

**Correction d' exercices****FEUILLE 1****Exercice 5**

b) De la solution  $x(t)$  de a) on déduit une solution  $\tilde{x}(t)$  de

$$y' = by - ay^2, \quad y(0) = y_0$$

(en inversant le rôle de  $a$  et  $b$ ).

On pose alors  $y(t) = \tilde{x}(-t)$ . On a

$$\begin{aligned} y'(t) &= -\tilde{x}'(-t) \\ &= -(b\tilde{x}(-t) - a\tilde{x}^2(-t)) \\ &= ay^2(t) - by(t) \end{aligned}$$

c) Posons  $z(t) = b - y(t)$ , alors  $y' = k(a - y)(b - y)$  si et seulement si

$$z' = -y' = -k(a + z - b)z = -kz(z - (b - a)) = -kz^2 + k(b - a)z$$

ou  $b - a > 0$ . Si  $k > 0$ , on connaît les solutions  $z$  par a), et si  $k < 0$  on les connaît par b). On en déduit  $y(t) = b - z(t)$  dans ces cas. Si  $k = 0$ ,  $y(t)$  est constante.

**Exercice 6** On sait que les solutions sont de la forme  $y(t) = y(t_0)e^{a(t-t_0)}$ .

a) On a

$$y(1925) = y(1900)e^{25a} = 1,5y(1900),$$

d'où  $e^{25a} = 1,5$  et  $a = \frac{\ln 1,5}{25}$ .

b) On a  $p(1925) = 1,5p_0$ ,  $p(1950) = e^{\frac{\ln 1,5}{25}50} = (1,5)^2$ ; et  $p(2000) = (1,5)^4$ .

c)  $\frac{p(t_2)}{p(t_1)} = 2$  ssi  $e^{a(t_2-t_1)} = 2$  ssi  $t_2 - t_1 = \frac{\ln 2}{a} = 25\frac{\ln 2}{\ln 1,5}$ .

**Exercice 7** Dans l'éconcé il faut lire 1879 à la place de 1979.

On a donc  $p(1879) = 435$  et  $p(1899) = 10.411300 = 4113000$ . Puisque  $p(t)$  suit

une loi de Malthus on a  $p(t) = p(t_0)e^{a(t-t_0)}$  ce qui donne  $p(1899) = p(1879)e^{10a}$ , d'où

$$a = \frac{1}{10} \ln\left(\frac{p(1899)}{p(1879)}\right) \simeq 0,915.$$

Après 1899 la loi est  $y' = (a - \frac{1}{10})y$ .

**Exercice 8** Si la population  $y(t)$  suit une loi de Malthus  $y' = ay$ , le temps de doublement ne dépend pas de  $t$ . En effet si  $\frac{p(t_2)}{p(t_1)} = 2 = e^{a(t_2-t_1)}$  alors  $t_2 - t_1 = \frac{\ln 2}{a}$ . Donc si la population double en 100 ans, elle quadruple en 200 ans.

## FEUILLE 2

### Exercice 1

a) On sait que  $y' = ay \Rightarrow y(t) = y(t_0)e^{a(t-t_0)}$ . D'où  $y(1970) = y(1928)e^{42a} = 2y(1928)$ , donc  $a = \frac{\ln 2}{42}$ .

b) On prend maintenant  $t_0 = 1970$ . Alors, en milliards d'individus on a

$$y(1980) = y(t_0)e^{10a} = 4,459,$$

$$y(1990) = y(t_0)e^{20a} = 5,141,$$

$$y(2000) = y(t_0)e^{30a} = 6,063,$$

$$y(2005) = y(t_0)e^{35a} = 6,585,$$

La proximité avec les données est satisfaisante.

c) En 2650 on aurait  $y(2650) = y(t_0)e^{680a} = 276408$  milliards d'habitants. Cela fait  $276408 \cdot 10^9 \cdot 10^{-14} = 2,76$  habitants par  $m^2$ , ce qui est tout à fait absurde. Clairement le modèle n'est plus valable.

### Exercice 2

Pour ce modèle on sait que  $y(t) \rightarrow \frac{a}{b}$  quand  $t$  tend vers  $+\infty$ . On a donc  $\frac{a}{b} = 5 \cdot 10^8$ . Si  $y = 1000 = 10^3$  alors  $\frac{ay}{by^2} = \frac{a}{b} \frac{1}{y} = 5 \cdot 10^8 \cdot 10^{-3} = 5 \cdot 10^5 \gg 1$ . Ceci signifie que  $by^2$  est négligeable comparé à  $ay$ . On peut considérer que la loi de  $y(t)$  est proche de  $y' = ay$  si  $y < 1000$ . On en déduit que  $y(t_1) = 2y(t_0) = y(t_0)e^{a(t_1-t_0)}$  avec  $t_1 - t_0 = 40$  (si  $t$  est mesuré en minutes).

On a donc  $a = \frac{\ln 2}{40}$ .

On revient à  $y' = ay - by^2$ . On sait que les solutions sont (avec  $y_0 = y(0)$ )

$$y(t) = \frac{a}{b - (b - \frac{a}{y_0})e^{-at}}.$$

a) si  $y_0 = 10^8$ , on trouve au bout de 2 heures=120 minutes,  $y(120) = \frac{10}{3}10^8$ .

b) si  $y_0 = 10^9$ , on trouve  $y(120) = \frac{16}{3}10^8$ .

### Indications pour chercher les exercices

#### Exercice 3

Supposer que  $\frac{a-bp(t)}{a-bp_0}$  s'annule et utiliser le théorème de Cauchy-Lipschitz.

#### Exercice 4

- a)  $\frac{a}{b}$  d'après le cours
- b) Utiliser  $p(t_0) = \frac{1}{10} \frac{a}{b}$  dans la solution.
- c) Dériver  $p' = ap - bp^2$ .

#### Exercice 6

On sait que  $a/b = 100000$ . Utiliser  $p_0 = 50000$  et  $p(5) = 60000$  dans la formule générale pour trouver  $a$ .