ALGÈBRE L3A - EXAMEN FINAL, 1ÈRE SESSION (DURÉE: 4H)

DOCUMENTS, PORTABLES ET CALCULATRICES INTERDITS

Exercice 1. Soit A un anneau commutatif. On dit que $a \in A$ est *nilpotent* s'il existe $n \geq 1$ tel que $a^n = 0$.

On note $\mathrm{Nil}(A)$ l'ensemble des éléments nilpotents de A.

Dans cet exercice, on propose de démontrer que $\mathrm{Nil}(A)$ est l'intersection des idéaux premiers de A.

1. Montrer que $\mathrm{Nil}(A) \subset \bigcap_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}$, où $\mathfrak{p}$ parcourt l'ensemble des idéaux premiers de A.

2. Soit $\alpha \in A$. On suppose que $\alpha X + 1 \in A[X]$ est inversible. Montrer que $\alpha \in \mathrm{Nil}(A)$.

Indication. Si $P \in A[X]$ vérifie $(\alpha X + 1)P = 1$, écrire

$$P = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0,$$

et identifier les coefficients.

3. On suppose que $\alpha \in A \setminus \mathrm{Nil}(A)$.

(i) Justifier l'existence d'un idéal maximal $\mathfrak{m}$ de $A[X]$ contenant $\alpha X + 1$.

(ii) Soit $\mathfrak{p}$ le noyau du morphisme d'anneaux

$$\begin{aligned} f\colon A &\longrightarrow A[X]/\mathfrak{m} \\ a &\longmapsto \overline{a}. \end{aligned}$$

Montrer que $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A ne contenant pas α.

Indication. Pour montrer que $\alpha \in A \setminus \mathfrak{p}$, procéder par l'absurde.

4. Conclure.

Exercice 2. Soit $A = \mathbb{Z}[i\sqrt{3}] = \{a + ib\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

Pour tout $z \in A$, on pose $N(z) = |z|^2$. On a donc $N(z) \in \mathbb{N}$ pour tout $z \in A$, ainsi que

$$N(z_1 z_2) = N(z_1)N(z_2) \text{ pour tous } z_1, z_2 \in A.$$

1. Pour tout $z \in A$, montrer les équivalences suivantes :

$$z \in A^\times \iff N(z) = 1 \iff z = \pm 1.$$

2. Montrer que $2, 1+i\sqrt{3}$ et $1-i\sqrt{3}$ sont des éléments irréductibles de A, non associés deux à deux.

3. Exhiber un élément de A qui admet deux décompositions distinctes en produit d'un inversible et d'éléments irréductibles.

4. L'idéal de A engendré par 2 est-il premier ?

5. En utilisant la question 2., montrer que 2 et $1+i\sqrt{3}$ sont premiers entre eux.

6. Montrer que 4 et $2(1+i\sqrt{3})$ n'ont pas de pgcd dans A.

Indication. On pourra commencer par montrer que si $\delta \in A$ est un pgcd de4 et $2(1+i\sqrt{3})$, alors $\delta = 2z$, avec $z \in A$.

7. Soit $I = (2, 1+i\sqrt{3})$.

a. Vérifier que $I = \{a+ib\sqrt{3} \mid a \equiv b\ [2]\}$. En déduire que $I \neq A$.

b. Montrer par l'absurde que I n'est pas principal.

Indication. Si $I = (\alpha), \alpha \in A$, justifier que $\alpha \mid 2$ et $\alpha \mid 1+i\sqrt{3}$.

8. Donner quatre raisons distinctes qui justifient que A n'est pas principal.

Exercice 3. Dans cet exercice, on pourra utiliser sans démonstration le fait suivant :

Fait. Soit ℓ un nombre premier. Alors, tout groupe d'ordre ℓ^2 est isomorphe à $\mathbb{Z}/\ell^2\mathbb{Z}$ ou à $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$.

Soient p, q deux nombres premiers **distincts** tels que $p \nmid q^2-1$ et que $q \nmid p-1$. Déterminer tous les groupes G d'ordre pq^2 à isomorphisme près.

On prendra bien soin de montrer que tous les groupes obtenus sont bien deux à deux non isomorphes.

Problème.

Soit G un groupe. On dit qu'un sous-groupe H est *maximal* si $H \neq G$ et pour tout sous-groupe H' de G, on a

$$H \subset H' \Longrightarrow H' = H \quad \text{ou } H' = G.$$

A.

1. On suppose que G est fini. Montrer que G possède au moins un sous-groupe maximal H.

2. Soit G un groupe quelconque, et soit H un sous-groupe de G tel que $[G : H]$ soit fini, et soit un nombre premier. Montrer que H est un sous-groupe maximal de G.

B.

1. On suppose que G agit non trivialement sur un ensemble non vide E, et que pour tous $x, x', y, y' \in E$, avec $x \neq y$ et $x' \neq y'$, il existe $g \in G$ tel que $g \cdot x = x'$ et $g \cdot y = y'$.

1. Soit $a \in E$, et soit $H = \mathrm{Stab}_G(a)$.

(i) Si $g_1, g_2 \in G \setminus H$, montrer qu'il existe $h \in H$ tel que $g_2^{-1} h g_1 \in H$.

(ii) Pour tout $g_0 \in G \setminus H$, montrer que $\langle H, g_0 \rangle = G$.

(ii) En déduire que H est un sous-groupe maximal de G.

2. Soit $n \geq 3$, et soit $H_n = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma(1) = 1\}$.

(i) Montrer que H_n est un sous-groupe maximal de $\mathfrak{S}_n$ d'indice n.

(ii) Tout sous-groupe maximal de $\mathfrak{S}_n$ est-il d'indice n ?

C.

1. Soit G un groupe non trivial, dont les seuls sous-groupes sont $\{1_G\}$ et G. Montrer que G est cyclique d'ordre p, où p est premier.

Indication. On pourra commencer par démontrer que G est monogène.

2. Soit G un groupe quelconque. On suppose que G possède un sous-groupe maximal H.

(i) Montrer que si H est distingué dans G, alors $[G : H]$ est fini, et est un nombre premier.

Indication. On pourra déterminer tous les sous-groupes de G/H, et utiliser la question 1.

(ii) On ne suppose plus que H est distingué dans G. On suppose que $[G : H]$ est fini. Est-il nécessairement premier ?

3. Soit H un sous-groupe de $\mathbb{Q}$ d'indice fini. Montrer que $H = \mathbb{Q}$. En déduire que $\mathbb{Q}$ n'a pas de sous-groupe maximal.

Indication. Montrer qu'il existe $n \geq 1$ tel que $nx \in H$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$.