Licence de Mathématiques A — Université J. Fourier
Topologie — 2012-2013

Contrôle continu n°2 du 22 octobre 2012 (3h)

Documents et calculatrices interdits.
Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1 Soit $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé.

1. Montrer que si $||.||$ est associée à un produit scalaire alors elle satisfait à l'identité du parallélogramme.
2. Que peut-on dire à propos de la réciproque ?

Exercice 2 Un nombre $x \in \mathbb{R}$ est algébrique s'il existe un polynôme non nul $P \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $P(x) = 0$. Un nombre qui n'est pas algébrique est dit *transcendant*.

1. Montrer que l'ensemble $\mathbb{Q}_n[X]$ (polynômes de degré $\leq n$ à coefficients rationnels) est dénombrable.
2. En déduire que $\mathbb{Q}[X]$ est dénombrable.
3. Montrer que l'ensemble des nombres transcendants est dense dans $\mathbb{R}$ i.e. on trouve des nombres transcendants dans tout intervalle ouvert non vide.

Exercice 3 On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction polynôme s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = P(x)$.

Soit f une fonction réelle. On suppose que f est limite uniforme de fonctions polynômes f_n sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \geq N$:

$$|f_n(x) - f_N(x)| < 1$$

2. En déduire qu'il existe une suite α_n telle que $\forall n \geq N,\ \forall x \in \mathbb{R}$:

$$f_n(x) = f_N(x) + \alpha_n$$

3. Montrer que f est une fonction polynôme.

Exercice 4 Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$

On suppose que la suite u possède une unique valeur d'adhérence, notée a.

1. Montrer que $f(a) = a$.
2. Montrer que u est convergente.
3. Que peut-on dire si f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$?

On pourra par exemple considérer la fonction $f(x) = \begin{cases} 1 + 1/x & \textit{si } x \leq 1, \\ 1/x & \textit{sinon.} \end{cases}$

Exercice 5 Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ (muni de la distance euclidienne d) et O un ouvert de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $K \subset O$. On notera $\delta := \inf\{\mathrm{dist}(x, K) : x \in \mathbb{R}^n \backslash O\}$.

1. Si $A \subset \mathbb{R}^n$ est non vide, montrer que la fonction $x \mapsto \mathrm{dist}(x, A) = \inf\{d(x, y),\ y \in A\}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^n$ (on pourra montrer qu'elle est lipschitzienne).

2. Nous voulons montrer que $\delta > 0$. On suppose que $\delta = 0$.

   (a) Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_n$ de $\mathbb{R}^n \backslash O$ telle que $\mathrm{dist}(x_n, K)$ tends vers 0.

   (b) Montrer que la suite $(x_n)_n$ est bornée.

   (c) En utilisant Bolzano-Weierstrass, trouver une contradiction.

Exercice 6 On désigne par X l'espace des fonctions continûment dérivables de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On définit, pour $f \in X$, $||f||^{(1)} = |f(0)| + ||f'||_\infty$, où $||.||_\infty$ est la norme de la convergence uniforme sur X, c'est-à-dire $||f||_\infty = \sup\{|f(x)|,\ x \in [0, 1]\}$.

1. Montrer que $||.||^{(1)}$ est bien une norme sur X.

2. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $f \in X$: $||f||_\infty \leq C||f||^{(1)}$.

   Pour $x \in [0, 1]$ et $n > 0$ on pose $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$.

3. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de X et converge uniformément vers $f \in X$ (que l'on précisera).

4. Est-ce que la suite de fonctions $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément ?

5. Peut-on trouver $D > 0$ tel que pour tout $f \in X$: $||f||^{(1)} \leq D||f||_\infty$?