

## DIAGRAMMES D'ENRIQUES TORIQUES GÉNÉRALISÉS ET UN THÉORÈME DE ZARISKI INVERSE

GÉRARD GONZALEZ-SPRINBERG ET ANGEL PEREYRA

**Résumé-** Les diagrammes d'Enriques sont des données combinatoires associées à des constellations de points infiniment voisins et aux relations de proximité. La caractérisation des cas équivariants toriques fournit une réciproque, en dimension supérieure à deux, d'un théorème de Zariski sur les cônes caractéristiques réguliers.

### Generalized toric Enriques diagrams and a converse Zariski theorem.

**Abstract-** Enriques diagrams are combinatorial data associated to constellations of infinitely near points and proximity relations. The characterization of the toric equivariant cases gives, in higher dimension than two, a converse Zariski theorem on regular characteristic cones.

Soit  $X$  une variété algébrique non singulière de dimension  $d \geq 2$ , définie sur un corps  $K$ , et  $O$  un point fermé de  $X$ . Dans la suite, une *constellation* de points infiniment voisins de  $O$  signifiera un ensemble fini  $\mathcal{C} = \{Q_0 = O, Q_1, \dots, Q_n\}$  où,  $\sigma_i : X_{i+1} \rightarrow X_i$  désignant l'éclatement de  $X_i$  de centre  $Q_i$ , on a  $X_0 = X$  et  $Q_{i+1}$  est un point de  $X_{i+1}$  se projetant sur  $Q_0$  dans  $X_0$ ,  $0 \leq i \leq n$ . On appelle aussi dimension de  $\mathcal{C}$  la dimension de  $X$ . On identifiera deux constellations pour lesquelles les morphismes  $\sigma_{\mathcal{C}} = \sigma_0 \circ \dots \circ \sigma_n$  de  $X(\mathcal{C}) = X_{n+1}$  dans  $X$  sont  $X$ -isomorphes. La relation  $Q_j \geq Q_i$  si  $Q_j$  se projette sur  $Q_i$  dans  $X_i$ , est une relation d'ordre partielle sur les points de  $\mathcal{C}$ . Si  $\geq$  est un ordre total on dit que  $\mathcal{C}$  est une constellation en chaîne.

Pour chaque  $Q = Q_i$ , on note  $B_Q$  (ou  $B_i$ ) le diviseur  $\sigma_i^{-1}(Q)$  sur  $X_{i+1}$  et par  $E_Q$  (ou  $E_i$ ) ses transformées strictes successives, en particulier sur  $X(\mathcal{C})$ . On dit que  $Q_j$  est *proche* de  $Q_i$  si  $Q_j \in E_i$  et on note  $Q_j \rightarrow Q_i$ .

Le *diagramme d'Enriques* de  $\mathcal{C}$  est l'arbre  $\Gamma_{\mathcal{C}}$  avec racine muni de la relation binaire ( $\rightsquigarrow$ ), dont les sommets correspondent aux points  $Q \in \mathcal{C}$ , les arêtes aux couples  $(R, Q)$  tels que  $Q$  soit un point de  $E_R$  en dehors du lieu exceptionnel du morphisme  $E_R \rightarrow B_R$ , la racine correspond au point  $O$  et la relation ( $\rightsquigarrow$ ) à la relation de proximité ( $\rightarrow$ ). Ce type de diagramme a été introduit par Enriques [6] dans l'étude des systèmes linéaires de courbes planes avec points base infiniment voisins fixés (voir aussi [4]).

Pour chaque  $Q \in \mathcal{C}$ , le sous-ensemble  $\mathcal{C}^Q = \{R \in \mathcal{C} \mid Q \geq R\}$  est une chaîne. L'entier non négatif  $l(Q) = \#\mathcal{C}^Q - 1$  est appelé le *niveau* de  $Q$ . Si  $q$  est le sommet de  $\Gamma_{\mathcal{C}}$  correspondant au point  $Q$ , le niveau de  $Q$  est le nombre  $l(q)$  d'arêtes de la chaîne, dans  $\Gamma_{\mathcal{C}}$ , dont les extrémités sont  $q$  et la racine.

On dispose d'une caractérisation des diagrammes d'Enriques dans l'ensemble des arbres finis avec racine munis d'une relation binaire sur l'ensemble des sommets (voir [1],[2]).

On appelle *indice de proximité* d'un point  $Q \in \mathcal{C}$  le nombre  $ind(Q)$  de points approchés par  $Q$ , i.e.  $ind(Q) = \#\{R \in \mathcal{C} \mid Q \rightarrow R\}$ .

De même, si  $q$  est le sommet du diagramme d'Enriques de  $\mathcal{C}$ , correspondant au point  $Q$ , on note  $\text{ind}(q) = \#\{r \in \Gamma_{\mathcal{C}} \mid q \rightsquigarrow r\}$ .

Si  $X$  est une variété torique et  $\mathcal{C}$  est une constellation de points fixes pour l'action du tore, on dit que  $\mathcal{C}$  est une *constellation torique*.

Étant donné un arbre  $\Gamma$  avec racine on note  $\succeq$  l'ordre partiel naturel sur l'ensemble des sommets :  $r \succeq q$  si  $q$  appartient à la chaîne reliant  $r$  à la racine. On note  $q^+ = \{r \in \Gamma \mid r \succeq q, l(r) = l(q) + 1\}$  l'ensemble des sommets consécutifs à  $q$ . De même, si  $Q$  est un point d'une constellation, on note  $Q^+$  l'ensemble des points consécutifs à  $Q$  pour la relation  $\succeq$ .

**Théorème 1.** *Un diagramme d'Enriques  $(\Gamma, \rightsquigarrow)$  est torique (i. e. peut être associé à une constellation torique) si et seulement si :*

1. *L'indice de proximité est une fonction non décroissante, i. e.  $\text{ind}(r) \geq \text{ind}(q)$  si  $r \succeq q$ ;*
2. *Si  $r$  est proche de  $q$  il existe au plus un sommet  $s$  consécutif à  $r$ , qui n'approche pas  $q$ , i. e. si  $r \rightsquigarrow q$  alors  $\#\{s \in r^+ \mid s \not\rightsquigarrow q\} \leq 1$ .*

Si 1. et 2. sont satisfaites, la dimension minimum  $d_{\mathcal{P}}$  d'une constellation torique dont le diagramme d'Enriques soit  $(\Gamma, \rightsquigarrow)$  est  $d_{\mathcal{P}} = \max(2, \max_{q \in \Gamma} (\text{ind}(q) + s(q)))$ , où  $s(q) := \#\{r \in q^+ \mid \text{ind}(r) > \text{ind}(q)\}$  est le nombre de sommets consécutifs à  $q$  et d'indice de proximité strictement supérieur à celui de  $q$ .

En fait on a  $\text{ind}(R) \leq \text{ind}(Q) + 1$  si  $R \in Q^+$ , pour toute constellation; dans le cas torique on a de plus  $\text{ind}(Q) \leq \text{ind}(R)$ , d'où la nécessité de 1. Celle de 2. peut être montrée en utilisant la codification de la relation de proximité pour les constellations toriques (voir [1] et [2]), car si  $R \rightarrow Q$ ,  $S \in R^+$  et  $S \not\rightsquigarrow Q$ , alors le poids de l'arête  $(s, r)$  est égal à celui de l'arête d'origine  $q$  dans la chaîne de  $q$  à  $r$ . On prouve que les conditions sont suffisantes par récurrence sur le nombre des sommets de  $\Gamma$ , en construisant une constellation torique, dont la dimension est nécessairement au moins  $d_{\mathcal{P}}$ , avec diagramme d'Enriques associé  $(\Gamma, \rightsquigarrow)$ .  $\square$

**Corollaire 2.** *Un diagramme d'Enriques  $(\Gamma, \rightsquigarrow)$ , où  $\Gamma$  est une chaîne, est torique si et seulement si l'indice de proximité est non décroissant. La dimension minimum d'une constellation torique en chaîne avec diagramme d'Enriques  $(\Gamma, \rightsquigarrow)$  est le maximum entre 2 et l'indice de proximité du dernier sommet.*

En effet, dans le cas des chaînes, la condition 2. de l'énoncé précédent est automatiquement satisfaite et on vérifie  $\max_q (\text{ind}(q) + s(q)) = \max_q (\text{ind}(q))$   $\square$

On définit une relation plus fine que celle de proximité, appelée relation de *proximité linéaire*, notation  $R \xrightarrow{l} Q$ , pour deux points  $R$  et  $Q$  d'une constellation torique tels que  $R$  appartient à la transformée stricte de l'adhérence dans  $B_Q$  d'une orbite  $l$  de dimension un du tore.

La relation de proximité linéaire étant une condition de dimension un et celle de proximité étant une condition de codimension un, elles coïncident si la dimension ambiante est deux. En dimension supérieure ces deux relations sont différentes en général et donnent lieu à deux généralisations des diagrammes d'Enriques.

**Proposition 3.** *Si  $\mathcal{C}$  est une constellation torique en chaîne, de dimension quelconque, la relation de proximité détermine celle de proximité linéaire.*

En effet, on a  $R \xrightarrow{l} Q$  si et seulement si  $R \rightarrow Q$  et les seules relations de proximités parmi les points de la chaîne de  $R$  à  $Q$  sont celles des points consécutifs

et de chaque point avec  $Q$ , où  $l$  est la droite déterminée par  $Q^+$  et  $Q^{++}$  si  $Q^{++} \neq \emptyset$  ou toute orbite de dimension un passant par  $Q$  sinon.  $\square$

On appelle *bi-chaîne* d'un arbre orienté  $\Gamma$  tout sous-graphe de  $\Gamma$  formé de deux chaînes ayant la même racine et aucune arête commune.

Si  $\Gamma$  est l'arbre orienté associé à une constellation torique  $\mathcal{C}$ ,  $q$  le sommet associé à  $Q \in \mathcal{C}$  et  $l$  est une 1-orbite dans  $B_Q$ , on note  $\Gamma_q(l)$  le sous-graphe plein de  $\Gamma$  avec sommets correspondant aux  $R \in \mathcal{C}$  tels que  $R \xrightarrow{l} Q$  et celui correspondant à  $Q$ . Chaque graphe  $\Gamma_q(l)$  est une chaîne ou une bi-chaîne de  $\Gamma$ . On note  $\Gamma(q)$  la famille des  $\Gamma_q(l)$  maximaux, quand  $l$  parcourt les 1-orbites dans  $B_Q$ . On dit qu'un sommet  $q \in \Gamma$  est *simple* (resp. de *ramification*) si  $\#q^+ = 1$  (resp. si  $\#q^+ > 1$ ).

**Proposition 4.** *Soit  $\mathcal{C}$  une constellation torique,  $\Gamma$  l'arbre orienté associé.*

1. (a) *Pour chaque  $q \in \Gamma$ , la famille  $\Gamma(q)$  est non vide et les éléments de  $\Gamma(q)$  sont des chaînes ou bi-chaînes de racine  $q$ .*  
 (b) *Si  $\gamma, \gamma' \in \Gamma(q)$  et  $\gamma \subset \gamma'$ , alors  $\gamma = \gamma'$ .*
2. (a) *Deux éléments distincts de  $\bigcup_q \Gamma(q)$  ont au plus une arête commune.*  
 (b) *Deux arêtes de racine commune un sommet  $q$  de ramification (resp. l'arête de racine un sommet simple  $q$ ) appartiennent (resp. appartient) à un (et un seul) élément de  $\Gamma(q)$ .*
3. (a) *Pour chaque  $q \in \Gamma$  et  $r \in q^+$  il existe au plus un sommet  $s \in r^+$  tel que la chaîne  $(q, r, s)$  ne soit contenue dans aucun élément de  $\Gamma(q)$ .*  
 (b) *Si  $(p, \dots, q, r)$  est une chaîne contenue dans un  $\gamma \in \Gamma(p)$  et  $s \in r^+$  satisfait 3.(a), alors la chaîne  $(p, \dots, q, r, s)$  est contenue dans  $\gamma$ .*

On appelle *PL-diagramme d'Enriques* d'une constellation torique  $\mathcal{C}$  le graphe associé  $\Gamma$  muni de la structure de proximité linéaire formée de la famille de sous-graphes pleins  $\{\Gamma(q) \mid q \in \Gamma\}$ .

**Théorème 5.** *Le couple  $(\Gamma, \{\Gamma(q) \mid q \in \Gamma\})$  d'un arbre fini  $\Gamma$  avec racine et d'une famille de sous-graphes pleins  $\Gamma(q)$ ,  $q \in \Gamma$  est le PL-diagramme d'Enriques d'une constellation torique  $\mathcal{C}$  si et seulement si les propriétés 1, 2 et 3 de la proposition précédente sont satisfaites.*

*La dimension minimum  $d_{PL}$  des constellations ayant un PL-diagramme d'Enriques donné est  $d_{PL} = \max(2, \max_{q \in \Gamma} (\#q^+ + n_q))$  où*

$$n_q = \max_{r \in q^+} \#\{\gamma \in \Gamma(q) \mid r \in \gamma \text{ chaîne de longueur au moins deux}\}.$$

La preuve de la proposition 4 peut être faite en utilisant la codification de la proximité linéaire (voir [1] et [2]); celle du théorème 5 par récurrence sur le niveau des sommets, en construisant une constellation torique de dimension nécessairement au moins  $d_{PL}$ .  $\square$

Le théorème de Zariski sur la factorisation des idéaux de polynômes définis par des points base infiniment voisins ([8]) peut être formulé dans un cadre plus général: pour toute constellation  $\mathcal{C}$  de dimension deux, le cône caractéristique engendré par les diviseurs  $\sigma$ -généralisés dans  $N^1(X(\mathcal{C})|X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$  (i.e. les diviseurs  $D$  tels que  $\mathcal{O}_{X(\mathcal{C})}(-D)$  soit engendré par ses sections globales dans un voisinage du diviseur exceptionnel de  $\sigma$ ) est régulier. En dimension supérieure l'énoncé équivalent n'est pas satisfait en général ([7], [5]), même pour les constellations en chaîne ([3], [5]). On a un résultat positif pour les constellations toriques, en toutes dimensions ([1], [2]), qui peut être formulé en termes de la structure PL : le cône caractéristique est régulier si et seulement si  $\Gamma(q)$  n'a qu'un élément, pour chaque  $q \in \Gamma$ . En particulier

toute constellation torique en chaîne possède cette propriété, en toute dimension. Les résultats précédents caractérisant les PL-diagrammes d'Enriques impliquent un théorème de Zariski inverse:

**Corollaire 6.** *Le cône caractéristique d'une constellation torique est régulier si et seulement si son PL-diagramme d'Enriques est celui d'une constellation de dimension deux.*

En effet, si  $\Gamma(q)$  n'a qu'un seul élément, alors  $0 \leq \#q^+ \leq 2$ , or  $0 \leq \#q^+ \leq 1$  implique  $0 \leq n_q \leq 1$ ,  $\#q^+ = 2$  implique  $n_q = 0$  et par suite la dimension minimale  $d_{PL}$  est deux.  $\square$

#### Références bibliographiques

- [1] A. Campillo, G. Gonzalez-Sprinberg, M. Lejeune-Jalabert: Enriques diagrams, resolutions and toric clusters. C.R.Acad.Sc.Paris, t.320, Série I, 1995, pp. 329-334.
- [2] A. Campillo, G. Gonzalez-Sprinberg, M. Lejeune-Jalabert: Clusters of infinitely near points. Math. Ann. 306, 1996, pp. 169-194.
- [3] A. Campillo, G. Gonzalez-Sprinberg: On Characteristic Cones, Clusters and Chains of Infinitely Near Points, Progress in Math. Vol 162, 1998, pp. 251-261.
- [4] E. Casas: Infinitely near imposed singularities and singularities of polar curves, Math. Ann 287 (1990), pp. 429-454.
- [5] S. D. Cutkosky: Complete Ideals in Algebra and Geometry, Contemporary Math. Vol 159, 1994, pp. 27-39.
- [6] F. Enriques, O. Chisini: Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche (1915) CMS Zanichelli, 1985, Libro IV.
- [7] J. Lipman: On complete ideals in regular local rings, Algebraic geometry and commutative algebra in honor of M. Nagata, 1987, pp. 203-231.
- [8] O. Zariski: Polynomial ideals defined by infinitely near base points, Amer. J. Math. 60, 1933, pp. 151-204.

G.Gonzalez-Sprinberg  
 Institut Fourier  
 Université de Grenoble I  
 France  
 gonsprin@fourier.ujf-grenoble.fr

A.Pereyra  
 Centro de Matemática  
 Facultad de Ciencias  
 Uruguay  
 angel@cmat.edu.uy