Exigences et conseils pour l'agrégation

1 Pour l'écrit

1.1 Vue d'ensemble

Le préambule des sujets est important : il fixe non seulement un certain nombre de notations, il rappelle aussi un certain nombre de résultats qui peuvent être utilisés sans démonstration.

Il est recommandé de parcourir l'ensemble de l'énoncé avant de se jeter sur la première question et de lire en détail l'ensemble d'une partie avant de la commencer. Il y a plusieurs raisons à cela :

- savoir où l'on va donne du sens à ce qu'on fait,
- cela permet de repérer certains enchaînements de questions,
- cela permet parfois de grouper les réponses à certaines questions : dans certains cas, une réponse minimaliste à une question oblige à refaire une partie du travail dans la question suivante, alors qu'un travail un peu plus abouti permet de répondre directement aux deux questions.
- cela permet de bénéficier d'indication rétroactives : certaines questions permettent de deviner le résultat de questions antérieures. Le résultat d'un calcul demandé dans une question peut apparaître comme par hasard dans une question plus loin.

1.2 Esprit de l'énoncé

Il est important de respecter l'esprit de l'énoncé. Si l'énoncé fait redémontrer un théorème, il ne faut pas utiliser le théorème ou un de ses corollaires dans la démonstration. Parfois, les premières questions d'une partie esquissent une méthode pour prouver un résultat. Il est préférable de s'y conformer au moment de le prouver.

Il est préférable de prendre les questions dans l'ordre, tant pour s'y retrouver que pour obtenir des points (le barème est dégressif, et à difficulté égale, les questions sont de moins en moins bien payées). Cependant, mieux vaut répondre correctement à des questions plus loin que de bloquer sur une partie.

Beaucoup de questions un peu délicates utilisent les questions précédentes. Garder à l'esprit ce qu'on a déjà montré (ou qu'on admet si l'on a sauté une question) aide à trouver ce qu'il faut faire.

Il est essentiel de s'adapter au niveau des questions. Les premières questions faciles doivent être rédigées avec soin, en utilisant les hypothèses et les résultats du programme. Bannir les « il est évident que ». Une fois qu'on a montré qu'on est capable de faire complètement un raisonnement simple, on peut aller plus vite les fois suivantes si l'on retrouve le même type de raisonnement. En revanche, dans une question difficile, on passera vite sur les étapes simples pour se concentrer sur les points cruciaux.

1.3 Notations

Respecter les notations de l'énoncé et se laisser guider par elles : une parenté entre deux notations indique parfois qu'il faut appliquer à un objet le résultat d'une question où l'on utilise la même lettre.

Toute notation non universelle ou ne figurant pas dans l'énoncé doit être introduite très clairement. Introduire une notation est utile lorsque la notation sert souvent et peut permettre de gagner du temps.

1.4 Présentation

Qu'on le veuille ou non, la présentation influe sur la note. Elle doit donc être soignée. Les lettres doivent être lisibles, suffisamment grosses et bien reconnaissables. Les lignes doivent être suffisamment espacées. Une page difficilement lisible peut ne pas être lue. Barrer proprement avec une règle ce qui ne doit pas être lu.

Le jour du concours, les copies sont photocopiées pour les correcteurs. Donc, utiliser un stylo noir ou bleu foncé, éviter le bleu pale ou de jouer avec les couleurs.

Les tentatives incertaines et maladroites doivent être faites au brouillon et pas sur la copie ! La rédaction directement sur la copie doit être réservée aux questions où l'on sait tout de suite ce qu'il faut faire.

Quand une démonstration comporte plusieurs étapes, des paragraphes peuvent aider à repérer rapidement les résultats intermédiaires. Le résultat doit apparaître clairement. Lorsqu'on le souligne ou on l'encadre, utiliser une règle.

1.5 Clarté de la rédaction

La rédaction est essentielle à la clarté d'une démonstration. À tout moment, le lecteur doit savoir ce qui est supposé et ce qu'on cherche à montrer. Le lecteur doit être convaincu par la démonstration sans avoir à se demander si le résultat est vraiment prouvé ou non. La démonstration doit donc indiquer pourquoi ce qui est affirmé est vrai (hypothèse, résultat du cours, conséquence immédiate de la ligne précèdente ou conséquence d'un résultat obtenu antérieurement). Les arguments essentiels doivent figurer, dans l'ordre où ils servent, sans être pollués par des arguments inutiles.

Il faut faire ressortir lorsqu'il y a lieu les différentes étapes et les résultats intermédiaires. Le cas échéant, annoncer qu'on va d'abord montrer tel résultat ne figurant pas dans l'énoncé.

Lorsqu'on utilise un théorème, il faut vérifier sur la copie que les hypothèses sont satisfaites. Si l'on ne sait plus justifier une interversion de série et d'intégrale, ou une dérivation sous le signe somme, il vaut mieux écrire explicitement « admettons qu'on puisse [intervertir..., dériver...] »que de faire sans rien dire, cela montre qu'on sait qu'il y a des hypothèses à vérifier même si on ne se souvient plus desquelles !

Les symboles $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ doivent être réservés à des démonstrations « automatiques »sous forme de chaînes d'implications ou d'équivalences, ou bien dans des expressions comme « montrons l'implication (1) $\Rightarrow$ (2) ». Quand on écrit « (1) $\Rightarrow$ (2) », on n'affirme ni (1) ni (2), mais seulement que si (1) est vraie, (2) l'est aussi. Quand on veut dire « donc », il faut donc écrire « donc »au lieu d'utiliser le symbole d'implication. De même, on ne doit pas utiliser à tort le symbole d'équivalence pour « c'est-à-dire ».

Il faut donc identifier clairement si l'on fait un raisonnement automatique (implications ou équivalences), par déductions, par contraposition, par l'absurde, par conditions nécessaires ou/et suffisantes.

1.6 Rédiger efficacement

Souvent, la première solution trouvée pour une répondre à une question n'est pas la plus efficace. Il est très utile lorsqu'on réfléchit en temps libre lors à une démonstration ou à un problème de mathématiques de s'entraîner à améliorer la rédaction, pour acquérir de l'aisance à rédiger efficacement en temps limité.

Une récurrence où l'on n'utilise pas l'hypothèse de récurrence peut être transformée en raisonnement direct. Beaucoup de raisonnements par l'absurde peuvent être retournés en un raisonnement direct ou par contraposition, plus court et plus clair. Reconnaître une composée d'applications monotones ou une somme d'applications croissantes variant est souvent plus efficace que dériver pour trouver le sens de variation d'une fonction.

Beaucoup de raisonnements d'analyse peuvent se passer de ε et de δ, en utilisant les outils topologiques adéquats. Il peut être utile de voir qu'une certaine partie est fermée comme image réciproque d'un fermé par une application continue, ouverte comme image réciproque d'un ouvert par une application continue ou compacte comme image directe d'un compact par une application continue (ou comme fermé borné dans un espace vectoriel de dimension finie). La densité permet de prolonger par continuité certaines identités.

De même, beaucoup de raisonnements d'algèbre deviennent plus élégants une fois qu'on a remarqué qu'une partie est un sous-structure d'un structure connue (groupe, anneau, espace vectoriel, algèbre) ou qu'une application est un morphisme. Cela permet par exemple de vérifier certaines identités uniquement sur un système générateur.

1.7 Rechercher une solution

Quelques pistes quand on ne voit pas ce qu'il faut faire :

- faire un dessin aide souvent à comprendre ce qui se passe.
- regarder des exemples, les plus simples possibles sans être triviaux. Il arrive qu'un sujet commence par l'étude de quelques exemples.
- dans un problème en dimension n, essayer de comprendre ce qui se passe en dimension 2 ou 3 : chercher la plus petite dimension où il y a quelque chose à montrer. Le même principe « on regarde aux petits ordres » s'applique aux ensembles finis, aux polynômes...
- regarder dans les questions précédentes et dans le préambule si quelque chose pourrait servir.

Il faut gérer le temps et trouver un juste milieu entre s'acharner trop longtemps sur une question et passer à la question suivante parce qu'on n'a pas trouvé en 5 minutes. Eventuellement, laisser mûrir le temps d'une pause. Ou y revenir à la fin d'une partie, une fois qu'on s'est plus familiarisé avec les objets.

1.8 Solutions partielles

Une majoration moins fine que celle demandée peut rapporter une partie des points. La simple application d'un théorème aussi, si elle est faite correctement et si elle va dans la bonne direction.

Lorsqu'on veut montrer une égalité, il est parfois facile de montrer une inégalité large ou une inclusion. Dans certains cas, prouver la bijectivité se ramène à prouver l'injectivité ou la surjectivité. Le signaler peut apporter une fraction de point.

1.9 Mener les calculs

Plutôt que de foncer sans réfléchir, il vaut mieux se demander quel type de résultat on doit trouver. Dans certains cas, un argument simple permet de réduire le calcul, voir de s'en passer totalement. Le résultat du calcul, s'il est donné ou si on le devine avec les autres questions constitue parfois une indication.

Commencer au brouillon, sauf si l'on est sûr de ce qu'on fait. Eventuellement recommencer pour prendre le calcul plus intelligemment. Plutôt que de foncer sans réfléchir, il vaut mieux se demander quel type de résultat on doit trouver. Bien gérer la place pour la lisibilité, bien former les lettres, les signes. Si besoin, barrer proprement et reprendre plus bas. Trop de ratures multiplie les risques de fautes.

Eviter le recopiage inutile de termes (facteurs $1/(2\pi)$, intégrales, sommes, racines carrées... qu'il faudra prendre en compte à la fin) en introduisant au besoin des notations et en se focalisant sur les termes à transformer (l'intégrande d'une intégrale, le numérateur ou le dénominateur d'une fraction, un trinôme à mettre sous forme canonique,...).

Pour calculer le module (ou le carré d'un module) d'un complexe, utiliser les propriétés de morphisme pour la multiplication et l'identité $|z|^2 = z\overline{z}$ est souvent plus efficace que de calculer d'abord les parties réelle et imaginaire.

Utiliser les propriétés du déterminant est souvent plus efficace que de développer brutalement. Introduire des notations pour les lignes, les colonnes ou pour des blocs peut alléger l'écriture.

Il est plus facile d'intégrer $x \mapsto x^{-1/3}$ que $x \mapsto 1/\sqrt[3]{x}$. Si l'on effectue un calcul de primitive, vérifier le résultat en dérivant !

1.10 Traquer les erreurs

Parmi les questions à se poser : le résultat trouvé est-il plausible, cohérent avec les autres résultats, avec l'esprit de l'énoncé ? Une formule donne-t-elle le bon résultat dans des cas particuliers ? Sinon, il faut chercher l'erreur.

Une méthode pour trouver une erreur de raisonnement est de suivre pas à pas la démonstration sur un exemple simple où la conclusion est fausse, et de voir sur l'exemple à partir de quel moment on écrit quelque chose de faux.

Refaire le calcul (par une autre méthode éventuellement, en le débarassant des fardeaux inutiles) est souvent préférable à le relire.

Si l'on ne trouve pas l'erreur alors que les résultat est manifestement faux (intégrale nulle, alors que la fonction intégrée est positive sans être presque partout nulle probabilité supérieure à un, variance négative, cardinal non entier,...), signaler par une phrase qu'on s'aperçoit de l'incohérence.

1.11 Fautes courantes

Il est essentiel d'être toujours conscient de l'ensemble dans lequel varient les objets manipulés. Le plus grave est d'écrire des expressions qui n'ont aucun sens, comme $P(u(x))$ lorsque P est un polynôme à coefficients dans un corps K, u un endomorphisme d'un K-espace vectoriel E et x un élément de E.

Il faut s'abstenir d'écrire un objet dont on n'a pas encore vérifié l'existence (à moins d'admettre expressément l'existence) : limite, somme de série, intégrale. Pour vérifier qu'une fonction f à valeurs meurable à valeurs dans $\mathbf{C}$ est intégrable par rapport à une mesure positive, on vérifie que l'intégrale de $|f|$ est finie (cette intégrale a un sens puisque$|f|$ est mesurable positive). Lorsqu'on divise, lorsqu'on prend une racine carrée ou un logarithme, il faut se demander si on a le droit de le faire.

Parmi les erreurs courantes, on trouve :

- l'oubli d'hypothèses dans l'utilisation de théorèmes ou de formules, ce qui peut être gênant quand les hypothèses ne sont pas vérifiées.
- la vérification d'une propriété dans des cas particuliers trop restrictifs,
- l'application à trois objets ou plus de caractérisations valables seulement pour deux (indépendance linéaire de vecteurs, somme directe de sous-espaces vectoriels, indépendance d'événements)
- le fait de faire comme si certaines applications sont des morphismes, alors qu'elles ne le sont pas :
  - le module de $(\mathbf{C}, +)$ dans $(\mathbf{R}_+, +)$
  - les applications $g \mapsto g^k$, où $k \in \mathbf{Z}$, dans un groupe non abélien (sauf exceptions).
  - le logarithme de $(\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-, \times)$ dans $(\mathbf{C}, +)$,
  - l'exponentielle des matrices carrées de taille $d \geq 2$.

1.12 Erreurs supposées d'énoncé

Les erreurs sont rares, mais elles arrivent. L'énoncé peut oublier de supposer qu'un ensemble est non vide, oublier un facteur $1/2$ dans une formule. Si on suspecte une erreur, essayer de s'en assurer sans y passer trop de temps. Si l'on est convaincu de l'erreur, indiquer clairement sur la copie comment on corrige l'énoncé. Il n'y a pas besoin de prouver sur la copie que l'énoncé est faux.

1.13 Un peu de bon sens !

Les hypothèses de l'énoncé sont utiles la plupart du temps. Si l'on ne s'en sert pas du tout, cela indique souvent qu'on affirme quelque chose de faux quelque part en passant à côté d'une difficulté. Chercher alors un contre-exemple où l'hypothèse non utilisée n'est pas vérifiée, et regarder la démonstration sur ce contre-exemple pour trouver l'erreur.

Certaines questions demandent si un résultat qu'on a montré sous certaines hypothèses reste vrai dans un cas où l'une des hypothèses n'est pas satisfaite. On s'attend plutôt à répondre non, mais il peut arriver que le résultat soit vrai quand même.

Ecrire n'importe quelle inégalité qui arrange pour obtenir le résultat demandé sans se demander si elle est vraie est source d'erreurs. En particulier, une majoration brutale dans une chaîne d'inégalités ne permet pas d'obtenir une majoration fine à la fin, sauf en écrivant une inégalité fausse.

2 Pour l'oral

2.1 Choix de la leçon ou du texte

Choisir sans trop y passer de temps le sujet où l'on est le plus à l'aise. Certaines leçons sont plus dangereuses que d'autres, mais d'un autre côté, le choix d'une leçon souvent délaissé est apprécié.

2.2 Choix du plan

La présentation du plan écrit est l'une des premières impressions que vous donnez au jury et a nécessairement une influence sur la note. Un plan bien présenté donne un a priori positif tandis qu'un plan où il faut se forcer pour lire fait très mauvaise impression.

Une figure, un schéma peuvent être bienvenus. Certains points doivent absolument figurer dans le plan, d'autres sont facultatifs. Dans une leçon sur la compacité, il est indispensable de parler du théorème de Heine.

Plusieurs plans sont envisageables pour une leçon. Le plan choisi doit être structuré, ordonné de façon logique, Le niveau du plan doit être cohérent avec son niveau. Il faut en tout cas être attentif à l'intitulé de la leçon, notamment aux termes ≪ applications, exemples, utilisation ≫.

Les objets qui sont au coeur de la leçon doivent être définis avant leur utilisation, sans remonter trop loin dans les prérequis. Par exemple, on ne va pas donner la définition d'un espace métrique dans une leçon sur la connexité. Les prérequis doivent être connus au cas où le jury pose une question. Il est utile de fixer au début quelques notations valables pour tout le plan ou toute une partie.

Sur une partie qui figure explicitement dans l'intiulé de la leçon mais qu'on ne maîtrise pas, essayer de faire comme si on savait est suicidaire. Faire l'impasse complète est pénalisé, mais moins grave. Une présentation minimaliste semble préférable à une impasse complète. Il est souvent souhaitable de se garder un petit peu de marge pour savoir répondre à la première question facile que pose le jury.

Même si c'est peu valorisé dans la société actuelle, être honnête avec soi-même et avec le jury, en montrant qu'on est conscient de ce qu'on sait et de ce qu'on ne sait pas, est aprécié à l'oral de l'agrégation.

2.3 Présentation orale

Il y a plusieurs façons d'aborder la présentation orale, suivant les aspects qu'on souhaite mettre en avant (théorèmes-clés, applications, idées directrices d'une théorie). Avec une certaine hauteur de vue, il s'agit d'indiquer l'enchaînement des résultats principaux, de distinguer ce qui est difficile de ce qui une conséquence immédiate de la définition ou d'un autre résultat.

Présenter un tableau un schéma ou un tableau synthétique peut être bienvenu. Il est possible d'illustrer un résultat avec un exemple ou un contre-exemple. Il faut éviter aussi bien le bavardage vague que la lecture au fil de l'eau du plan écrit, qu'une partie du jury lit pendant votre présentation.

2.4 Choix des développements

Proposer deux développements bien différents, suffisamment consistants, de difficulté comparable, cohérents avec le niveau du plan et son propre niveau. Montrer une bonne maîtrise du programme de licence suffit la plupart du temps à assurer une très bonne note, sans chercher à impressionner par un développement particulièrement poussé ou original.

L'intérêt du développement est que le candidat choisit en partie les sujets dont il va parler. C'est l'occasion de montrer ce qu'on sait faire (raisonnement théorique ou plus calculatoire) sans en faire trop. Contrairement à une habitude trop répandue de parler bien même de ce qu'on connaît mal, il est essentiel ici de bien connaître ce dont on choisit de parler. Ne pas savoir répondre à une question simple est plus grave sur un sujet qu'on a soi-même mis sur le tapis.

Mieux vaut présenter en 10 minutes un développement bien maîtrisé que de ne pas arriver à finir un développement trop long. Si on craint de ne pas avoir le temps de tout faire, commencer par démontrer le coeur du développement et non pas par les lemmes annexes. Il est possible d'admettre un lemme figurant dans le plan à condition de l'annoncer clairement et à condition que ce lemme ne contienne pas le coeur de la difficulté. Il faut éviter de tromper sur la marchandise !

Le candidat doit avoir suffisamment bien compris la démonstration pour être capable de résumer les arguments essentiels sans être rivé à une compréhension ligne à ligne. Le jury demande d'ailleurs de résumer la preuve s'il voit que le candidat ne peut finir son développement dans les délais.

Le candidat doit être capable de dire rapidement servent les hypothèses dans la démonstration, il doit donc y avoir réfléchi avant ! Le jury peut aussi lui demander ce qui se passe si une hypothèse n'est pas vérifiée. Tant qu'on n'a pas donné de contre-exemple, il faut se garder de dire qu'un résultat est faux ! Dire plutôt que ≪ le théorème ne permet pas de conclure ≫et qu'on peut chercher un contre-exemple. Les endroits où une hypothèse sert dans la démonstration peuvent constituer une indication pour trouver un contre-exemple, s'il y en a.

2.5 Gestion du tableau

Bien faire la part des choses entre ce qu'on dit et ce qu'on écrit. Ecrire sert à fixer les hypothèses, les notations, les objets jouant un rôle-clé et les résultats intermédiaires, pour que le jury sache à tout moment ce que veut faire le candidat. Les arguments immédiats peuvent être donnés uniquement à l'oral.

Il convient de gérer la place, pour garder au tableau ce qui doit y rester un moment, et avoir suffisamment de place pour mener les calculs. Quand vous avez besoin de place, demandez au jury la permission d'effacer une partie du tableau.

2.6 Questions du jury

Le jury, d'une patience remarquable, s'efforce d'apaiser les candidats émotifs pour voir vraiment ce qu'ils savent et de rester imperturbable. Toutefois, une attitude donnant l'impression de prendre de haut une remarque ou une question du jury finit par engendrer un certain agacement, qui a des conséquences sur la note.

Beaucoup de questions sont directement liées au plan. Le jury teste souvent par une question si le candidat voit de lui-même qu'un résultat de son plan donne la réponses. Le candidat doit donc être conscient des résultats qu'il énonce dans son plan.

Certaines questions pointent des erreurs figurant dans le plan. Un lapsus rectifié instantannément par le candidat aura peu de conséquences. Si le candidat ne sait pas corriger, ou s'il persiste dans l'erreur, le jury va tenter de poser des questions plus simples pour voir si le candidat trouve le point manquant ou réalise son erreur. Le candidat peut se reprendre vite, lentement, ou pas du tout auquel cas le jury finit souvent par passer à autre chose pour laisser une chance au candidat de se ressaisir.

Des questions peuvent aussi porter sur des aspects laissés de côté par le candidat, volontairement ou non. Il peut y avoir des questions faciles ou difficiles (ce qui est plutôt bon signe). Ne pas savoir répondre à une question difficile n'est pas gênant. Ne pas savoir répondre à une question facile l'est beaucoup plus, surtout sur un point qui aurait dû figurer dans le plan, ou bien sur un sujet sur lequel le candidat a fait de l'esbrouffe.

2.7 Attitude face aux questions

Prendre au sérieux la question, en notant au tableau l'énoncé s'il y a lieu, et en se montrant à la fois actif et réfléchi. Eviter de donner l'impression de jouer la montre. Si l'on connaît la réponse, répondre de la façon la plus complète possible sans attendre que le jury précise sa question. Si l'on connaît la réponse sans être complètement sûr d'avoir compris la question, on peut déjà dire ce qu'on sait puis demander au jury si l'on avait bien compris sa question.

Les mêmes conseils que pour l'écrit pour chercher la réponse s'appliquent : faire un dessin, regarder un cas particulier, donner (sans en abuser) les éléments de réponse partiels dont on dispose.

On peut mentionner des cas particuliers où l'on sait faire (groupe abélien, endomorphisme diagonalisable, fonction régulière...), dire à voix haute les premières questions à se poser, le théorème qu'on peut essayer d'appliquer, les hypothèses à vérifier [1]. Par exemple dans l'étude d'une série compliquée de nombres réels, regarder si le terme général tend vers 0, si les termes ont un signe constant, s'il y a convergence absolue...

2.8 En modélisation

Le texte étant en général trop long, choisissez de mettre l'accent sur des aspects où vous êtes plus à l'aise et profitez la demi-heure où vous avez la main pour montrer ce que vous savez faire, que ce soit d'un point de vue mathématique, algorithmique ou heuristique. Des arguments heuristiques présentés comme tels ont leur place dans cet oral.

Dans la note, quelques points sont liés à la partie programmation. Montrer ses programmes même si l'on n'a pas réussi à les faire tourner, en expliquant ce qu'on a essayé de faire peut déjà rapporter un ou deux points. Il arrive que le jury voie immédiatement comment corriger un programme, ce qui permet de le faire tourner pendant l'oral.

1. Attention à l'emploi de « il faut ». Même s'il faut vérifier les hypothèses pour appliquer un théorème, ces hypothèses sont souvent des conditions suffisantes non nécessaires !