$] tel que pour tout $x \in E$ on a $x <_E M$ [respectivement $m <_E x$].

2.2.5 Exemple. Les minorant de $A = \{3 \cdot k \,|\, k \in \mathcal{N}\} \subset \mathcal{N}$, muni de $\leq$, sont $1, 2, 3$. Cette partie A n'a pas de majorant puisque si $M \in \mathcal{N}$ on a $3 \cdot M \in A$ et $3 \cdot M \not\leq M$.

2.2.6 Définition et Proposition. Soit $A \subset E$ il y a au plus un élément $a_0 \in A$ [resp. $a_1 \in A$] tel que pour tout $a \in A$ on ait $a_0 <_E a$ [resp. $a <_E a_1$]
Un tel $a_0 \in A$ [resp. $a_1 \in A$] noté $\min A$ [resp. $\max A$] est le *plus petit* [resp. *plus grand*] *élément* de A.

Démonstration : [pour a_0] Si a_0' est un autre, comme $a_0' \in A$ on a $a_0 <_E a_0'$ et, Comme $a_0 \in A$ on a $a_0' <_E a_0$, d'où $a_0' = a_0$ par l'antisymétrie de $<_E$. □

2.2.7 Corollaire et Définition. Soit $A \subset E$ l'ensemble $m(A) = \{m \in E \,|\, \forall a \in A, m <_E a\}$ [4] des minorants [5] de A a au plus un plus grand [6] élément, la *borne inférieure* $\inf A = \max m(A)$ [7] de A.

En ce cas pour tout $a \in A$ on a $\inf A <_E a$ [resp. $a <_E \sup A$] et si pour tout $a \in A$ on a $m <_E a$ [resp. $a <_E M$] alors $m <_E \inf A$ [resp. $\sup A <_E M$]

[4] [resp. $M(A) = \{M \in E \,|\, \forall a \in A, a <_E M\}$]

[5] [resp. majorants]

[6] [resp. plus petit]

[7] [resp. *borne supérieure* $\sup A = \min M(A)$]

2.2.8 Rappel. Si $(E, <_E) = (\mathbb{R}, \leq)$ est l'ensemble des réels avec son ordre usuel alors :
Toute partie non vide et minorée a une borne inférieure.
Toute partie non vide et majorée a une borne supérieure.

2.2.9 Exercice. Prouver que toute partie $A \subset \mathcal{P}(X)$ a, pour l'ordre d'inclusion $\subset$, une borne inférieure et une borne supérieure :
si $A = \{X_i \subset X \,;\, i \in I\} \subset \mathcal{P}(X)$, alors $\inf(A) = \cap_{i \in I} X_i \overset{\text{Déf}}{=} \{x \in X \,;\, \forall i \in I, x \in X_i\}$ et $\sup(A) = \cup_{i \in I} X_i \overset{\text{Déf}}{=} \{x \in X \,;\, \exists i \in I, \text{avec } x \in X_i\}$

3 Compléments passage au quotient et bon ordre.

3.1 Passage au quotient.

3.1.1 Proposition et Définition. Soit $f : X \to Y$ et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X.

Alors il y a une application $\overline{f} : X/_{\mathcal{R}} \to Y$ telle que $f = \overline{f} \circ \pi_{\mathcal{R}} : X \to X/_{\mathcal{R}} \to Y$ si et seulement si pour tout x, x' tels que $x \equiv x' \bmod \mathcal{R}$ on a $f(x) = f(x')$.

En ce cas un tel $\overline{f}$ est uniquement déterminé par f : si $\overline{x} \in X/\mathcal{R}$ on a $\overline{f}(\overline{x}) = f(x)$ et on dit que f *passe au quotient à* $\mathcal{R}$ (ou *est compatible à* $\mathcal{R}$) et que $\overline{f}$ est *application au quotient* associée.

Démonstration : $\Rightarrow$: Si $f = \overline{f} \circ \pi_{\mathcal{R}}$ et $x \equiv x' \bmod \mathcal{R}$ alors $\pi(x) = \pi(x')$ et $f(x) = \overline{f}(\pi(\overline{x})) = \overline{f}(\pi(\overline{x'})) = f(x')$.

$\Leftarrow$: Pour tout $t \in \overline{x}$ on a $t \equiv x \bmod \mathcal{R}$ donc $f(t) = f(x)$ ne dépend pas de $t \in \overline{x}$ et on peut définir $\overline{f} : X/_{\mathcal{R}} \to Y$ par, si $t \in \overline{x}$, $\overline{f}(\overline{x}) = f(t)$ $[= f(x)]$.

Comme pour tout $x \in X$ on a $\overline{f} \circ \pi_{\mathcal{R}}(x) = \overline{f}(\overline{x}) = f(x)$ on a bien $f = \overline{f} \circ \pi_{\mathcal{R}}$ □

3.1.2 Exercice. Prouver que la relation $\underset{\text{ent. rel.}}{\sim}$ sur $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ définie par $(m,n) \underset{\text{ent. rel.}}{\sim} (p,q)$ si et seulement si $m + q = n + p$ est une relation d'équivalence.

3.1.3 Exemple. Supposant l'ensemble $\mathcal{N}$ des entiers positifs inclus dans un ensemble $\mathcal{Z}$ d'entiers relatifs où la soustraction est toujours définie et a ses propriétés usuelles, alors comme $(m,n) \equiv (p,q) \bmod (\underset{\text{ent. rel.}}{\sim})$ est $m + q = n + p$, équivalent à $m - n = p - q$, l'application $f : \mathcal{N} \times \mathcal{N} \to \mathbb{Z}$, $f(m,n) = m - n$ passe au quotient.

3.1.4 Remarque. En fait on procède dans l'autre sens et la relation d'équivalence $\underset{\text{ent. rel.}}{\sim}$ permet de définir l*ensemblme des entiers relatifs* par $\mathcal{Z} = \mathcal{N} \times \mathcal{N}/_{\underset{ent.rel.}{\sim}}$

3.1.5 Corollaire et Définition. Soit X et Y des ensembles munis d'équivalence $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$

(i) Une application $g : X \to Y$ *passe au quotient de* $\mathcal{R}$ *et* $\mathcal{S}$ (ou *est compatible à* $\mathcal{R}$ *et* $\mathcal{S}$)
c. a d. il y a $\overline{g} : X/_{\mathcal{R}} \to Y/_{\mathcal{S}}$ telle que $\pi_{\mathcal{S}} \circ g = \overline{g} \circ \pi_{\mathcal{S}}$
si et seulement si pour tout x, x' tels que $x \equiv x' \bmod \mathcal{R}$ on a $g(x) \equiv g(x') \bmod \mathcal{S}$

$$\begin{array}{ccc} X & \overset{g}{\to} & Y \\ \pi_{\mathcal{R}} \downarrow & & \downarrow \pi_{\mathcal{R}} \\ X/_{\mathcal{R}} & \overset{\overline{g}}{\to} & Y/_{\mathcal{S}} \end{array}$$

(ii) Une application $p : X \times X \to Y$ *passe au quotient de* $\mathcal{R}$ *et* $\mathcal{S}$ (ou *est compatible à* $\mathcal{R}$ *et* $\mathcal{S}$)
c. a d. il y a $\overline{p} : X/_{\mathcal{R}} \times \to Y/_{\mathcal{S}}$ telle que $\pi_{\mathcal{S}} \circ p = \overline{p} \circ \pi_{\mathcal{S}}$
si et seulement si pour tout x, x', y, y' tels que $x \equiv x' \bmod \mathcal{R}$ et $y \equiv y' \bmod \mathcal{R}$ on a

$$p(x,y) \equiv p(x',y) \bmod \mathcal{S} \quad \text{et} \quad g(x',y) \equiv g(x',y') \bmod \mathcal{S}$$

$$\begin{array}{ccc} X \times X & \overset{p}{\to} & Y \\ \pi_{\mathcal{R}} \downarrow \times \downarrow \pi_{\mathcal{R}} & & \downarrow \pi_{\mathcal{S}} \\ X/_{\mathcal{R}} \times X/_{\mathcal{R}} & \overset{\overline{p}}{\to} & Y/_{\mathcal{S}} \end{array}$$

Démonstration : Soit sur $X \times X$ et $X/_{\mathcal{R}} \times X$ les relations d'équivalence $(\mathcal{R} \times =)$ et $(= \times \mathcal{R})$ (définie par $(x,y)(\mathcal{R} \times =)(x',y')$ si et seulement si $x\mathcal{R}x'$ et $y = y'$ et $(\overline{x}, y)(= \times \mathcal{R})(\overline{x'}, y')$ si et seulement si $\overline{x} = \overline{x'}$ et $y\mathcal{R}y'$). Comme leurs applications quotients sont $\pi_{(\mathcal{R} \times =)} = \pi_{\mathcal{R}} \times \mathrm{Id}_X : X \times X \to X \times X/_{(\mathcal{R} \times =)} = X/_{\mathcal{R}} \times X$ et $\pi_{(= \times \mathcal{R})} = \mathrm{Id}_X /_{\mathcal{R}} \times \pi_{\mathcal{R}} : X/_{\mathcal{R}} \times X \to X/_{\mathcal{R}} \times X/_{\mathcal{R}} = X/_{\mathcal{R}} \times X/_{\mathcal{R}}$ le résultat suit de deux applications de la proposition **3.1.1** □

3.1.6 Exercice. Soit X, Y deux ensembles munis de relations d'équivalence $\mathcal{R}, \mathcal{S}$.
Sur $X \times Y$ est définie la *relation produit* $(\mathcal{R} \times \mathcal{S})$ par $(x,y)(\mathcal{R} \times \mathcal{S})(x',y')$ si et seulement si $x\mathcal{R}x'$ et $y\mathcal{S}y'$.
Prouver que c'est une relation d'équivalence et que si $(x,y) \in X \times Y$ alors $\overline{(x,y)}_{(\mathcal{R} \times \mathcal{S})} = \overline{x}_{\mathcal{R}} \times \overline{y}_{\mathcal{S}}$, puis iddentifier $X \times Y_{(\mathcal{R} \times \mathcal{S})}$ à $(X/_{\mathcal{R}}) \times (Y/_{\mathcal{S}})$.

3.1.7 Exercice. On reprend les notations des l'exercices **3.1.2** et **1.1.4 2** et note

$$\mathcal{N}\times\mathcal{N}/\underset{\text{ent. rel.}}{\sim} \overset{\text{Déf}}{=} \mathbb{Z},\quad \mathcal{N}\times\mathcal{N}/\underset{\text{frac. pos.}}{\sim} \overset{\text{Déf}}{=} \mathbb{Q}_+^* \ \text{ et } \mathbb{R}[X]\times(\mathbb{R}[X]\backslash\{0\})/\underset{\text{frac. rat.}}{\sim} \overset{\text{Déf}}{=} \mathbb{R}(X)$$

Déduire de la proposition **3.1.5** une construction des opérations de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}_+^*$ et $\mathbb{R}(X)$:

1. Les applications $\sigma,\pi : (\mathcal{N}\times\mathcal{N})\times(\mathcal{N}\times\mathcal{N})\to(\mathcal{N}\times\mathcal{N})$, $\sigma((m,n),(p,q)) = (m+p,n+q)$, $\pi((m,n),(p,q)) = (mp+nq,mq+np)$ passent au quotient en $+,\cdot : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$
2. Les applications $\sigma,\pi : (\mathcal{N}\times\mathcal{N})\times(\mathcal{N}\times\mathcal{N})\to\mathcal{N}\times\mathcal{N}$, $\sigma((m,n),(p,q)) = (mq+np,nq)$, $\pi((m,n),(p,q)) = (mp,nq)$ passent au quotient en $+,\cdot : \mathbb{Q}_+^*\times\mathbb{Q}_+^*\to\mathbb{Q}_+^*$
3. $\sigma,\pi : \mathbb{R}[X]\times(\mathbb{R}[X]\backslash\{0\})\times\mathbb{R}[X]\times(\mathbb{R}[X]\backslash\{0\})\to\mathbb{R}[X]\times(\mathbb{R}[X]\backslash\{0\})$, $\sigma((P,Q),(R,S)) = (PS+QR,QS)$, $\pi((P,Q),(R,S)) = (PR,QS)$ passent au quotient en $+,\cdot : \mathbb{R}(X)\times\mathbb{R}(X)\to\mathbb{R}(X)$

3.1.8 Exemple. Soit $f = f_M : \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ une application linéaire injective de matrice $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ (on a donc $ad-bc$ $(=\det(M))\neq 0$) alors :

1. L'application f induit $f_| : \mathbb{R}^2\setminus\{0\}\to\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ compatible avec la colinéarité $\mathcal{L}$. Ainsi l'application f induit donc :
2. L'*homographie* $\overline{f} = \overline{f}_M : P^1(\mathbb{R})\to P^1(\mathbb{R})$ qui dans le système de représentants $\mathbb{R}\cup\{\infty\} = P^1(\mathbb{R})$ (convenant, $x\pm\infty = \infty$ et si $x\neq 0, x\cdot\infty = \infty$, $\frac{x}{\infty} = 0$, $\frac{x}{0} = \infty$), s'écrit $\mathbb{R}\ni t\mapsto \frac{at+b}{ct+d}, \infty\mapsto\frac{a}{c}$ et si $N\in M_2(\mathbb{R}), \det(N)\neq 0$ on a $\overline{f}_{MN} = \overline{f}_M\circ\overline{f}_N, \overline{f}_{\mathrm{Id}} = \mathrm{Id}$ donc $\overline{f}_M$ est bijective et si $\tilde{M} = M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ alors $\overline{f}_M^{-1} = \overline{f}_{\tilde{M}}$

Démonstration : [de **1**] Si $x,y\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$, comme f est injective $f(x)\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ et si $x\mathcal{L}y$, il y a $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ tels que $\lambda\cdot x+\mu\cdot y = 0$. Comme f est linéaire $\lambda\cdot f(x)+\mu\cdot f(y) = f(\lambda\cdot x+\mu\cdot y) = f(0) = 0$ et $f(x)\mathcal{L}f(y)$ □

Démonstration : [de **2**] $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} at+b \\ ct+d \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad+b(-c) & a(-b)+ba \\ cd+d(-c) & c(-b)b+da \end{bmatrix} = (ad-bc)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ d'où le résulat puisque pour tout $\mathbb{R}\cup\{\infty\}\ni t,\ (ad-bc)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (ad-bc)t \\ (ad-bc)1 \end{bmatrix}\mathcal{L}\begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$ □

3.2 Ensembles bien ordonnés et ordre lexicographique.

3.2.1 Définition. Un ensemble ordonné $(E,<_E)$ est *bien ordonné* (ou $<_E$ est un *bon ordre*) si toute partie $\emptyset\neq A\subset E$ non vide A de E a un plus petit élément.

3.2.2 Exemple. $(\mathcal{N},\leq)$ et $(\mathbb{N},\leq)$ sont bien ordonnés. Mais $(\mathbb{Z},\leq)$ et $(\mathbb{R},\leq)$ ne le sont pas.

Démonstration : La partie $\mathbb{Z}\subset\mathbb{Z},\mathbb{R}$ est non vide puisque $0\in\mathbb{Z}$ et n'a pas de plus petit élément puisque si $m\in\mathbb{Z}$ alors $\mathbb{Z}\ni m-1\not\leq m$. □

3.2.3 Lemme. *Un ensemble bien ordonné $(E,<_E)$ est totalement ordonné.*

Démonstration : Si $x,y\in E$, la partie $\{x,y\}$ est non vide puisqu'elle contient x. Donc la partie $\{x,y\}$ a un plus petit élément $\min(\{x,y\})$. Comme les éléments de $\{x,y\}$ sont x et y on a soit $\min(\{x,y\}) = x$ auquel cas $x<_E y$, soit $\min(\{x,y\}) = y$ auquel cas $y<_E x$. □

3.2.4 Proposition et Définition. Soit $(E, <_E)$ et $(F <_F)$ deux ensembles ordonnés alors :

(i) La relation $<_{E\times F_l}$ sur le produit $E \times F$ définie par $(x, y) <_{E\times F_l} (u, v)$ si et seulement si :

(a) soit $x <_E u$ et $x \neq u$

(b) soit $x = u$ et $y <_F v$

est une relation d'ordre dite *ordre lexicographique* $<_E, <_F$

(ii) si $<_E$ et $<_F$ sont des ordres totaux alors $<_{E\times F_l}$ est un ordre total.

(iii) si $<_E$ et $<_F$ sont des bons ordres alors $<_{E\times F_l}$ est un bon ordre.

Démonstration : Par réflexivité de $<_E$ et $<_F$ on a $x <_E x$ et $y <_F y$ donc $(x, y) <_{E\times F_l} (x, y)$ et $<_{E\times F_l}$ est réflexive.
Si $(x, y) <_{E\times F_l} (u, v)$ et $(u, v) <_{E\times F_l} (x, y)$ alors $x <_E u$ et $u <_E x$ donc $x = u$ d'où et $y <_F v$ et $v <_F y$ $y = v$ donc $(x, y) = (u, v)$ et $<_E$ est antisymétrique.
Si $(x, y) <_{E\times F_l} (u, v)$ et $(u, v) <_{E\times F_l} (s, t)$ alors $x <_E u$ et $u <_E s$ d'où, par transitivité de $<_E$, $x <_E s$.
Si $x = u = s$ alors $y <_F v$ et $v <_F t$ d'où, par transitivité de $<_F$, $<_F t$, sinon $x \neq t$. Dans les deux cas $(x, y) <_{E\times F_l} (s, t)$ et $<_{E\times F_l}$ est transitive.

Soit $(x, y), (u, v) \in E \times F$. Comme $<_E$ est total soit $x <_E u$ soit $u <_E x$. Si $x = u$ et, comme $<_F$ est total soit $y <_f v$ soit $v <_F y$. Sinon $x \neq u$.
Dans les deux cas soit $(x, y) <_{E\times F_l} (u, v)$ et $(u, v) <_{E\times F_l} (x, y)$ et $<_{E\times F_l}$ est total.

Si $<_E$ et $<_F$ sont bons et $\emptyset \neq A \subset E \times F$ est une partie non vide de $E \times F$. Alors $\emptyset \neq X = \{x \in E \,|\, \exists y \in F, (x, y) \in A\}$.
Comme $<_E$ est bon X a un plus petit élément $x_m = \min(X)$ et $\emptyset \neq Y = \{y \in F \,|\, (x_m, y) \in A\}$.
Comme $<_F$ est bon Y a un plus petit élément $y_m = \min(Y)$ et pour tout $(x, y) \in A$ on a $x \in X$ donc $x_m <_E x$ et si $x_m = x, y \in Y$ donc $y_m <_F y$.
Dans les deux cas on a $(x_m, y_m) <_{E\times F_l} (x, y)$: $(x_m, y_m) = \min(A)$. Toute telle $\emptyset \neq A \subset E \times F$ ayant un plus petit élément pour $<_{E\times F_l}$ cet ordre lexicographique est bon. □

3.2.5 Définition. Une propriété $\mathcal{P}_x, x \in X$ dépendant d'un paramètre $x \in X$ est *inductive pour* un bon ordre $<$ sur l'ensemble X si pour tout $x \in X$ alors $\mathcal{P}_x$ est vraie si pour tout $y \in X$ avec $x \neq y < x$, $\mathcal{P}_y$ est vraie.

3.2.6 Corollaire. *Une propriété inductive est vraie pour tout paramètre.*

Démonstration : Par contraposition si il y a un $x \in X$ tel que $\mathcal{P}_x$ est fausse alors l'ensemble $F = \{x \in X \,|\, \mathcal{P}_x \text{ fausse}\}$ est non vide.
Comme $(X, <)$ est bien ordonné F a un plus petit élément $x_m = \min(F) \in F$. Par définition de F d'une part $\mathcal{P}_x$ est fausse, d'autre part :
pour tout $y \in F$ avec $x_m \neq y < x_m$ on a $y \notin F$ donc $\mathcal{P}_y$ n'est pas fausse, *c. a d.* est vraie et $\mathcal{P}_x, x \in X$ n'est pas inductive pour le bon ordre $<$. □

3.2.7 Remarque. Si $(X, <) = (\mathbb{N}, <)$ est l'ensemble des entiers naturels muni de l'ordre usuel, pour vérifier l'inductivité il y a deux cas soit $x = 0$ et $\{y \in X \,|\, 0 \neq y < 0\} = \emptyset$ donc pour tout $y \in X$ avec $0 \neq y < 0, \mathcal{P}_y$ est vraie donc $\mathcal{P}_0$ doit être vraie (initialisation d'une récurrence classique).

Si $x = n + 1 > 0$ alors $\{y \in X \,|\, x \neq y < x\} = \{0, \ldots, n\}$ et donc $\mathcal{P}_x$ doit vérifier le *pas de récurrence* $\mathcal{P}_0, \ldots, \mathcal{P}_n$ vraies implique $\mathcal{P}_{n+1}$ vraie.

On notera que la formulation en terme de bon ordre est plus simple que cette formulation classique de *récurrence forte* car on n'a pas à distinguer initialisation et pas de récurrence.

3.2.8 Exemple (Retour sur la décomposition en éléments simples). Si $z = b + ic, b, c \in \mathbb{R}$, soit $P_z = X^d + a_{d-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme unitaire à coefficients réel de plus petit degré tel que $P(z) = 0$. [si $z = b \in \mathbb{R}$ on a $P_b = X - b$, sinon $(c \neq 0)$ on a $P_z = (X - z)(X - \overline{z}) = (X - b)^2 + c^2 = X^2 - 2bX + b^2 + c^2$]

Soit $A, B = X^n + \sum_{k=1}^{n} a_k X^{n-k} \in \mathbb{R}[X]$ et $\{z_1, \ldots, z_t\} = \{z = b + ic, c \geq 0 \,|\, B(z) = 0\}$. On suppose les z_k deux à deux distincts : si $k \neq l$ alors $z_k \neq z_l$ et de plus que la numérotation de ces racines de B de partie imaginaire positive ou nulle est choisie de sorte que si $P_k = P_{z_k}$ il y a une suite décroissante d'entiers positifs $\nu_1 \geq \cdots \geq \nu_t$ telle que $B = P_1^{\nu_1} \cdots P_t^{\nu_t} = \prod_{k=1}^{t} P_k^{\nu_k} = C_k \cdot P_k^{\nu_k} = B_1 B_2$ où $C_k = \prod_{\substack{l = 1 \\ l \neq k}}^{t} P_k^{\nu_k}$ vérifie si $k \neq l$ $C_k(z_k) \neq 0 = C_k(z_l)$, et $B_1 = \prod_{k=1}^{t} P_k$, $B_2 = 1$ si $\nu_1 = 1$, sinon $B_2 = \prod_{k=1}^{s} P_k^{\nu_k - 1}$ où $s + 1 = t + 1$ si $\nu_t > 1$ et $s + 1 = \min\{1 \leq k \leq t \,|\, \nu_k = 1\}$ sinon. Le *type* de B est $t(B) = (\nu_1, \ldots, \nu_t)$, une suite finie ordonnée d'entiers positifs [on se permet le type vide $\emptyset$ pour $P = 1$]. Ces types sont ordonné par *ordre lexicographique généralisé*, et en particulier $t(B) \neq t(B_2) < t(B)$.
La décompositon en élément simples de la fraction rationnelle $\dfrac{A}{B} \in \mathbb{R}[X]$ s'obtient par récurrence sur ces types : Comme $C_k(z_k) \neq 0$ on peut considérer

$$\frac{A(z_k)}{C_k(z_k)} = x_k + iy_k \in \mathbb{C}$$

Soit $E_k \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme de plus petit degré tel que $E_k(z_k) = x_k + iy_k$:
Si $y_k = 0$ (c'est le cas si $z_k = b_k \in \mathbb{R}$) on a $E_k = x_k$ de degré au plus 0, sinon $z \notin \mathbb{R}$ et $c_k \neq 0$ alors $E_k = \frac{y_k}{c_k}(X - b_k) + x_k = \frac{y_k}{2c_k} P_k' + x_k$, de degré 1.
Soit $A_1 = A - \sum_{k=1}^{t} C_k \cdot E_k$. Pour $1 \leq k \leq t$ on a $A_1(z_k) = A(z_k) - \sum_{l=1}^{t} C_l(z_k) \cdot E_l(z_k) = A(z_k) - C_k(z_k) \cdot E_k(z_k) = 0$.
Donc, comme les z_k sont deux à deux distincts il y a un polynôme $A_2 \in\in \mathbb{R}[X]$ tel que $A_1 = B_1 \cdot A_2$ et :

$$\frac{A}{B} - \sum_{k=1}^{t} \frac{E_k}{P_k^{\nu_k}} = \frac{A}{B} - \sum_{k=1}^{t} \frac{C_k \cdot E_k}{C_k \cdot P_k^{\nu_k}} = \frac{A}{B} - \sum_{k=1}^{t} \frac{C_k \cdot E_k}{B} = \frac{A_1}{B} = \frac{B_1 \cdot A_2}{B_1 \cdot B_2} = \frac{A_2}{B_2}$$

d'où le résultat puisque $t(B) \neq t(B_2) < t(B)$.