COURBES LISSES, CYCLE MAXIMAL ET POINTS INFINIMENT VOISINS DES SINGULARITÉS DE SURFACES

by Gérard GONZALEZ-SPRINBERG et Monique LEJEUNE-JALABERT

Introduction

Pour entreprendre l'étude des familles de courbes tracées sur une singularité de surface, proposée par J. Nash, il est peut-être naturel de commencer par celle des courbes lisses.

Les objets considérés ici sont locaux ; par singularité de surface, nous entendons un germe de surface réduite équidimensionnelle (S, O) en un point singulier, formel ou analytique, défini sur un corps algébriquement clos k de caractéristique nulle ; et par courbe, une courbe paramétrée formelle.

Dans le premier paragraphe, on donne des critères d'existence de courbes lisses sur (S, O) non contenues dans le lieu singulier de S, où interviennent une désingularisation de S et le cycle maximal (Théorème 1.3) $(^*)$. On appelle désingularisation de S un morphisme propre $\pi : X \to S$ induisant un isomorphisme d'un ouvert dense de X sur l'ouvert régulier de S, tel que X soit lisse. On donne ensuite quelques exemples d'applications des critères obtenus.

Après avoir défini la notion de section hyperplane générale de (S, O), l'existence de branches lisses de celle-ci est le sujet du § 2. Les résultats (Proposition 2.4 et Théorème 2.5) font intervenir l'éclatement normalisé de centre O ou une désingularisation de S qui le domine, et une condition numérique d'intersection pour le cycle maximal.

Dans le § 3 on définit les familles de courbes lisses à partir de la désingularisation minimale π de la surface S. Ces familles, qui forment une partition de l'ensemble des courbes lisses sur S, sont associées à certaines composantes irréductibles de la fibre exceptionnelle $\pi^{-1}(O)$ caractérisées par les critères du § 1. On précise les résultats des deux paragraphes précédents pour chacune d'elles (Propositions 3.2.1, 3.2.2, 3.3.1, 3.3.2). En particulier, à l'aide d'applications "fibre", on détermine les points exceptionnels des transformées strictes des courbes d'une même famille par éclatement normalisé et désingularisations (Propositions 3.4.1 et 3.4.2). Chaque famille détermine une chaîne de points infiniment voisins satisfaisant une condition de minimalité (Théorème 3.5). La longueur de cette chaîne est aussi caractérisée en termes de jets des paramétrisations des courbes de la famille (Théorème 3.6.2). Les éclatements définissant la chaîne permettent de retrouver des sections hyperplanes générales possédant des branches lisses ; nous obtenons ainsi une nouvelle caractérisation des familles de courbes lisses (Théorème 3.7.2).

$(^*)$ Ceci répond à une question posée par E. Casas.

Le § 4 contient quelques remarques spécifiques au cas des hypersurfaces et le dernier paragraphe est consacré à un exemple.

1. Existence de courbes lisses, critères en termes de désingularisations

Soit S une surface réduite définie sur un corps algébriquement clos k de caractéristique nulle, O un point de S.

On dit que S possède *la propriété* $(c\ell)$ en O s'il existe une courbe lisse Γ telle que $O \in \Gamma$ et $\Gamma \setminus \{O\}$ soit contenue dans l'ouvert des points réguliers $\operatorname{Reg} S$ de S.

Soit $\pi : X \to S$ une désingularisation de S ; on appelle *cycle maximal* le cycle $\mathcal{Z}_X = \sum m_i E_i$ défini par la partie divisorielle de $m\mathcal{O}_X$, où m est l'idéal maximal $\operatorname{Max} \mathcal{O}_{S,O}$ de $\mathcal{O}_{S,O}$, où les E_i sont les différentes composantes irréductibles de dimension 1 de la fibre exceptionnelle $\pi^{-1}(O)$, et où les m_i sont des entiers non négatifs.

1.1. Proposition. — *Soit S une surface réduite, O un point singulier de S, et $\pi : X \to S$ une désingularisation de S telle que la fibre exceptionnelle $\pi^{-1}(O)$ n'ait pas de points isolés. Alors S possède la propriété $(c\ell)$ si et seulement si le cycle maximal $\mathcal{Z}_X = \sum m_i E_i$ de $m\mathcal{O}_X$ possède une composante réduite, i.e. il existe i tel que $m_i = 1$. S'il en est ainsi, $m\mathcal{O}_X$ est localement principal au voisinage du point exceptionnel P de la transformée stricte de la courbe lisse Γ. De plus ce point est un point lisse de $\pi^{-1}(0)$ et il appartient à une composante réduite de $\mathcal{Z}_X$. Inversement, si P est un tel point, il appartient à la transformée stricte d'une courbe lisse dans S.*

Preuve. — Remarquons d'abord que, puisque $\pi^{-1}(O)$ n'a pas de points isolés, la partie divisorielle de $m\mathcal{O}_X$ n'est pas nulle.

Supposons qu'il existe une composante réduite E_i du cycle maximal $\mathcal{Z}_X$. On choisit un point non singulier P de E_i n'appartenant à aucune autre composante de $\pi^{-1}(O)$, et n'appartenant pas non plus au support de la partie immergée de $m\mathcal{O}_X$. Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ un système minimal de générateurs de m. Soit (u, v) un système régulier de paramètres de $\mathcal{O}_{X,P}$; on a $(u, v) = \operatorname{Max} \mathcal{O}_{X,P}$. Puisque E_i est non singulier en P, on peut supposer que E_i est défini au voisinage de P par $u = 0$. D'autre part, le lieu singulier $\operatorname{Sing} S$ de S est de dimension au plus 1 car S est une surface réduite, et π étant une désingularisation il en est de même de $\pi^{-1}(\operatorname{Sing} S)$. On peut donc supposer de plus que $\pi^{-1}(\operatorname{Sing} S) \cap \{v = 0\} = \{P\}$ au voisinage de P. Soit π donné (formellement) par $x_j = \varphi_j(u, v)$, $1 \leq j \leq n$. On a donc $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = (u)$, et on peut supposer que $\varphi_1 = {*u}$ (où $*$ est une unité) en réindexant au besoin les coordonnées. Soit $\widetilde{\Gamma}$ la courbe définie par $u = t$, $v = 0$. Alors la courbe $\Gamma := \pi(\widetilde{\Gamma})$ est lisse et $\Gamma \setminus \{0\} \subset \operatorname{Reg} S$, car Γ est définie par $x_1 = {*t}$, $x_i = \varphi_i(t, 0)$, $2 \leq i \leq n$, et d'autre part $\widetilde{\Gamma} \setminus \{P\} \subset \pi^{-1}(\operatorname{Reg} S)$.

Inversement, supposons que S possède la propriété $(c\ell)$; soit Γ une courbe lisse par O telle que $\Gamma \setminus \{O\} \subset \operatorname{Reg} S$. Soit $\widetilde{\Gamma}$ la transformée stricte de Γ par π, et P le point de $\widetilde{\Gamma}$ se projetant sur O. Alors $\widetilde{\Gamma}$ est lisse. Soit encore (u, v) un système régulier de paramètres de $\mathcal{O}_{X,P}$, $\big(u(t), v(t)\big)$

une paramétrisation de $\widetilde{\Gamma}$. Soit g un générateur de la partie divisorielle de $m\mathcal{O}_{X,P}$ qui est non nulle puisque P n'est pas un point isolé de $\pi^{-1}(O)$. Soit π donné (formellement) par $x_j = \varphi_j(u,v)$, $1 \leq j \leq n$, au voisinage de P. Posant $\varphi_j = g\psi_j$, $1 \leq j \leq n$, on a, puisque Γ est lisse,

$$\inf_{1\leq j\leq n} \operatorname{ord}_t \varphi_j\big(u(t),v(t)\big) = 1 \ .$$

Or :

$$1 \leq \operatorname{ord}_t g\big(u(t),v(t)\big) \leq \inf_{1\leq j\leq n} \operatorname{ord}_t \varphi_j\big(u(t),v(t)\big) = 1 \ .$$

Donc

$$\inf_{1\leq j\leq n} \operatorname{ord}_t \psi_j\big(u(t),v(t)\big) = 0$$

et $g \in M \smallsetminus M^2$ où $M = \operatorname{Max}\mathcal{O}_{X,P}$. Il existe donc j, tel que ψ_j soit une unité. Au voisinage de P, $m\mathcal{O}_{X,P}$ est donc principal, $\pi^{-1}(O)$ est non singulier et $\mathcal{Z}_X$ est un diviseur réduit, irréductible, lisse.

1.2. Corollaire. — *Soit S une surface réduite, O un point singulier de S, et $\pi : X \to S$ une désingularisation .*

Si $m\mathcal{O}_X$ est localement principal, ou bien si S est une surface normale et π est une désingularisation quelconque, par exemple la désingularisation minimale, alors la propriété $(c\ell)$ est équivalente à l'existence d'une composante réduite du cycle maximal $\mathcal{Z}_X$.

Preuve. — En effet, si $m\mathcal{O}_X$ est localement principal, alors la fibre exceptionnelle n'a pas de points isolés ; et si S est normale, alors $m\mathcal{O}_X$ n'est pas forcément localement principal, mais la fibre exceptionnelle est connexe et de dimension 1 ("main theorem" de Zariski). Alors l'équivalence résulte de la proposition 1.1.

1.3. Théorème. — *Soit S une surface réduite, O un point de S, m l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{S,O}$, $\pi : X \to S$ une désingularisation . Alors la propriété $(c\ell)$ est équivalente à : ou bien le cycle maximal défini par la partie divisorielle de $m\mathcal{O}_X$ est non nul et possède une composante réduite, ou bien il existe un point isolé P de la fibre exceptionnelle $\pi^{-1}(O)$ et un entier $m \geq 1$ tel que $m\mathcal{O}_{X,P} = (u, v^m)$ pour un système régulier de paramètres convenable (u,v) de $\mathcal{O}_{X,P}$.*

Preuve. — Si S possède la propriété $(c\ell)$, soit Γ une courbe lisse, $\widetilde{\Gamma}$ sa transformée stricte dans X, et P le point de $\widetilde{\Gamma}$ se projetant sur O. Si P n'est pas un point isolé de $\pi^{-1}(O)$, alors la partie divisorielle de $m\mathcal{O}_X$ est non nulle et possède une composante réduite, par la proposition 1.1. Si P est un point isolé de $\pi^{-1}(O)$, (u,v) un système régulier de paramètres de $\mathcal{O}_{X,P}$, et si π est donné (formellement) par $x_j = \varphi_j(u,v)$, $1 \leq j \leq n$ et $\widetilde{\Gamma}$ par $\big(u(t),v(t)\big)$, alors on a :

$$1 = \inf \operatorname{ord}_t \varphi_j\big(u(t),v(t)\big)$$

car Γ est lisse. Il existe donc j, par exemple 1, tel que $\varphi_j \in M \smallsetminus M^2$, où $M = \operatorname{Max}\mathcal{O}_{X,P}$. On peut donc supposer que $\varphi_1 = u$, et qu'il existe $\lambda_i(v)$ (une unité, si $\varphi_i \not\equiv 0 \pmod{u}$), et m_i entier, $m_i \geq 1$, tels que $\varphi_i \equiv \lambda_i v^{m_i} \pmod{u}$, $2 \leq i \leq n$.

L'ensemble $\{m_i | \lambda_i \text{ unité }, 2 \leq i \leq n\}$ est non vide, car P est un point isolé de $\pi^{-1}(O)$.

Par suite $m\mathcal{O}_{X,P} = (u, v^m)$ où $m = \inf\{m_i | \lambda_i \text{ unité }, 2 \leq i \leq n\}$, et on a $m \geq 1$.

Inversement, si la partie divisorielle de $m\mathcal{O}_X$ contient une composante réduite, l'argument est identique à celui de la proposition 1.1, et S possède la propriété $(c\ell)$. Si maintenant P est un point isolé de $\pi^{-1}(O)$ tel que $m\mathcal{O}_{X,P} = (u, v^m)$, soit $\widetilde{\Gamma}$ la courbe définie par $u = t$; $v = tf(t)$, où $f(t)$ est tel que $\widetilde{\Gamma} \smallsetminus \{P\}$ évite l'image réciproque de $\operatorname{Sing} S$. Alors $\Gamma := \pi(\widetilde{\Gamma})$ est définie par $x_i(t)$, $1 \leq i \leq n$, et comme $\big(x_1(t), \dots, x_n(t)\big) = \big(u(t), v^m(t)\big) = (t)$, cette courbe est lisse et $\Gamma \smallsetminus \{O\} \subset \operatorname{Reg} S$.

1.4. Remarque. — Les idéaux de type (u, v^m), $m \geq 1$, dans un anneau local régulier R de dimension 2, qui interviennent dans l'énoncé du théorème 1.3 sont caractérisés par la propriété suivante : soit I un idéal de R, primaire pour l'idéal maximal M. Il existe un système régulier de paramètres (u, v) de R et $m \geq 1$ tel que $I = (u, v^m)$ si et seulement si on a $\nu_M(I) = 1$, où $\nu_M(I) = \sup(n \in \mathbf{N} | I \subset M^n)$. Le nombre $\nu_M(I)$ est aussi la multiplicité avec laquelle apparaît le diviseur exceptionnel E_1 dans la partie divisorielle de la transformée totale de I par l'éclatement de l'idéal maximal de $\operatorname{Spec} R$.

La transformée totale de I devient un diviseur à croisements normaux après une suite de m éclatements de points et le cycle associé est $E_1 + 2E_2 + \cdots + mE_m$ où E_i est la transformée stricte de la composante exceptionnelle introduite au i-ième éclatement, $1 \leq i \leq m$. Le graphe dual pondéré est :

1.5. Exemples d'application des critères précédents.

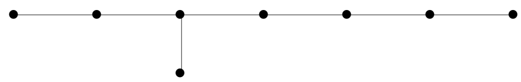
(a). — La singularité de type $\mathbb{A}_n$ de la surface S d'équation $xy = z^{n+1}$, $n \geq 1$, possède la propriété $(c\ell)$. En effet, la fibre exceptionnelle $\pi^{-1}(O)$ de la désingularisation minimale $\pi : X \to S$ est la réunion de n courbes rationnelles lisses E_i, $1 \leq i \leq n$, et le cycle maximal associé à $m\mathcal{O}_X$ (qui est localement principal) est réduit et s'écrit $\mathcal{Z}_X = E_1 + \cdots + E_n$. Pour chaque composante exceptionnelle E_i et pour chaque point P de E_i qui n'appartient pas à l'intersection de E_i avec d'autres composantes exceptionnelles, il existe des courbes lisses Γ dans S dont la transformée stricte $\widetilde{\Gamma}$ contient P, est lisse et transverse à E_i en P, par la proposition 1.1.

(b). — Les singularités toriques de surfaces (ou éventails de dimension 2) possèdent la propriété $(c\ell)$, car l'idéal maximal devient localement principal dans la désingularisation minimale, la fibre exceptionnelle est une chaîne de courbes rationnelles lisses et le cycle maximal est réduit ([TE], [A]). Les singularités d'hypersurface de type $\mathbb{A}_n$ sont les seules intersections complètes parmi les singularités toriques.

(c). — Plus généralement, on peut appliquer les critères de la proposition et du théorème précédents pour les singularités rationnelles, en connaissant seulement le graphe dual pondéré du diviseur exceptionnel de la désingularisation minimale. En effet, celui-ci détermine le cycle fondamental, qui coïncide avec le cycle maximal [A].

Ainsi, par exemple, les points doubles rationnels de type $\mathbb{D}_n$, $\mathbb{E}_6$ et $\mathbb{E}_7$ possèdent la propriété $(c\ell)$.

(d). — La singularité de type $\mathbb{E}_8$ de la surface S d'équation $x^2 + y^3 + z^5 = 0$ ne possède pas la propriété $(c\ell)$. En effet, le graphe dual de la désingularisation minimale est



où chaque sommet représente une courbe rationnelle lisse d'auto-intersection -2, et les multiplicités des composantes du cycle fondamental, suivant le graphe précédent, sont : $\begin{array}{ccccccc} 2 & 4 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2. \\ & & 3 & & & & \end{array}$

Donc, il n'y a aucune composante réduite du cycle maximal et par suite aucune courbe lisse.

(e). — Soit S le parapluie de Whitney d'équation $x^2 = y^2 z$. La normalisation $n : \overline{S} \to S$ est la désingularisation minimale de S ; la fibre exceptionnelle $n^{-1}(O)$ est un point isolé P, au voisinage duquel n est donnée par $x = uv$, $y = u$, $z = v^2$, où (u, v) est un système régulier de paramètres de $\mathcal{O}_{\overline{S},P}$. Par suite, si m est l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{S,O}$, on a $m\mathcal{O}_{\overline{S},P} = (u, v^2)$. Par suite, S possède la propriété $(c\ell)$ en O (théorème 1.3). Par exemple, on a les courbes lisses $\Gamma_{\alpha,\beta}$ donnés par $x = \alpha\beta t^{n+1}$, $y = \alpha t$, $z = \beta^2 t^{2n}$, avec $\alpha, \beta \in k$, $\alpha \neq 0$.

2. Courbes lisses et section hyperplane générale

Nous commençons par préciser la notion de section hyperplane générale d'un germe de surface réduite (S, O). Il s'agit de celle de l'énoncé de [GS 2] 2.1, définie en terme de l'éclatement normalisé de O. Soit $\sigma_1 : S_1 \to (S, O)$ l'éclatement de O, $n_1 : \overline{S}_1 \to S_1$ la normalisation de S_1, $\overline{\sigma}_1 = \sigma_1 \circ n_1$ l'éclatement normalisé. Notons $\mathcal{Z}_1$ (resp. $\overline{\mathcal{Z}}_1$) le cycle maximal défini par $m\mathcal{O}_{S_1}$ (resp. $m\mathcal{O}_{\overline{S}_1}$) et $|\mathcal{Z}_1|$ (resp. $|\overline{\mathcal{Z}}_1|$) la courbe réduite sous-jacente. Les cycles $\mathcal{Z}_1$ et $\overline{\mathcal{Z}}_1$ proviennent de diviseurs de Cartier respectivement sur S_1 et $\overline{S}_1$; $|\mathcal{Z}_1|$ et $|\overline{\mathcal{Z}}_1|$ sont des diviseurs de Weil.

Enfin, soit $C_{S,O} = \operatorname{Spec} \underset{n \geq 0}{\oplus} m^n/m^{n+1}$ le cône tangent à S en 0, $T_{S,O} = \operatorname{Spec} \operatorname{Sym} m/m^2$ son espace tangent de Zariski. On a $\operatorname{Proj} |C_{S,O}| = |\mathcal{Z}_1| = \sigma_1^{-1}(O)$.

2.1. Définition. — On désigne par *section hyperplane* de (S, O) une courbe (non nécessairement réduite) sur (S, O) admettant pour équation locale $h = 0$ où $h \in m \smallsetminus m^2$.

On dit qu'elle est *générale* si l'hyperplan H de $\operatorname{Proj} T_{S,O}$, ayant pour équation homogène $h \bmod m^2 = 0$, coupe transversalement $\operatorname{Proj} |C_{S,O}| = \sigma_1^{-1}(O)$ en évitant ses points singuliers, les images par n_1 des points singuliers (isolés) de $\overline{S}_1$ et des points de ramification de la restriction $n_{1||\overline{\mathcal{Z}}_1|} : |\overline{\mathcal{Z}}_1| \to |\mathcal{Z}_1|$, enfin, si O n'est pas un point singulier isolé de S, la transformée stricte de $\operatorname{Sing} S$.

Les *génératrices* de $C_{S,O}$ correspondant aux points de $\sigma_1^{-1}(O)$ énumérés ci-dessus seront dites *spéciales.*

Il résulte du théorème de Bertini que l'ensemble des hyperplans vérifiant les conditions ci-dessus est un ouvert de Zariski dense U du système linéaire des hyperplans de $\operatorname{Proj} T_{S,0}$ vu comme espace projectif.

Soit $h \in m \setminus m^2$ tel que $H \in U$ et désignons par C_h (resp. T_h) la section hyperplane générale de (S, O) d'équation $h = 0$ (resp. sa transformée stricte sur $\overline{S}_1$). La section hyperplane générale C_h est une courbe génériquement réduite et elle possède un point immergé en O si et seulement si $\mathcal{O}_{S,O}$ n'est pas un anneau Cohen-Macaulay ; T_h et $|\overline{\mathcal{Z}}_1|$ se coupent transversalement en des points non singuliers de $|\overline{\mathcal{Z}}_1|$, de $\overline{S}_1$ et de T_h n'appartenant pas à la transformée stricte de $\operatorname{Sing} S$ sur $\overline{S}_1$ si $\dim \operatorname{Sing} S = 1$ ([GS 2] 2.1).

Soit $E_1, \ldots, E_s$ les composantes irréductibles de $|\overline{\mathcal{Z}}_1|$. On a $\overline{\mathcal{Z}}_1 = \sum |1 \leq j \leq s| m_j E_j$ où $m_j \in \mathbb{N}$, $m_j \geq 1$.

2.2. Lemme. — *Avec les notations précédentes, si $H \in U$, $(T_h \cdot E_j)$ est un entier strictement positif indépendant de h égal à $-(\overline{\mathcal{Z}}_1 \cdot E_j)$ et la courbe C_h a $-(\overline{\mathcal{Z}}_1 \cdot |\overline{\mathcal{Z}}_1|)$ branches (composantes analytiquement irréductibles de dimension 1) dont $-(\overline{\mathcal{Z}}_1 \cdot E_j)$ de multiplicité m_j en O.*

Preuve. — Montrons d'abord que $(T_h \cdot E_j) > 0$. La courbe T_h est non singulière donc c'est la normalisation de C_h. Elle coupe transversalement $|\overline{\mathcal{Z}}_1|$ en des points non singuliers de $|\overline{\mathcal{Z}}_1|$. Le nombre de branches de C_h est donc $\sum |1 \leq j \leq s| (T_h \cdot E_j) = (T_h \cdot |\overline{\mathcal{Z}}_1|)$, car un point non singulier de $|\overline{\mathcal{Z}}_1|$ appartient à un unique E_j, $1 \leq j \leq s$. D'autre part, les points d'intersection de T_h avec E_j, $1 \leq j \leq s$, sont les images réciproques par $n_{1|E_j}$ des points de $n_1(E_j)$ appartenant à la transformée stricte de C_h sur S_1, c'est-à-dire des points d'intersection de la composante irréductible $n_1(E_j)$ de $\operatorname{Proj}(C_{S,0})$ avec l'hyperplan H. Par définition de U, les points d'intersection de T_h et E_j ne sont pas des points de ramification de $n_{1|E_j}$; $(T_h \cdot E_j)$ est donc le produit du degré de la courbe projective $n_1(E_j)$ par le degré de la restriction de n_1 à E_j sur son image. En particulier, c'est un entier strictement positif et indépendant de h tel que $H \in U$. Enfin, soit $\mathcal{Z}_h$ le cycle à support exceptionnel tel que $(h) = \mathcal{Z}_h + T_h$. Pour montrer que, si $H \in U$, $(T_h \cdot E_j) = -(\overline{\mathcal{Z}}_1 \cdot E_j)$, il suffit qu'il existe h tel que $H \in U$ et que $\mathcal{Z}_h = \overline{\mathcal{Z}}_1$. Mais cette condition détermine un ouvert de Zariski dense de l'ensemble des hyperplans de $\operatorname{Proj} T_{S,O}$, donc il existe un tel h.

Montrons maintenant que la multiplicité d'une branche Γ de C_h dont la transformée stricte sur $\overline{S}_1$ intersecte E_j est m_j. Soit P un tel point d'intersection ; c'est un point non singulier de $\overline{S}_1$ et de E_j et $P \notin E_{j'}$ si $j' \neq j$. Il existe donc un système régulier de paramètres (u, v) de $\mathcal{O}_{\overline{S}_1,P}$ tel que u engendre l'idéal définissant E_j localement en P, et un système minimal de générateurs de m, $(x_1, \ldots, x_n)$, tel que $x_i = u^{m_j} \varphi_i$, $\varphi_i \in \mathcal{O}_{\overline{S}_1,P}$, $1 \leq i \leq n$ et $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = (1)$. D'autre part, si

$\big(u(t), v(t)\big)$ est la paramétrisation de T_h, on a $\operatorname{ord}_t u(t) = (T_h \cdot E_j)_P = 1$. D'où

$$\operatorname{mult}_O \Gamma = \inf_{1 \le i \le n} \operatorname{ord}_t x_i(t) = m_j \ .$$

Remarque. — Si $H \in U$, alors la partie exceptionnelle $\mathcal{Z}_h$ de (h) est $\overline{\mathcal{Z}}_1$, *i.e.* $(h) = \overline{\mathcal{Z}}_1 + T_h$. En effet, dans le lemme précédent, nous avons montré que $(T_h \cdot E_j) = -(\overline{\mathcal{Z}}_1 \cdot E_j)$. Puisque $(h) = \mathcal{Z}_h + T_h$, on a $(T_h \cdot E_j) = -(\mathcal{Z}_h \cdot E_j)$, d'où $\big((\mathcal{Z}_h - \overline{\mathcal{Z}}_1) \cdot E_j\big) = 0$, $1 \le j \le s$. Or, Mumford a défini une théorie de l'intersection des diviseurs de Weil sur une surface normale à coefficients rationnels. En suivant, mutatis mutandis, la démonstration de [M], on montre que la matrice d'intersection $(E_i \cdot E_j)$ est définie (négative) d'où $\mathcal{Z}_h = \overline{\mathcal{Z}}_1$.

2.3. Définition. — On dit que S possède la *propriété* $(c\ell\ h)$ en O s'il existe une section hyperplane générale de (S, O) qui possède une branche lisse.

Il résulte immédiatement de 2.2 que s'il en est ainsi, toute section hyperplane générale de (S, O) possède une branche lisse et qu'on a le critère suivant :

2.4. Proposition. — *Soit S une surface et $\overline{\sigma}_1 : \overline{S}_1 \to (S, O)$ l'éclatement normalisé de O. Alors S possède la propriété $(c\ell\ h)$ en O si et seulement si le cycle maximal $\overline{\mathcal{Z}}_1 = \Sigma m_i E_i$ de $m\mathcal{O}_{\overline{S}_1}$ possède une composante réduite, i.e. il existe i tel que $m_i = 1$.*

2.5. Théorème. — *Soit $\pi : X \to S$ une désingularisation de S telle que $m\mathcal{O}_X$ soit inversible et soit $\mathcal{Z}_X = \Sigma m_i E_i$ le cycle maximal de $m\mathcal{O}_X$. Alors S possède la propriété $(c\ell\ h)$ en O si et seulement si $\mathcal{Z}_X$ possède une composante réduite E_i telle que $(\mathcal{Z}_X \cdot E_i) < 0$.*

Preuve. — A cause des propriétés universelles de l'éclatement et de la normalisation, il existe $\pi_1 : X \to \overline{S}_1$ tel que $\pi = \overline{\sigma}_1 \circ \pi_1$ et on a $m\mathcal{O}_X = \pi_1^*(m\mathcal{O}_{\overline{S}_1})$. Puisque $\overline{S}_1$ est une surface normale, π_1 induit un isomorphisme au-dessus d'un ouvert de Zariski dense de chacune des composantes irréductibles de $|\overline{\mathcal{Z}}_1|$, la courbe exceptionnelle de $\overline{\sigma}_1$. En réindexant au besoin les E_i, on peut donc supposer que la transformée stricte de $|\overline{\mathcal{Z}}_1|$ sur X est $\bigcup\limits_{1 \le i \le s} E_i$ et que si $i > s$, π_1 contracte E_i en un point (π_1 peut évidemment ne contracter aucune courbe par exemple si $\overline{S}_1$ est non singulière). On a donc : $\overline{\mathcal{Z}}_1 = \sum |1 \le i \le s| m_i \pi_1(E_i)$ où $\pi_1(E_i)$ désigne l'image ensembliste de E_i et d'après 2.4, S possède la propriété $(c\ell\ h)$ en O si et seulement si il existe i, $1 \le i \le s$ tel que $m_i = 1$.

Pour conclure, il suffit de constater que $(\mathcal{Z}_X \cdot E_i) < 0$ si $1 \le i \le s$ et $(\mathcal{Z}_X \cdot E_i) = 0$ si $i > s$.

Or le morphisme π_1 étant propre et $\mathcal{Z}_X$ étant l'image réciproque de $\overline{\mathcal{Z}}_1$ en tant que diviseurs de Cartier, on peut appliquer la formule de projection. On a $(\mathcal{Z}_X \cdot E_i) = \big(\overline{\mathcal{Z}}_1 \cdot \pi_1(E_i)\big)$ où ici $\pi_1(E_i)$ désigne l'image de E_i en tant que cycle. Si $1 \le i \le s$, le degré de la restriction de π_1 à E_i sur son image dans $\overline{S}_1$ est 1. Si nous désignons encore par E_i cette image (cette notation est cohérente avec celles précédemment utilisées), on obtient donc $(\mathcal{Z}_X \cdot E_i) = (\overline{\mathcal{Z}}_1 \cdot E_i)$ et nous avons vu (2.2) que c'est un entier strictement négatif. Par contre, si $i > s$, le cycle $\pi_1(E_i)$ est nul car π_1 contracte E_i en un point. D'où $(\mathcal{Z}_X \cdot E_i) = 0$.

2.6. Exemples.

Nous reprenons dans *(a), (b), (c)* quelques exemples de 1.5.

(a). — La singularité $\mathbb{A}_n$ à l'origine de S d'équation $xy = z^{n+1}$ possède la propriété $(c\ell\ h)$. Le critère 2.5 s'applique à la désingularisation minimale π de S. Le graphe dual pondéré du diviseur exceptionnel de π est :

$$\begin{array}{ccccccc} E_1 & & E_2 & & E_{n-1} & & E_n \\ \bullet & \text{———} & \bullet & \cdots & \bullet & \text{———} & \bullet \\ -2 & & -2 & & -2 & & -2 \end{array}$$

et $(\mathcal{Z}_X \cdot E_i) = \big((E_1 + \cdots + E_n) \cdot E_i\big)$ vaut -2 si $n = 1$ et $i = 1$, vaut -1 si $n \geq 2$ et $i = 1$ ou $i = n$ et vaut 0 si $n \geq 2$ et $1 < i < n$. Dans tous les cas, une section hyperplane générale quelconque possède 2 branches lisses. Si $n = 1$, elles se relèvent transversalement à E_1 ; $C_{S,O}$ n'a pas de génératrices spéciales ; et par tout point de E_1 se relève une branche d'une section hyperplane générale. (En ce cas, C_h est générale si $h = \lambda x + \mu y + \nu z \mod m^2$ avec $4\lambda\mu - \nu^2 \neq 0$). Si $n \geq 2$, l'une se relève transversalement à E_1, l'autre à E_n. L'unique génératrice spéciale de $C_{S,0}$ est son lieu singulier $(x = y = 0)$. De même par tout point de E_1 ou E_n n'appartenant pas à E_2 ou E_{n-1} se relève une branche d'une section hyperplane générale. (C_h est générale si $\nu \neq 0$).

(b). — Plus généralement, les singularités toriques de surfaces possèdent la propriété $(c\ell\ h)$. Ici aussi, le critère 2.5 s'applique à la désingularisation minimale π de S. Le graphe pondéré du diviseur exceptionnel de π est :

$$\begin{array}{ccccccc} E_1 & & E_2 & & E_{n-1} & & E_n \\ \bullet & \text{———} & \bullet & \cdots & \bullet & \text{———} & \bullet \\ -a_1 & & -a_2 & & -a_{n-1} & & -a_n \end{array}$$

avec $a_i \geq 2$ [TE]. On a encore $\mathcal{Z}_X = E_1 + \cdots + E_n$ et si $n = 1$, $(\mathcal{Z}_X \cdot E_1) = -a_1$, si $n \geq 2$, $(\mathcal{Z}_X \cdot E_1) = -a_1 + 1$, $(\mathcal{Z}_X \cdot E_i) = -a_i + 2$, $1 < i < n$, $(\mathcal{Z}_X \cdot E_n) = -a_n + 1$. Toutes les branches d'une section hyperplane générale quelconque sont lisses. Si $n = 1$, il y en a a_1 ; si $n \geq 2$, il y en a $(a_1 - 1) + (a_n - 1) + \sum |1 < i < n|(a_i - 2)$. Parmi elles, $a_1 - 1$ (resp. $a_n - 1$) se relèvent sur X transversalement à E_1 (resp. E_n), $a_i - 2$ à E_i, $1 < i < n$. Dans l'éventail qui décrit la désingularisation minimale de la surface, les E_i tels que $a_i > 2$, $i \neq 1$, $i \neq n$ correspondent aux points anguleux de la ligne polygonale joignant les points primitifs des arêtes ([GS 1]).

Ici $\overline{S}_1$ coïncide avec S_1, car les singularités toriques sont des singularités rationnelles. Au vu de l'éventail, les points singuliers éventuels de $\overline{S}_1$ sont à l'intersection de 2 composantes irréductibles de $\overline{\sigma}_1^{-1}(O)$. Par suite les génératrices spéciales sont données exactement par les points singuliers de $\overline{\sigma}_1^{-1}(O)$ et par tout point n'appartenant qu'à un seul E_1, E_n ou E_i telque $1 < i < n$ et $a_i \neq 2$ se relève donc une branche d'une section hyperplane générale.

(c). — Le théorème 2.5 permet de vérifier au vu de leurs graphes pondérés et arpès avoir déterminés le cycle fondamental que $\mathbb{D}_n$, $\mathbb{E}_6$, $\mathbb{E}_7$ ne possèdent pas la propriété $(c\ell\ h)$; E_8 ne possédant pas la propriété $(c\ell)$, a fortiori elle ne possède pas $(c\ell\ h)$.

(d). — La singularité elliptique simple à l'origine de S d'équation $x^2 + y^3 + z^6 = 0$ possède la propriété $(c\ell)$. En effet, $x = i\sqrt{2}t^3$, $y = t^2$, $z = t$ est une courbe lisse tracée sur S. D'autre part,

on vérifie que la surface S_1 obtenue par éclatement de O est normale et que $Z_1 = 2F$ où $F \simeq \mathbb{P}^1$, donc par 2.4, elle ne possède pas la propriété ($c\ell\ h$).

Si $\pi : X \to S$ est la désingularisation minimale, on sait que $\pi^{-1}(O)$ est une courbe elliptique E d'auto-intersection -1 et que $m\mathcal{O}_X$ n'est pas localement principal. On constate donc que $\mathcal{Z}_X = E$ (par 1.1) et que $(\mathcal{Z}_X \cdot E) = -1 < 0$ puisque $(E^2) = -1$. Ceci montre que l'hypothèse d'inversibilité de $m\mathcal{O}_X$ est essentielle pour la caractérisation de la propriété ($c\ell\ h$) que nous obtenons dans 2.5.

Nous reviendrons en détail sur cet exemple au § 5.

3. Familles de courbes lisses et points infiniment voisins

Si une surface S possède la propriété ($c\ell$) en O, les courbes lisses sur S passant par O se subdivisent en familles que nous allons maintenant définir en suivant librement une idée de J. Nash [N].

Soit $\mathcal{L}$ l'ensemble des courbes lisses Γ sur S passant par O telles que $\Gamma \smallsetminus \{O\}$ soit contenu dans $\operatorname{Reg} S$. Si $\sigma : \widetilde{S} \to S$ est un morphisme propre induisant un isomorphisme de $\sigma^{-1}(\operatorname{Reg} S)$ sur $\operatorname{Reg} S$, et si $\Gamma \in \mathcal{L}$, $\Gamma_{\widetilde{S}}$ désignera sa transformée stricte sur $\widetilde{S}$. Le morphisme σ détermine une *application "fibre"* $F_{\widetilde{S}} : \mathcal{L} \to \sigma^{-1}(O)$ en faisant correspondre à $\Gamma \in \mathcal{L}$ le point exceptionnel de $\Gamma_{\widetilde{S}}$.

3.1. Proposition. — *Soit $\pi : X \to S$ une désingularisation de S et soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des composantes irréductibles, courbes ou points isolés, de $\pi^{-1}(O)$. On a :*

$$\mathcal{L} = \bigcup_{E \in \mathcal{E}} \mathcal{L}_E \text{ où } \mathcal{L}_E := \{\Gamma \in \mathcal{L} | F_X(\Gamma) \in E\}$$

et

$$\mathcal{L}_{E_1} \cap \mathcal{L}_{E_2} = \emptyset \text{ si } E_1 \neq E_2 .$$

Preuve. — Soit $n : \overline{S} \to S$ la normalisation de S, $O_1, \ldots, O_f$ les points de $\overline{S}$ au-dessus de O (f est le nombre de composantes analytiquement irréductibles ou feuillets de S passant par O) et soit $\overline{\pi} : X \to \overline{S}$ tel que $\pi = n \circ \overline{\pi}$. Si $\mathcal{L}_i = \{\Gamma \in \mathcal{L} \mid F_{\overline{S}}(\Gamma) = O_i\}$ et $\mathcal{E}_i$ désigne l'ensemble des composantes irréductibles de $\overline{\pi}^{-1}(O_i)$, on a : $\mathcal{E} = \bigcup_{1 \le i \le f} \mathcal{E}_i$, $\mathcal{L}_i = \bigcup_{E \in \mathcal{E}_i} \mathcal{L}_E$, $1 \le i \le f$, $\mathcal{L} = \bigcup_{1 \le i \le f} \mathcal{L}_i$ et $\mathcal{L}_i \cap \mathcal{L}_j = \emptyset$ si $i \neq j$.

Or, la fibre exceptionnelle $\overline{\pi}^{-1}(O_i)$ étant connexe, ou bien elle n'a pas de points isolés ou bien elle contient un seul point P et il existe $O_i \in \operatorname{Reg} \overline{S}$, $1 \le i \le f$ tel que $(X, P) \simeq (\overline{S}, O_i)$. Dans le premier cas, il résulte de 1.1 appliqué à $(\overline{S}, O_i)$ et $\overline{\pi}$ que si $E, F \in \mathcal{E}_i$ et $E \neq F$, $\mathcal{L}_E \cap \mathcal{L}_F = \emptyset$. En effet, si $\Gamma \in \mathcal{L}_i$, $\Gamma_{\overline{S}}$ est lisse en O_i et Γ_X est la transformée stricte de $\Gamma_{\overline{S}}$ sur X. Son point exceptionnel $F_X(\Gamma_{\overline{S}}) = F_X(\Gamma)$ est donc un point lisse de $\overline{\pi}^{-1}(O_i)$ et n'appartient ainsi qu'à un seul $E \in \mathcal{E}_i$. Dans le 2ème cas, S possède un feuillet dont la normalisation est lisse et $\mathcal{E}_i = \{P\}$.

Pour montrer que la partition de $\mathcal{L}$ obtenue à partir de la désingularisation minimale est la moins fine, il suffit de comparer les partitions obtenues à partir de π et de $\widetilde{\pi} = \pi \circ \tau$ où $\tau : \widetilde{X} \to X$

est l'éclatement d'un point P de $\pi^{-1}(O)$. En effet, un morphisme propre et birationnel entre surfaces lisses est une suite d'éclatements de points.

Soit F le diviseur exceptionnel de τ et soit $\widetilde{E}$ la transformée stricte de $E \in \mathcal{E}$ par τ si $\dim E = 1$, son image réciproque si $\dim E = 0$ et $E \neq P$. Si $\widetilde{\mathcal{E}}$ est l'ensemble des composantes irréductibles de $\widetilde{\pi}^{-1}(O)$, on a : $\widetilde{\mathcal{E}} = \bigcup_{\{E \in \mathcal{E} \mid E \neq \{P\}\}} \widetilde{E} \cup F$. Si $P \notin F_X(\mathcal{L})$, $E \in \mathcal{E}$ et $E \neq \{P\}$, alors $\mathcal{L}_{\widetilde{E}} = \mathcal{L}_E$ et $\mathcal{L}_F = \emptyset$. Les 2 partitions sont identiques. Si $P \in F_X(\mathcal{L})$, alors il existe $E_0 \in \mathcal{E}$ unique tel que $P \in E_0$. Si $E \in \mathcal{E}$ et $E \neq E_0$, alors $\mathcal{L}_{\widetilde{E}} = \mathcal{L}_E$. Si $E_0 = \{P\}$, on a $\mathcal{L}_{E_0} = \mathcal{L}_F$, les 2 partitions restent identiques ; par contre si $\dim E_0 = 1$, $\mathcal{L}_{E_0} = \mathcal{L}_{\widetilde{E}_0} \cup \mathcal{L}_F$ car P est un point lisse de E_0 (1.1). La partition provenant de $\widetilde{\pi}$ est plus fine que celle provenant de π. ■

3.2. Définition. — Une *famille de courbes lisses* sur (S, O) est un sous-ensemble non vide de $\mathcal{L}$ apparaissant dans la partition de $\mathcal{L}$ obtenue dans 3.1 à partir de la désingularisation minimale. Par extension, si $E \in \mathcal{E}$ et si $\mathcal{L}_E \neq \emptyset$, nous dirons que S possède la *propriété* $(c\ell)$ *en* O *relativement à* E.

Dans toute la suite de ce paragraphe, $\pi : X \to S$ désignera la désingularisation minimale de S.

En suivant la preuve de 1.1, on obtient :

3.2.1. Proposition. — *Si $E \in \mathcal{E}$ est une courbe, $\mathcal{L}_E \neq \emptyset$ si et seulement si la multiplicité $m(E)$ avec laquelle E apparaît dans le cycle maximal $\mathcal{Z}_X$ défini par la partie divisorielle de $m\mathcal{O}_X$ vaut 1 ; s'il en est ainsi $U_E := F_X(\mathcal{L}_E)$ est un ouvert de Zariski dense de E et on a :*

$$E \setminus U_E = \left\{P \in E \mid P \in \operatorname{Sing} \pi^{-1}(O)\right\} \cup \left\{P \in E \mid m\mathcal{O}_{X,P} \text{ n'est pas un idéal principal}\right\} .$$

3.2.2. Proposition. — *Si $E \in \mathcal{E}$ est un point, $\mathcal{L}_E \neq \emptyset$ si et seulement si il existe un entier $m \geq 1$ et un système régulier de paramètres (u, v) de $\mathcal{O}_{X,E}$ tel que $m\mathcal{O}_{X,E} = (u, v^m)$.*

S'il en est ainsi, S possède un feuillet dont la normalisation est lisse au voisinage de E et dont toute section hyperplane générale ne possède qu'une seule branche de multiplicité m en O.

Preuve. — La première partie de l'énoncé résulte de 1.4. Supposons $\mathcal{L}_E \neq \emptyset$. Comme $m\mathcal{O}_{X,E} = (u, v^m)$, pour presque tout $h \in m \setminus m^2$, E est un point lisse de la transformée stricte sur X de la section hyperplane C_h de S et C_h possède donc une seule branche Γ_h sur le feuillet de (S, O) dont la normalisation est isomorphe à (X, E) et de ce fait est lisse. Soit $\tau_1 : X_1 \to (X, E)$ la suite de m éclatements de points qui rend $m\mathcal{O}_{X_1}$ inversible introduite dans 1.4 et soit $\pi_1 : X_1 \to \overline{S}_1$ tel que $\pi \circ \tau_1 = \bar{\sigma}_1 \circ \pi_1$ où $\bar{\sigma}_1$ est l'éclatement normalisé de O. Le cycle maximal $\mathcal{Z}_{X_1}$ de $m\mathcal{O}_{X_1}$ est : $E_1 + 2E_2 + \cdots + mE_m$. On a $(\mathcal{Z}_{X_1} \cdot E_m) = -1$ et $(\mathcal{Z}_{X_1} \cdot E_i) = 0$, $1 \leq i \leq m-1$. Donc d'une part, la transformée stricte de Γ_h sur X_1 est analytiquement irréductible et intersecte transversalement E_m, d'autre part π_1 ne contracte pas E_m en un point.

Comme dans 2.5, le coefficient avec lequel $\pi_1(E_m)$ apparaît dans le cycle maximal $\overline{\mathcal{Z}}_1$ est encore m. La multiplicité de Γ_h est donc m par 2.2.

Remarque. — Si le feuillet $\mathcal{F}$ de S dont la normalisation passe par E a une singularité isolée en O, cette condition est encore équivalente à $Eu_O(\mathcal{F}) = 1$ où $Eu_O(\mathcal{F})$ est l'invariant d'Euler local de $\mathcal{F}$ en O ([GS 2]), remarque 4.2).

3.3. DÉFINITION. — Si $E \in \mathcal{E}$ et $\mathcal{L}_E$ contient une branche lisse d'une section hyperplane générale de (S, O), nous dirons que S possède la *propriété* ($c\ell$ h) *en* P *relativement à* E.

Cependant nous verrons que s'il en est ainsi toute courbe $\Gamma \in \mathcal{L}_E$ n'est pas nécessairement une branche d'une section hyperplane générale de (S, O).

Les résultats du § 2 vont nous permettre de caractériser ceux des $E \in \mathcal{E}$ tels que S possède la propriété ($c\ell$ h) en O relativement à E.

Remarquons d'abord que si $\pi_1 : X_1 \to S_1$ est la désingularisation minimale de l'éclaté S_1 de S en O, alors il existe un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{\tau_1} & X \\ {\scriptstyle\pi_1}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\pi} \\ S_1 & \xrightarrow{\sigma_1} & S \end{array}$$

car la désingularisation $\sigma_1 \circ \pi_1$ de S se factorise par la désingularisation minimale π. De plus, τ_1 étant un morphisme propre et birationnel entre surfaces lisses est la composition d'une suite finie d'éclatements de points. C'est d'ailleurs la suite d'éclatements de points de longueur minimum pour laquelle l'image réciproque de $m\mathcal{O}_X$ soit inversible.

En particulier, si $E \in \mathcal{E}$ est un point et si $\mathcal{L}_E \neq \emptyset$, τ_1 est au-dessus d'un voisinage de E, la suite de m éclatements de points de 1.4 et 3.2.2. Il résulte immédiatement de 3.2.1 et 1.4 que les partitions de $\mathcal{L}$ obtenues à partir de π et $\pi \circ \tau_1$ sont les mêmes.

3.3.1. PROPOSITION. — *Si* $E \in \mathcal{E}$ *est un point,* S *possède la propriété* ($c\ell$ h) *en* O *relativement à* E *si et seulement si l'entier* m *de 3.2.2 vaut 1 i.e.* $m\mathcal{O}_{X,E}$ *est l'idéal maximal de* $\mathcal{O}_{X,E}$. *Le feuillet* $\mathcal{F}$ *de* S *dont la normalisation passe par un tel* E *est non singulier en* O.

Preuve. — Le seul point à vérifier compte tenu de 3.2.2 est la dernière assertion. Elle résulte du fait que $\mathcal{O}_{\mathcal{F},O}$ est isomorphe à son normalisé $\widehat{\mathcal{O}_{X,E}}$ qui est un anneau local régulier. ■

Si maintenant $E \in \mathcal{E}$ est une courbe, nous désignerons encore par E sa transformée stricte sur X_1. Soit $n_1 : \overline{S}_1 \to S_1$ la normalisation de S_1, $\overline{\pi}_1 : X_1 \to \overline{S}_1$ le morphisme qui factorise π_1 et $\bar{\sigma}_1 = \sigma_1 \circ n_1$ l'éclatement normalisé de O.

3.3.2. PROPOSITION. — *Si* $E \in \mathcal{E}$ *est une courbe,* S *possède la propriété* ($c\ell$ h) *en* O *relativement à* E *si et seulement si l'entier* $m(E)$ *(défini dans 3.2.1) vaut 1 et* $\overline{\pi}_1(E)$ *(ou* $\pi_1(E)$*) est une courbe.*

Preuve. — Par définition (2.1), si Γ est une branche d'une section hyperplane générale, $F_{\overline{S}_1}(\Gamma)$ est un point lisse de $\overline{S}_1$ et de $\bar{\sigma}_1^{-1}(O)$ et appartient donc à une unique composante irréductible de $\bar{\sigma}_1^{-1}(O)$. Or, π_1 étant la désingularisation minimale de S_1, $\overline{\pi}_1$ est celle de $\overline{S}_1$. Le morphisme $\overline{\pi}_1$ induit donc un isomorphisme d'un voisinage de $F_{X_1}(\Gamma)$ sur un voisinage de $F_{\overline{S}_1}(\Gamma)$. Le point $F_{X_1}(\Gamma)$ appartient donc aussi à une unique composante irréductible E' de dimension 1 de la fibre exceptionnelle de $\pi \circ \tau_1$ et $\overline{\pi}_1(E')$ est une courbe. Les courbes E' et $\overline{\pi}_1(E')$ apparaissent respectivement dans les cycles maximaux $\mathcal{Z}_{X_1}$ (défini par $m\mathcal{O}_{X_1}$) et $\mathcal{Z}_{\overline{S}_1}$ (défini par $m\mathcal{O}_{\overline{S}_1}$) avec la même multiplicité $m(E')$ qui est aussi la multiplicité de Γ en O (2.2).

Si de plus $\Gamma \in \mathcal{L}_E$, alors $F_X(\Gamma) \in E \setminus B$ (où B est l'ensemble des points où $m\mathcal{O}_X$ n'est pas inversible) par 3.2.1 et donc $F_{X_1}(\Gamma) \in E$. C'est donc que $E = E'$ et par suite $\overline{\pi}_1(E)$ est une courbe. D'autre part, la multiplicité $m(E)$ de E dans $\mathcal{Z}_X$ est égale à celle de sa transformée stricte (notée encore E) dans $\mathcal{Z}_{X_1}$. On a donc $m(E) = 1$.

Réciproquement, si $m(E) = 1$ et $\overline{\pi}_1(E)$ est une courbe, toute branche Γ d'une section hyperplane générale telle que $F_{\overline{S}_1}(\Gamma) \in \overline{\pi}_1(E)$ est un élément de $\mathcal{L}_E$. En effet, Γ est lisse ; sa multiplicité est égale à la multiplicité de $\overline{\pi}_1(E)$ dans $\mathcal{Z}_{\overline{S}_1}$ (2.2), elle-même égale à celle de E dans $\mathcal{Z}_{X_1}$ ou $\mathcal{Z}_X$, c'est-à-dire $m(E)$. Or $m(E) = 1$. Enfin, puisque $F_{X_1}(\Gamma) \in E$, c'est que $F_X(\Gamma) \in E$. ■

Les résultats du § 2 vont nous permettre aussi de déterminer l'image de $\mathcal{L}$ par les applications fibres F_{X_1}, $F_{\overline{S}_1}$ et F_{S_1}.

3.4.1. PROPOSITION. — *Soit $E \in \mathcal{E}$ de dimension 0 telle que $\mathcal{L}_E \neq \emptyset$. Alors :*

a) $F_{X_1}(\mathcal{L}_E) = E_1 \setminus \mathrm{Sing}(\pi \circ \tau_1)^{-1}(O)$ où E_1 est le diviseur de X_1 créé par l'éclatement de X de centre E.

b) Si S ne possède pas la propriété $(c\ell\ h)$ en O relativement à E, le graphe dual de la partie de $\mathcal{Z}_{X_1}$ à support dans $\tau_1^{-1}(E)$ est une chaîne ayant $m \geq 2$ sommets et $\overline{\pi}_1$ contracte E_1 en un point singulier $\overline{O}_1$ de $\overline{S}_1$ dont l'image O_1 sur S_1 est le Proj *d'une génératrice spéciale de $C_{S,O}$. On a $E_1 \setminus F_{X_1}(\mathcal{L}_E) = \{E_1 \cap E_2\}$, $F_{\overline{S}_1}(\mathcal{L}_E) = \overline{O}_1$, $F_{S_1}(\mathcal{L}_E) = O_1$.*

c) Si S possède la propriété $(c\ell\ h)$ en 0 relativement à E, alors la partie de $\mathcal{Z}_{X_1}$ à support dans $\tau_1^{-1}(E)$ est E_1 et $\overline{\pi}_1(E_1)$ et $\pi_1(E_1)$ sont des courbes. On a $F_{X_1}(\mathcal{L}_E) = E_1$, $F_{\overline{S}_1}(\mathcal{L}_E) = \overline{\pi}_1(E_1)$ et $F_{S_1}(\mathcal{L}_E) = \pi_1(E_1)$; le morphisme $\overline{\pi}_1$ est un isomorphisme au voisinage de $F_{X_1}(\mathcal{L}_E)$ et induit un isomorphisme de $F_{X_1}(\mathcal{L}_E)$ sur $F_{\overline{S}_1}(\mathcal{L}_E)$.

Preuve. — D'après 1.3 et 1.4, $\mathcal{Z}_{X_1} = E_1 + 2E_2 + \cdots + mE_m$. L'assertion *a)* résulte de la preuve de 1.1. On sait que S possède la propriété $(c\ell\ h)$ en O relativement à E si et seulement si $m = 1$ (3.3.1). Si $m \geq 2$, $(\mathcal{Z}_{X_1} \cdot E_1) = (E_1^2) + 2(E_2 \cdot E_1) = 0$ d'après 1.4. Par suite (voir 2.5), $\overline{\pi}_1$ contracte E_1 en un point $\overline{O}_1$. Ce point est singulier, puisque $\overline{\pi}_1$ est la résolution minimale de $\overline{S}_1$. Pour finir la preuve de *b)*, il suffit de se rappeler la définition des génératrices spéciales (2.1).

L'assertion *c)* résulte du fait que si $m = 1$, $(\mathcal{Z}_{X_1} \cdot E_1) = (E_1^2) = -1$; ainsi $\overline{\pi}_1$ ne contracte pas E_1 et comme $\overline{\pi}_1$ est la résolution minimale de $\overline{S}_1$, $\overline{\pi}_1(E_1) \subset \mathrm{Reg}\,\overline{S}_1$ et $\overline{\pi}_1$ induit alors un isomorphisme de $E_1 = F_{X_1}(\mathcal{L}_E)$ sur $\overline{\pi}_1(E_1) = F_{\overline{S}_1}(\mathcal{L}_E)$.

3.4.2. PROPOSITION. — *Soit $E \in \mathcal{E}$ une courbe telle que $\mathcal{L}_E \neq \emptyset$. Alors :*

a) $F_{X_1}(\mathcal{L}_E) = E \setminus \mathrm{Sing}(\pi \circ \tau_1)^{-1}(O)$ *où* E *désigne aussi la transformée stricte de* E *par* τ_1.

b) Si S *ne possède pas la propriété* $(c\ell\ h)$ *en* O *relativement à* E, $\overline{\pi}_1$ *contracte* E *en un point singulier* $\overline{O}_1$ *de* $\overline{S}_1$ *dont l'image* O_1 *sur* S_1 *est le* Proj *d'une génératrice spéciale de* $C_{S,O}$. *On a* $F_{\overline{S}_1}(\mathcal{L}_E) = \overline{O}_1$ *et* $F_{S_1}(\mathcal{L}_E) = O_1$.

c) Si S *possède la propriété* $(c\ell\ h)$ *en* 0 *relativement à* E, *alors* $\overline{\pi}_1(E)$ *et* $\pi_1(E)$ *sont des courbes. On a :*

$$\overline{\pi}_1(E) \setminus F_{\overline{S}_1}(\mathcal{L}_E) = (\overline{\pi}_1(E_1) \cap \mathrm{Sing}\,\bar{\sigma}_1^{-1}(O)) \cup (\overline{\pi}_1(E) \cap \mathrm{Sing}\,\overline{S}_1).$$

Les morphismes τ_1 *et* $\overline{\pi}_1$ *sont des isomorphismes au voisinage de* $F_{X_1}(\mathcal{L}_E)$ *et induisent des isomorphismes de* $F_{X_1}(\mathcal{L}_E)$ *respectivement sur* $F_X(\mathcal{L}_E)$ *et* $F_{\overline{S}_1}(\mathcal{L}_E)$.

$F_{S_1}(\mathcal{L}_E)$ *est un ouvert dense de* $\pi_1(E)$. *Si* L *n'est pas une génératrice spéciale de* $C_{S,O}$ *et si* $\mathrm{Proj}\,L \in \pi_1(E)$, *alors* $\mathrm{Proj}\,L \in F_{S_1}(\mathcal{L}_E)$.

Preuve. — Les assertions *a)* et *b)* se démontrent comme dans 3.4.1 au vu de 3.3.2. Montrons *c)*. Au voisinage de $P \in F_{X_1}(\mathcal{L}_E)$, τ_1 est un isomorphisme car $\tau_1(P) \in F_X(\mathcal{L}_E)$ donc $m\mathcal{O}_X$ est inversible au voisinage de $\tau_1(P)$. Puisque E est la seule courbe exceptionnelle de X_1 contenant P, que $\overline{\pi}_1(E)$ est une courbe et que $\overline{\pi}_1$ est la désingularisation minimale de $\overline{S}_1$, $\overline{\pi}_1(P) \in \mathrm{Reg}\,\overline{S}_1$ et $\overline{\pi}_1$ est aussi un isomorphisme au voisinage de P. En conséquence, puisque $P \notin \mathrm{Sing}(\pi\circ\tau_1)^{-1}(O)$, alors $\overline{\pi}_1(P) \notin \mathrm{Sing}\,\bar{\sigma}_1^{-1}(O)$. Enfin, si $Q \in \overline{\pi}_1(E)$ est un point lisse de $\overline{S}_1$ et de $\bar{\sigma}_1^{-1}(O)$, alors $Q = \overline{\pi}_1(P)$, où $P \in E$, et P est lisse sur $(\pi\circ\tau_1)^{-1}(O)$ donc par *a)* $P \in F_{X_1}(\mathcal{L}_E)$ et $Q \in F_{\overline{S}_1}(\mathcal{L}_E) = \overline{\pi}_1(F_{X_1}(\mathcal{L}_E))$. La dernière assertion est une conséquence immédiate de la caractérisation précédente de $F_{\overline{S}_1}(\mathcal{L}_E)$ et de la définition des génératrices spéciales, puisqu'alors $\mathrm{Proj}\,L \in n_1(F_{\overline{S}_1}(\mathcal{L}_E)) = F_{S_1}(\mathcal{L}_E)$.

3.4.3. Définition. — Les propositions 3.4.1 et 3.4.2 distinguent 2 types de génératrices spéciales de $C_{S,O}$. Nous dirons qu'une génératrice spéciale L est *ordinaire* si $\overline{S}_1$ est non singulière en tout point de $n_1^{-1}(\mathrm{Proj}\,L)$, *singulière* dans le cas contraire.

Remarque. — Dans le cas *c)*, si L est une génératrice spéciale de $C_{S,O}$ telle que $\mathrm{Proj}\,L \in F_{S_1}(\mathcal{L}_E)$, toute courbe $\Gamma \in \mathcal{L}_E$ telle que $T_{\Gamma,O} = L$ (voir un exemple au § 5) ne peut être une branche d'une section hyperplane générale par définition de ces dernières.

3.5. Théorème. — *Soit* $\pi : X \to S$ *la désingularisation minimale d'une surface* S, O *un point singulier de* S *et* E *une composante irréductible de dimension 1 de* $\pi^{-1}(O)$.

a) Il existe une suite unique de longueur minimum de diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccccccc}
X_{\ell+1} & \xrightarrow{\tau_{\ell+1}} & X_\ell & \cdots\longrightarrow & X_1 & \xrightarrow{\tau_1} & X \\
\downarrow{\scriptstyle \pi_{\ell+1}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_\ell} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\
S_{\ell+1} & \xrightarrow[\sigma_{\ell+1}]{} & S_\ell & \cdots\longrightarrow & S_1 & \xrightarrow[\sigma_1]{} & S
\end{array}$$

où $\sigma_i : S_i \to S_{i-1}$ *est l'éclatement d'un point* O_{i-1}, $1 \leq i \leq \ell+1$, *(où* $S_0 = S$, $O_0 = O$*),* $\pi_i : X_i \to S_i$ *est la désingularisation minimale de* S_i *et telle que* $\dim \pi_{\ell+1}(E) = 1$ *où on note* *encore E la transformée stricte de E dans $X_{\ell+1}$ (et plus généralement dans X_i, $1 \leq i \leq \ell+1$). Pour $1 \leq i \leq \ell$, O_i est le* Proj *d'une génératrice spéciale singulière L_{i-1} de $C_{S_{i-1},O_{i-1}}$.*

b) Si S possède la propriété $(c\ell)$ en O relativement à E, alors :

i) $F_{X_i}(\mathcal{L}_E) = E \smallsetminus \mathrm{Sing}(\pi \circ \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_i)^{-1}(O)$, $1 \leq i \leq \ell+1$;

ii) On a $F_{S_i}(\mathcal{L}_E) = O_i$, $1 \leq i \leq \ell$. Si $0 \leq i \leq \ell-1$, S_i possède la propriété $(c\ell)$ en O_i relativement à E et pas la propriété $(c\ell\ h)$. S_ℓ possède la propriété $(c\ell\ h)$ en O_ℓ relativement à E.

iii) Si $\overline{\pi}_{\ell+1}$ est la désingularisation minimale de la normalisation $\overline{S}_{\ell+1}$ de $S_{\ell+1}$, alors $\tau_1 \circ \cdots \circ \tau_{\ell+1}$ et $\overline{\pi}_{\ell+1}$ sont des isomorphismes au voisinage de $F_{X_{\ell+1}}(\mathcal{L}_E)$ et induisent des isomorphismes de $F_{X_{\ell+1}}(\mathcal{L}_E)$ sur $F_X(\mathcal{L}_E)$ et sur $F_{\overline{S_{\ell+1}}}(\mathcal{L}_E)$. On a :

$$\overline{\pi}_{\ell+1}(E) \smallsetminus F_{\overline{S_{\ell+1}}}(\mathcal{L}_E) = \big(\overline{\pi}_{\ell+1}(E) \cap \mathrm{Sing}(\sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_\ell \circ \overline{\sigma_{\ell+1}})^{-1}(O)\big) \cup \big(\overline{\pi}_{\ell+1}(E) \cap \mathrm{Sing}\,\overline{S_{\ell+1}}\big) \ .$$

$F_{S_{\ell+1}}(\mathcal{L}_E)$ est un ouvert de Zariski dense de $\pi_{\ell+1}(E)$. Si L n'est pas une génératrice spéciale de C_{S_ℓ,O_ℓ}, si $L \not\subset C_{(\sigma_1\circ\cdots\circ\sigma_\ell)^{-1}(O),O_\ell}$ et si Proj $L \in \pi_{\ell+1}(E)$, *alors* Proj $L \in F_{S_{\ell+1}}(\mathcal{L}_E)$.

Preuve. — Montrons d'abord *a)*. Le 1er diagramme est défini sans ambiguïté et la suite s'y réduit si $\dim \pi_1(E) = 1$. Sinon, $\pi_1(E) = O_1$. En effet, l'un des σ_i, $i \geq 2$ doit être l'éclatement de O_1 pour que $\dim \pi_i(E) \neq 0$ et si ce n'était pas σ_2, la longueur de la suite ne serait pas minimum. Il s'agit donc de montrer qu'il n'existe pas de suite infinie où π_i est la désingularisation minimale de S_i, $\pi_i(E) = O_i$ et σ_{i+1} est l'éclatement de O_i, $i \geq 1$. Si une telle suite existait, soit $U_\infty(E) = E \smallsetminus \bigcup_{i\geq 1} \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_i(B_i)$ où $B_i = \{P \in \pi_i^{-1}(O_i) \mid m_i\mathcal{O}_{X_i,P}$ n'est pas un idéal principal$\}$ et $m_i := \mathrm{Max}\,\mathcal{O}_{S_i,O_i}$. Cet ensemble n'est pas vide, car on a exclu de E au plus un ensemble dénombrable, (quitte à effectuer une extension du corps de base s'il est dénombrable). Soit $\overline{\Gamma}$ une courbe de X qui porte un point $P \in U_\infty(E)$ et soit Γ son image par π. La transformée stricte de Γ dans S_i passe par O_i ; en effet, celle de $\overline{\Gamma}$ dans X_i évite B_i et, τ_{i+1} étant un isomorphisme à l'extérieur de B_i, elle ne peut se détacher de E. Or au bout d'un nombre fini h d'éclatements de points, la transformée stricte Γ_h de Γ sur S_h devient lisse et S_h devient normalement plate le long de Γ_h [L.T]. Comme on peut aussi éviter que P soit sur la transformée stricte de $\mathrm{Sing}\,S$, nécessairement $\Gamma \smallsetminus \{0\} \subset \mathrm{Reg}\,S$, $\Gamma_h \smallsetminus \{O_h\} \subset \mathrm{Reg}\,S_h$ et par suite S_h est lisse au voisinage de O_h. Or O_h est singulier puisque π_h, la désingularisation minimale de S_h contracte E en O_h. D'où la contradiction.

La dernière assertion de *a)* résulte, comme on l'a déjà vu, de la définition des génératrices spéciales singulières puisque, $\overline{\pi}_i$ étant la désingularisation minimale de la normalisation $\overline{S}_i$ de S_i, $\overline{\pi}_i(E)$ est un point singulier de $\overline{S}_i$.

Supposons maintenant que S possède la propriété $(c\ell)$ en O relativement à E. L'assertion *i)* de *b)* résulte toujours de la preuve de 1.1 (Ici $m\mathcal{O}_{X_i}$ est inversible $1 \leq i \leq \ell+1$).

On montre par récurrence sur i que $F_{S_i}(\mathcal{L}_E) = O_i$, S_i possède la propriété $(c\ell)$ en O_i relativement à E, $F_{X_i}(\mathcal{L}_E) \cap B_i = \emptyset$, enfin $F_{X_{i+1}}(\mathcal{L}_E) \subset E$ si $0 \leq i \leq \ell$. C'est vrai pour $i = 0$. Si $i < \ell$, $\pi_{i+1}(E) = O_{i+1}$, d'où $F_{S_{i+1}}(\mathcal{L}_E) = \pi_{i+1}(F_{X_{i+1}}(\mathcal{L}_E)) = O_{i+1}$. La surface S_{i+1} possède donc la propriété $(c\ell)$ en O_{i+1} relativement à E puisque, si $\Gamma \in \mathcal{L}_E$, alors sa transformée stricte

Γ_{i+1} sur S_{i+1} passe par O_{i+1}, est lisse et qu'on a $\Gamma_{i+1} \setminus \{O_{i+1}\} \subset \operatorname{Reg} S_{i+1}$. D'où $F_{X_{i+1}}(\Gamma_{i+1}) = F_{X_{i+1}}(\Gamma) \notin B_{i+1}$ et $F_{X_{i+2}}(\Gamma) \in E$. Enfin, à cause de 3.3.2, S_ℓ possède la propriété ($c\ell$ h) en O_ℓ mais pas S_i en O_i si $0 \leq i < \ell$. D'où *ii)*.

Puisque $F_{X_{i-1}}(\mathcal{L}_E) \cap B_{i-1} = \emptyset$, τ_i est un isomorphisme au voisinage de $F_{X_i}(\mathcal{L}_E)$ et induit un isomorphisme de $F_{X_i}(\mathcal{L}_E)$ sur $F_{X_{i-1}}(\mathcal{L}_E)$, $1 \leq i \leq \ell+1$, d'où les propriétés de $\tau_1 \circ \cdots \circ \tau_{\ell+1}$ énoncées dans *iii)*. Notons $\mathcal{L}_E^\ell$ la famille de courbes lisses sur (S_ℓ, O_ℓ) déterminée par E ; on sait d'après 3.4.2,*c)* que $\overline{\pi}_{\ell+1}$ est un isomorphisme au voisinage de $F_{X_{\ell+1}}(\mathcal{L}_E^\ell)$ et induit un isomorphisme de $F_{X_{\ell+1}}(\mathcal{L}_E^\ell)$ sur $F_{\overline{S_{\ell+1}}}(\mathcal{L}_E^\ell)$. Il suffit donc de constater que $F_{X_{\ell+1}}(\mathcal{L}_E) \subset F_{X_{\ell+1}}(\mathcal{L}_E^\ell)$ et que $\overline{\pi}_{\ell+1}(F_{X_{\ell+1}}(\mathcal{L}_E)) = F_{\overline{S_{\ell+1}}}(\mathcal{L}_E)$ pour obtenir les propriétés de $\overline{\pi}_{\ell+1}$ énoncées dans *iii)*. La caractérisation de $F_{\overline{S_{\ell+1}}}(\mathcal{L}_E)$ en découle immédiatement au vu de *i)*.

Enfin, soit L une génératrice de C_{S_ℓ,O_ℓ} comme dans *iii)*. Comme elle n'est pas spéciale et que $Q = \operatorname{Proj} L \in \pi_{\ell+1}(E)$, Q est l'image d'au moins un point $\overline{Q} \in \overline{\pi_{\ell+1}}(E)$ lisse sur $\overline{S_{\ell+1}}$ et sur $\overline{\sigma}_{\ell+1}^{-1}(O_\ell)$. En particulier, $\overline{\pi}_{\ell+1}(E)$ étant une composante irréductible de $\overline{\sigma}_{\ell+1}^{-1}(O_\ell)$, $\overline{Q}$ est un point lisse de $\overline{\pi}_{\ell+1}(E)$ qui n'appartient à aucune autre composante irréductible de $\overline{\sigma}_{\ell+1}^{-1}(O_\ell)$. Pour montrer que $\overline{Q} \in F_{\overline{S}_{\ell+1}}(\mathcal{L}_E)$, il reste à vérifier que $\overline{Q}$ n'appartient pas à l'image réciproque sur $\overline{S_{\ell+1}}$ de la transformée stricte de $(\sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_\ell)^{-1}(O)$ par $\sigma_{\ell+1}$. Or justement $L \not\subset C_{(\sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_\ell)^{-1}(O),O_\ell}$. ■

L'énoncé géométrique 3.5. *b)* a une traduction en terme des jets des paramétrisations des courbes $\Gamma \in \mathcal{L}_E$.

3.6.1. Définition. — Soit $\gamma : \mathcal{O}_{S,O} \to k[[t]]$ une paramétrisation d'une courbe Γ sur (S,O) et i un entier ≥ 1. Si $e_i; k[[t]] \to k[[t]]/(t)^{i+1}$ est la surjection canonique, $\rho_i(\gamma) := e_i \circ \gamma : \mathcal{O}_{S,O} \to k[[t]]/(t)^{i+1}$ est appelé le $i$ème *jet* de γ.

Par abus de notation, $\rho_i(\mathcal{L}_E)$ désignera l'ensemble des i-jets des paramétrisations des courbes $\Gamma \in \mathcal{L}_E$.

Remarquons que si γ et γ' sont deux paramétrisations d'une même courbe Γ lisse, il existe un k-automorphisme continu ε de $k[[t]]$ tel que $\gamma = \varepsilon \circ \gamma'$. Le groupe $\operatorname{Aut} k[[t]]$ des k-automorphismes continus de $k[[t]]$ agit sur $\rho_i(\mathcal{L}_E)$, $i \geq 1$ (par composition à gauche avec le k-automorphisme ε_i de $k[[t]]/(t)^{i+1}$ induit par ε).

3.6.2. Théorème. — *Les hypothèses et notations sont celles de 3.5. Si $\mathcal{L}_E \neq \emptyset$, l'entier ℓ défini par les propriétés de minimalité énoncées dans 3.5. a) est aussi caractérisé par la propriété suivante :*

Si $1 \leq i \leq \ell$, $\rho_i(\mathcal{L}_E) = k^* \times k^{i-1}$ et coïncide avec une orbite de $\operatorname{Aut} k[[t]]$. Il existe un ouvert $\mathcal{C}_E$ dense dans une surface sur laquelle k^* agit, et stable par cette action, tel que $\rho_{\ell+1}(\mathcal{L}_E) = \mathcal{C}_E \times k^\ell$. L'ensemble des orbites de $\operatorname{Aut} k[[t]]$ dans $\rho_{\ell+1}(\mathcal{L}_E)$ s'identifie à l'ensemble des orbites de k^* dans $\mathcal{C}_E$.

Preuve. — Nous déterminons d'abord $\rho_{\ell+1}(\mathcal{L}_E)$. Pour ce faire, remarquons que si $(x_1, \ldots, x_n)$ est un système minimal de générateurs de $m = \operatorname{Max} \mathcal{O}_{S,O}$, $\gamma_{\ell+1} : \mathcal{O}_{S,O} \longrightarrow k[[t]]/(t)^{\ell+2}$ est déterminé dès qu'on connaît $\gamma_{\ell+1}(x_\bullet)$, $1 \leq \bullet \leq n$. Puisque $\mathcal{L}_E \neq \emptyset$, on peut supposer que

$(x_2,\ldots,x_n)$ engendre l'idéal définissant une courbe $\Gamma_0 \in \mathcal{L}_E$. D'après 3.5. *b),ii)*, $F_{S_i}(\mathcal{L}_E) = O_i$, $1 \le i \le \ell$. Si donc $\Gamma \in \mathcal{L}_E$, ses transformées strictes sur S_i, $0 \le i \le \ell-1$ passent par O_i et ont la même tangente en ce point, la droite L_i. Comme $x_1 = t$, $x_2 = \cdots = x_n = 0$ est une paramétrisation de $\Gamma_0 \in \mathcal{L}_E$, alors chaque O_i, $1 \le i \le \ell$, est l'origine de la carte de l'éclatement de O_{i-1} où (x_1) est l'idéal principal exceptionnel. L'anneau des fonctions régulières sur cette carte de S_i est donc $\mathcal{O}_{S,O}\big[x_2/x_1^i,\ldots,x_n/x_1^i\big]$ et $m_i = \mathrm{Max}\,\mathcal{O}_{S_i,O_i} = \big(x_1, x_2/x_1^i,\ldots,x_n/x_1^i\big)$. Soit γ une paramétrisation de $\Gamma \in \mathcal{L}_E$ et soit $\gamma(x_\bullet) = \sum |p \ge 1| x_{\bullet p} t^p$, $1 \le \bullet \le n$. On vérifie par récurrence sur i, en écrivant que $F_{S_i}(\Gamma)$ est l'origine de cette carte, $1 \le i \le \ell$, que $x_{11} \ne 0$ et $x_{\bullet i} = 0$, $2 \le \bullet \le n$ et $1 \le i \le \ell$. On vérifie aussi que, Γ_ℓ désignant la transformée stricte de Γ sur S_ℓ et T_{Γ_ℓ,O_ℓ} sa tangente en O_ℓ, $\mathrm{Proj}\,T_{\Gamma_\ell,O_\ell} = (x_{11} : x_{\bullet\ell+1}/x_{11}^\ell) = (x_{11}^{\ell+1} : x_{\bullet\ell+1})$ et puisque $\Gamma \in \mathcal{L}_E$, c'est un point de $F_{S_{\ell+1}}(\mathcal{L}_E)$.

Or d'après 3.5. *b), iii)*, $F_{S_{\ell+1}}(\mathcal{L}_E)$ est un ouvert dense dans une composante irréductible de $\sigma_{\ell+1}^{-1}(O_\ell)$ et provient d'un ouvert conique C dense dans une composante irréductible de C_{S_ℓ,O_ℓ}, et il résulte du calcul précédent que si $(x_1,\ldots,x_n) \in C$, alors $x_1 \ne 0$.

L'image réciproque de cette composante irréductible (resp. de C) par le morphisme fini $k \times k^{n-1} \to k \times k^{n-1}$ envoyant $(u,\underline{v})$ sur $(u^{\ell+1},\underline{v})$ est une surface (resp. un ouvert dense $\mathcal{C}_E$ dans cette surface) stable par l'action de k^* sur $k \times k^{n-1}$, $\lambda \cdot (u,\underline{v}) = (\lambda u, \lambda^{\ell+1}\underline{v})$. Pour que $(x_{11}^{\ell+1}, x_{\bullet\ell+1}) \in C$, il faut et il suffit que $(x_{11}, x_{\bullet\ell+1}) \in \mathcal{C}_E$. Ainsi si $\Gamma \in \mathcal{L}_E$, $\gamma_{\ell+1} = \rho_{\ell+1}(\gamma)$ est tel que :

$$\begin{cases} \gamma_{\ell+1}(x_1) = x_{11}t + \cdots + x_{1,\ell+1}t^{\ell+1} & \\ \gamma_{\ell+1}(x_\bullet) = \qquad\qquad x_{\bullet\ell+1}t^{\ell+1} & 2 \le \bullet \le n \end{cases}$$

avec $(x_{11}, x_{\bullet\ell+1}) \in \mathcal{C}_E$.

Réciproquement, soit $\gamma_{\ell+1} : \mathcal{O}_{S,O} \to k[[t]]/(t)^{\ell+2}$ vérifiant les conditions précédentes. Alors, c'est le $(\ell+1)$-ième jet d'une paramétrisation d'une courbe $\Gamma \in \mathcal{L}_E$. En effet, puisque $(x_{11}, x_{\bullet\ell+1}) \in \mathcal{C}_E$, $(x_{11}^{\ell+1}, x_{\bullet\ell+1}) \in C$ d'où $x_{11} \ne 0$ et $(x_{11} : x_{\bullet\ell+1}/x_{11}^\ell) \in F_{S_{\ell+1}}(\mathcal{L}_E)$. Il existe donc $\Gamma' \in \mathcal{L}_E$ tel que $F_{S_{\ell+1}}(\Gamma')$ soit ce point. Soit γ' une paramétrisation de Γ'. Si $\gamma'(x_\bullet) = \sum |p \ge 1| x'_{\bullet p} t^p$, on a donc $x'_{11} \ne 0$, $x'_{\bullet i} = 0$, $2 \le \bullet \le n$, $1 \le i \le \ell$ et $x'_{\bullet\ell+1}/x_{11}'^{\ell+1} = x_{\bullet\ell+1}/x_{11}^{\ell+1}$. Soit $\varepsilon \in \mathrm{Aut}\,k[[t]]$ tel que $\gamma_{\ell+1}(x_1) = \varepsilon \circ \gamma'(x_1) \bmod (t)^{\ell+2}$. On a :

$$x_{11}t \equiv x'_{11}\varepsilon(t) \bmod (t)^2 \ .$$

D'où :

$$\varepsilon \circ \gamma'(x_\bullet) \bmod (t)^{\ell+2} = x'_{\bullet\ell+1}\varepsilon(t)^{\ell+1} \bmod (t)^{\ell+2} = \gamma_{\ell+1}(x_\bullet),\ 2 \le \bullet \le n$$

et

$$\gamma_{\ell+1} = \rho_{\ell+1}(\varepsilon \circ \gamma') \in \rho_{\ell+1}(\mathcal{L}_E) \ .$$

Par suite, comme annoncé $\tau_{\ell+1}(\mathcal{L}_E) = \mathcal{C}_E \times k^\ell$.

D'autre part, l'ensemble des orbites de $\mathrm{Aut}\,k[[t]]$ dans $\rho_{\ell+1}(\mathcal{L}_E)$ et celui des orbites de k^* dans $\mathcal{C}_E$ s'identifient tous deux avec $\{x_{\bullet\ell+1} \in k^{n-1} \mid (1, x_{\bullet\ell+1}) \in \mathcal{C}_E)$ puisque une orbite de $\mathrm{Aut}\,k[[t]]$ dans $\rho_{\ell+1}(\mathcal{L}_E)$ contient un unique $\gamma_{\ell+1} : \mathcal{O}_{S,O} \to k[[t]]/(t)^{\ell+2}$ tel que $\gamma_{\ell+1}(x_1) = t$ et qu'une orbite de k^* dans $\mathcal{C}_E$ contient un unique $(u,\underline{v}) \in k^n$ tel que $u = 1$.

La détermination de $\rho_i(\mathcal{L}_E)$, $1 \le i \le \ell$ en découle immédiatement.

3.6.3. Remarque. — Soit Z un espace lisse de dimension minimum contenant (S, O) et désignons par $Z_i \to Z_{i-1}$ l'éclatement de O_{i-1} et par D_i le diviseur exceptionnel de cet éclatement. On constate au vu des calculs précédents que :

1) $L_i \not\subset T_{D_i,O_i}$, $1 \leq i \leq \ell - 1$ (on rappelle que $\mathrm{Proj}\, L_i = O_{i+1}$) ; il en résulte d'une part que si $1 \leq i \leq \ell$, O_i est un point de D_i mais qu'il n'appartient pas à la transformée stricte de D_h dans Z_i, $1 \leq h < i$ et donc que $(\sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_i)^{-1}(O)$ coïncide au voisinage de O_i avec $\sigma_i^{-1}(O_{i-1})$, d'autre part que $L_i \not\subset C_{(\sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_i)^{-1}(O),O_i}$, $1 \leq i \leq \ell - 1$ puisque $\sigma_i^{-1}(O_{i-1}) \subset D_i$.

2) Si C_E est la composante irréductible de C_{S_ℓ,O_ℓ} telle que $\mathrm{Proj}\, C_E = \pi_{\ell+1}(E)$, alors $C_E \not\subset T_{D_\ell,O_\ell}$. En effet, si $\Gamma \in \mathcal{L}_E$, $F_{S_{\ell+1}}(\Gamma) \in F_{S_{\ell+1}}(\mathcal{L}_E) \subset \pi_{\ell+1}(E)$. Donc, si Γ_ℓ est la transformée stricte de Γ sur S_ℓ et si $L = T_{\Gamma_\ell,O_\ell}$, on a $L \subset C_E$ et $L \not\subset T_{D_\ell,O_\ell}$.

3.7.1. Définition. — On désigne par *chaîne de points infiniment voisins* de O sur S de longueur $\ell \geq 0$ une suite $\{O_h\}_{0 \leq h \leq \ell}$ où $O_0 = O$ et O_h est un point de la fibre exceptionnelle de l'éclatement $\sigma_h : S_h \to S_{h-1}$ de O_{h-1}.

3.7.2. Remarque. — Si $\mathcal{L}_E \neq \emptyset$ est la famille de courbes lisses sur S déterminée par une courbe E de $\mathcal{E}$, le théorème 3.5 lui associe :

i) une chaîne de points infiniment voisins de O sur S, $\{O_h\}_{0 \leq h \leq \ell}$ telle que posant $O_i = \mathrm{Proj}\, L_{i-1}$, $1 \leq i \leq \ell$,

a) L_i soit une génératrice spéciale singulière de C_{S_i,O_i}, $0 \leq i \leq \ell - 1$;

b) $L_i \not\subset T_{D_i,O_i}$, $1 \leq i \leq \ell - 1$.

ii) une famille de courbes lisses sur (S_ℓ, O_ℓ) déterminée par une courbe E contractée sur O_ℓ par la désingularisation minimale de S_ℓ telle que

a) S_ℓ possède la propriété $(c\ell\ h)$ en O_ℓ relativement à E. (Dans la preuve de 3.5, nous avons noté cette famille $\mathcal{L}_E^\ell$. On rappelle que toute courbe de cette famille dont la tangente n'est pas une génératrice spéciale de C_{S_ℓ,O_ℓ} est une branche lisse d'une section hyperplane générale de (S_ℓ, O_ℓ)).

b) L'ensemble des tangentes aux courbes de cette famille est un ouvert conique dense dans une composante irréductible C_E de C_{S_ℓ,O_ℓ} telle que $C_E \not\subset T_{D_\ell,O_\ell}$.

3.7.3. Théorème. — *Si S est une surface normale en O, il n'existe qu'un nombre fini de chaînes de points infiniment voisins de O sur S possédant les propriétés a) et b) de 3.7.2 i).*

Si $\{O_h\}_{0 \leq h \leq \ell}$ est une telle chaîne, toute famille de courbes lisses sur (S_ℓ, O_ℓ) possédant les propriétés énumérées dans 3.7.2. ii) provient d'une famille de courbes lisses sur (S, O) par la correspondance indiquée (3.7.2).

Preuve. — Soit $\mathcal{P}_h$ l'ensemble des chaînes de longueur $h \geq 0$ ayant ces deux propriétés. L'oubli de O_h définit une projection de $\mathcal{P}_h$ dans $\mathcal{P}_{h-1}$, $h \geq 1$, qui fait de $\{\mathcal{P}_h\}$ un système projectif. On vérifie par récurrence sur h que $\mathcal{P}_h$ est un ensemble fini. En effet, le cône tangent à une surface réduite en un point quelconque a au plus un nombre fini de génératrices spéciales.

Il suffit maintenant de montrer qu'il existe $h \in \mathbf{N}$ tel que $\mathcal{P}_h = \emptyset$. Or, il suffit, pour qu'il en soit ainsi que $\varprojlim \mathcal{P}_h = \emptyset$ *i.e.* qu'il n'existe pas de chaîne infinie de points infiniment voisins de O sur S possédant les propriétés *a)* et *b)*. Mais s'il existait une telle chaîne, elle déterminerait une courbe lisse Γ dans Z passant par O et dont la transformée stricte Γ_i dans Z_i passerait par O_i. Cette courbe serait contenue dans S. En effet, après un nombre fini d'éclatements, la transformée stricte de $S \cup \Gamma$ devient normalement plate le long de la transformée stricte de Γ. Si $\Gamma \cap S = \{O\}$, il existe donc h tel que $S_h \cup \Gamma_h$ soit lisse en O_h, car $S_h \cup \Gamma_h$ est génériquement lisse le long de Γ_h ; or c'est impossible puisque $O_h \in S_h \cap \Gamma_h$. Puisque S est normale en O, $\Gamma \setminus \{O\} \subset \operatorname{Reg} S$ et alors par le même argument, il existe h tel que S_h soit lisse en O_h. Mais alors, ou bien L_{h-1} n'est pas une génératrice spéciale de $C_{S_{h-1},O_{h-1}}$ ou bien c'est une génératrice spéciale ordinaire (3.4.3) contrairement à *a)*. C'est donc que $\varprojlim \mathcal{P}_h = \emptyset$.

Considérons maintenant E une courbe telle que $\pi_\ell(E) = O_\ell$ et telle que S_ℓ possède la propriété ($c\ell\ h$) relativement à E *(ii) a))*. Si E désigne encore la transformée stricte de E dans $X_{\ell+1}$ où $\pi_{\ell+1} : X_{\ell+1} \to S_{\ell+1}$ est la résolution minimale de l'éclaté $S_{\ell+1}$ de S_ℓ en O_ℓ, on a par 3.3.2 $\dim \pi_{\ell+1}(E) = 1$. Par *ii) b)*, $\operatorname{Proj} \pi_{\ell+1}(E) = C_E$. Si donc L n'est pas une génératrice spéciale de C_{S_ℓ,O_ℓ} et si $L \subset C_E$, il existe Γ_ℓ lisse sur (S_ℓ, O_ℓ) telle que $T_{\Gamma_\ell,O_\ell} = L$. Par *ii) b)*, on peut supposer de plus que $L \not\subset T_{D_\ell,O_\ell}$. Il résulte alors de *i) b)* et de la remarque 3.6.3 *i)* qu'il existe un système minimal de générateurs $(x_1, \ldots, x_n)$ de $m = \operatorname{Max} \mathcal{O}_{S,O}$ tel que $(x_1) = \mathcal{O}_{Z_\ell,O_\ell} = m\mathcal{O}_{Z_\ell,O_\ell} = m_{\ell-1}\mathcal{O}_{Z_\ell,O_\ell}$ où $m_{\ell-1} = \operatorname{Max} \mathcal{O}_{Z_{\ell-1},O_{\ell-1}}$. Par suite, D_ℓ étant le diviseur exceptionnel de l'éclatement de $\mathcal{O}_{\ell-1}$, $\Gamma = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_\ell(\Gamma_\ell)$ est lisse dans (S, O).

Soit F la composante irréductible de $\pi^{-1}(O)$, telle que $\Gamma \in \mathcal{L}_F$. Comme S est normale en O, c'est une courbe. Comme $\Gamma_i = \sigma_{i+1} \circ \cdots \circ \sigma_\ell(\Gamma_\ell)$, $0 \le i \le \ell-1$ est aussi lisse, $F_{X_i}(\Gamma) \notin B_i$ l'ensemble des points de X_i où $m_i\mathcal{O}_{X_i}$ n'est pas inversible, $0 \le i \le \ell - 1$. Par suite $F_{X_\ell}(\Gamma)$ appartient à la transformée stricte de F, notée encore F sur X_ℓ. Or par définition de E, $F_{X_\ell}(\Gamma) \notin E$. Mais E et F sont deux courbes contractées en O par $\pi \circ \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_\ell$. Or $F_{X_\ell}(\Gamma)$ est un point lisse de $(\pi \circ \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_\ell)^{-1}(O)$. Donc $E = F$. La chaîne de points infiniment voisins associée à $\mathcal{L}_F$ dans 3.7.2. *i)* est donc $\{O_h\}_{0 \le h \le \ell}$ et la famille de courbes lisses sur (S_ℓ, O_ℓ) de 3.7.2. *ii)* est donc celle déterminée par E.

4. Cas des hypersurfaces

Nous supposons dans ce paragraphe que le germe de surface (S, O) est plongé dans (k^3, O).

Remarquons d'abord que dans ce cas et si k est le corps des nombres complexes, une génératrice de $C_{S,O}$ qui n'est pas tangente au lieu singulier $\operatorname{Sing} S$ de S est une génératrice *spéciale* si et seulement si c'est une *tangente exceptionnelle* (*i.e.* une génératrice du cône tangent $|C_{S,O}|$ axe d'un pinceau de plans tangents limites en O ; voir [$\widehat{\text{L}}$.T], 1.3.2). En effet, soit L une génératrice de $C_{S,O}$ qui n'est pas tangente à $\operatorname{Sing} S$ et soit $\sigma_1 : S_1 \to (S, O)$ l'éclatement de O et $n_1 : \overline{S}_1 \to S_1$ sa normalisation. Alors L est une tangente exceptionnelle si et seulement si S_1 n'est pas équisingulière le long de $\sigma_1^{-1}(O)$ en $O_1 = \operatorname{Proj} L$ (ibid., 1.4.4.1). Ce théorème énonce d'autres caractérisations des tangentes exceptionnelles par exemple en terme de la modification de Nash. Or, si L est une génératrice spéciale, ou bien O_1 est un point singulier de $\sigma_1^{-1}(O)$ ou bien il existe un point singulier de $\overline{S}_1$ au-dessus de O, ou bien la restriction $n_{1|\bar{\sigma}_1^{-1}(O)} : \bar{\sigma}_1^{-1}(O) \to \bar{\sigma}_1^{-1}(O)$, où $\bar{\sigma}_1 = \sigma_1 \circ n_1$, n'est pas étale au voisinage de tout point de $n_1^{-1}(O_1)$. La surface S_1 n'est donc pas équisingulière le long de $\sigma_1^{-1}(O)$ en O_1. Par contre, si L n'est pas une génératrice spéciale, alors O_1 est un point lisse de $\sigma_1^{-1}(O)$, le lieu singulier de S_1 est contenu, au voisinage de O_1, dans $\sigma_1^{-1}(O)$ et $n_1 : \overline{S}_1 \to S_1$ est au-dessus d'un voisinage de O_1 une résolution des singularités simultanée faible d'une rétraction locale quelconque $(S_1, O_1) \to (\sigma_1^{-1}(O), O_1)$ ([T], déf. 3.1.1). Par suite, S_1 est équisingulière le long de $\sigma_1^{-1}(O)$ en O_1.

Les résultats de [LJ] vont nous permettre de préciser les résultats de finitude du § 3.

A toute courbe Γ sur (S, O), on associe dans [LJ] une suite décroissante d'entiers $\{m_i\}_{i\geq 0}$, sa suite des multiplicités de Nash, dont voici la définition : m_0 est la multiplicité de S en O et désignant par $(S \cdot C)_O$ la multiplicité d'intersection en O de S et d'une courbe C de (k^3, O), les m_i sont définis par récurrence par la formule

$$m_0 + \cdots + m_i := \inf_{\{C | \rho_i(\theta) = \rho_i(\gamma)\}} (S \cdot C)_0$$

où θ (resp. γ) est une paramétrisation de C (resp. Γ) (cf. [LJ], § 2, remarque 1.0). La même formule permet d'associer à Γ sur (k^3, O) non nécessairement sur (S, O) une suite décroissante d'entiers. Dans tous les cas $\inf_{i\geq 0} m_i$ est la multiplicité de S au point générique de Γ, *i.e.* 0 si $\Gamma \smallsetminus \{O\} \not\subset S$ et 1 si $\Gamma \smallsetminus \{O\} \subset \operatorname{Reg} S$.

4.1. Proposition. — *Soit $\Gamma \subset (k^3, O)$ un germe de courbe lisse. Soit $\{O_i\}_{i\geq 0}$ la chaîne infinie de points infiniment voisins de O sur $Z_0 = (k^3, O)$ telle que $O_0 = O$ et O_i soit le point exceptionnel de la courbe Γ_i obtenue en faisant éclater O_{i-1} dans Γ_{i-1}, $i \geq 1$.*

Soit $Z_i \to Z_{i-1}$ l'éclatement de O_{i-1}, $i \geq 1$ et S_i la transformée stricte de S dans Z_i, $i \geq 0$; enfin soit e_i la multiplicité de S_i en O_i, $i \geq 0$ ($e_i = 0$ si $O_i \notin S_i$). On a $m_i = e_i$, $i \geq 0$.

Preuve. — Comme Γ est lisse, on sait que pour tout $i \geq 1$, $O_i \in D_i$ mais n'appartient pas à la transformée stricte de D_j dans Z_i, $1 \leq j < i$, où D_i est le diviseur exceptionnel de Z_i contracté sur O_{i-1}. Au voisinage de O_i, la transformée totale $\widetilde{S}_i$ de S dans Z_i coïncide donc avec $(e_0 + \cdots + e_{i-1})D_i + S_i$. Soit $C \subset (k^3, O)$ telle que $\rho_i(\theta) = \rho_i(\gamma)$. Si $1 \leq j \leq i$, O_j est le point exceptionnel de la transformée stricte C_j de C dans Z_j et C_j est lisse et transverse à D_j en O_j, $1 \leq j \leq i$. On a donc :

$$\begin{aligned}(S \cdot C)_O = (\widetilde{S}_i \cdot C_i)_{O_i} &= (e_0 + \cdots e_{i-1})(D_i \cdot C_i)_{O_i} + (S_i \cdot C_i)_{O_i} \\ &= e_0 + \cdots + e_{i-1} + (S_i \cdot C_i)_{O_i} \ .\end{aligned}$$

Or la tangente L_i à C_i en O_i est déterminée par le coefficient de t^{i+1} dans $\rho_{i+1}(\theta)$. Si C est assez générale parmi les courbes telles que $\rho_i(\theta) = \rho_i(\gamma)$, $L_i \not\subset C_{S_i, O_i}$ et $(S_i \cdot C_i)_{O_i} = e_i$. Par suite

$$m_0 + \cdots + m_i = e_0 + \cdots + e_i \ .$$

Puisque $m_0 = e_0$, il vient par récurrence que $m_i = e_i$, $i \geq 0$. ■

Nous supposerons désormais que O est un point *singulier isolé* de (S, O). Sous cette hypothèse, $f = 0$ étant une équation locale de S en O, J (resp. j) étant l'idéal de $\mathcal{O}_{Z,O}$ engendré par f et ses dérivées partielles (resp. $J\mathcal{O}_{S,O}$) et $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{H}$) désignant les paramétrisations des courbes sur (Z, O) (resp. (S, O)),

$$\bar{\nu}_{J(\text{resp.}\, j)}(m) = \inf_{\gamma \in \mathcal{C}(\text{resp.}\, \mathcal{H})} \frac{\operatorname{ord} \gamma(m)}{\operatorname{ord}_t \gamma(J)(\text{resp.}\, \gamma(j))}$$

est un nombre rationnel strictement positif et inférieur à 1.

4.2. Proposition. — *Soit $\{O_i\}_{0 \leq i \leq \ell}$ une chaîne de points infiniment voisins de O sur S telle que posant $O_i = \operatorname{Proj} L_{i-1}$, $1 \leq i \leq \ell$*

(a) $O_i \in \operatorname{Sing} S_i$, $\quad 0 \leq i \leq \ell$

(b) $L_i \not\subset T_{D_i, O_i}$, $\quad 1 \leq i \leq \ell - 1$ où D_i est le diviseur exceptionnel de $Z_i \to Z_{i-1}$.

Soit e_i la multiplicité de S_i en O_i, $0 \leq i \leq \ell$. Alors :

$$\ell + 1 \leq e_0 + \cdots + e_\ell - (\ell + 1) \leq 1/\bar{\nu}_J(m) \ .$$

Preuve. — L'hypothèse *(b)* permet de construire $\Gamma \subset (Z, O)$ lisse telle que O_i soit le point exceptionnel de la transformée stricte Γ_i de Γ dans Z_i, $1 \leq i \leq \ell$. Soit γ sa paramétrisation. On a :

$$1 = \operatorname{ord}_t \gamma(m) \geq \bar{\nu}_J(m) \cdot \operatorname{ord}_t \gamma(J) \ .$$

A cause de 4.1, γ vérifie les hypothèses de [LJ], corollaire 2.3 avec $i = \ell$ et $(m, \ldots, m_i) = (e_0, \ldots, e_\ell)$. Comme de plus f est entier sur l'idéal engendré par ses dérivées partielles, $\operatorname{ord}_t \gamma(J) \geq e_0 + \cdots e_\ell - (\ell + 1)$. Enfin, $e_i > 1$, $0 \leq i \leq \ell$ par *(a)*.

4.2.1. Corollaire. — *La longueur des chaînes de points infiniment voisins de O sur S possédant les propriétés (a) et (b) de 3.7.2 est bornée par $1/\bar{\nu}_J(m) - 1$.*

(En effet, si L_i est une génératrice spéciale singulière, $O_{i+1} \in \operatorname{Sing} S_{i+1}$, $0 \leq i \leq \ell - 1$).

4.3. Proposition. — *La longueur des chaînes de points infiniment voisins de O sur S construite à partir d'une famille de courbes lisses sur S (3.5–3.7.2) est bornée par $1/\bar{\nu}_j(m) - 1$.*

Preuve. — L'argument est analogue à celui de 4.2, mais ici $\Gamma \subset (S, O)$.
D'où $1 = \operatorname{ord}_t \gamma(m) \geq \bar{\nu}_j(m) \operatorname{ord}_t \gamma(j)$ et $\operatorname{ord}_t \gamma(j) \geq e_0 + \cdots e_\ell - (\ell + 1) \geq \ell + 1$.

5. Un exemple

Revenons à l'exemple 2.6 *(d)* : la singularité elliptique simple à l'origine de S d'équation $x^2 + y^3 + z^6 = 0$. Nous conservons les notations de 2.6. *(d)* et 3.5. Ici $\pi^{-1}(O)$ est une courbe elliptique E et $\mathcal{L}_E \neq \emptyset$. *Toutes les courbes lisses tracées sur* (S, O) *appartiennent donc à la même famille* $\mathcal{L}_E$.

Nous construisons d'abord le diagramme commutatif ayant les propriétés de minimalité de 3.5 *(a)* relativement à E. Il s'agit de

$$\begin{array}{ccccc} X_2 & \xrightarrow{\tau_2} & X_1 & \xrightarrow{\tau_1} & X \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_2} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ S_2 & \xrightarrow[\sigma_2]{} & S_1 & \xrightarrow{\sigma_1} & S \end{array}$$

où σ_2 est l'éclatement de l'unique point singulier O_1 de S_1 (qui est donc normale). En effet, la désingularisation minimale π_1 de S_1 coïncide avec $\bar{\sigma}_2$, l'éclatement normalisé de O_1, de sorte que π_1, la désingularisation minimale de S_2 est sa normalisation et $\tau_2 = \mathrm{Id}$. Précisément, $\mathrm{Sing}\, S_2 = \sigma_2^{-1}(O_1)$ est un $\mathbb{P}^1$ le long duquel S_2 a des points doubles ordinaires sauf en 4 points qui sont des parapluies de Whitney. L'un d'entre eux est le point d'intersection Q de $\sigma_2^{-1}(O_1)$ et de la transformée stricte F de $\sigma_1^{-1}(O)$. Il nous reste à identifier la transformée stricte de E dans le cycle maximal $\mathcal{Z}_{X_i}$ défini par $m\mathcal{O}_{X_i}$, $i = 1, 2$ pour déterminer son image par π_i, $i = 1, 2$. On vérifie que $\mathcal{Z}_{X_2} = 2F + \widetilde{E}$ où $\widetilde{E}$ est l'unique courbe irréductibles de X_2 telle que $\pi_2(\widetilde{E}) = \sigma_2^{-1}(O_1)$. C'est une courbe de genre 1 (revêtement double de $\mathbb{P}^1$ ramifié en 4 points d'indice 1). Comme de plus $F \simeq \mathbb{P}^1$ et $(F)^2 = -1$, le morphisme τ_1 factorisant $\sigma_1 \circ \pi_1$ à travers π, la résolution minimale de S, est l'éclatement d'un point P de E tel que $\tau_1(F) = P$ tandis que $\tau_1(\widetilde{E}) = E$. (Ce calcul vérifie que $\pi^{-1}(O)$ est une courbe elliptique). Suivant les notations de 3.5, on a donc $\widetilde{E} = E$ d'où $\pi_2(E) = |\sigma_2^{-1}(O_1)| \simeq \mathbb{P}^1$, $\pi_1(E) = \sigma_2 \circ \pi_2(E) = O_1$ et $\ell = 1$. Le calcul précédent montre aussi que $\mathcal{Z}_X = E$ comme il se doit par 3.2.1, puisque $\mathcal{L}_E \neq \emptyset$. Toujours par 3.2.1, on a $U_E = F_X(\mathcal{L}_E) = E \setminus P$ et par 3.5 *(b)* $F_{X_i}(\mathcal{L}_E) = E \setminus (E \cap F)$, $i = 1, 2$ et $F_{S_1}(\mathcal{L}_E) = O_1$. *Toute courbe* $\Gamma \in \mathcal{L}_E$ *a pour tangente la droite* L_0 *d'équation* $x = y = 0$. Ici, c'est l'unique génératrice spéciale de $C_{S,O}$ car S_1 est normale, $\sigma_1^{-1}(O) \simeq \mathbb{P}^1$ et $\mathrm{Sing}\, S_1 = O_1$ et bien sûr elle est singulière. Enfin, par 3.5 *(b), ii)* et *iii)* S_1 *possède la propriété* $(c\ell\ h)$ en O_1 relativement à E et $F_{S_2}(\mathcal{L}_E) = \pi_2(F_{X_2}(\mathcal{L}_E)) = \sigma_2^{-1}(O_1) \setminus Q$.

Il résulte des calculs précédents et du lemme 2 qu'une *section hyperplane générale quelconque de* S_1 *passant par* O_1 *a 2 branches lisses ayant la même tangente* ; en effet $\sigma_2 \circ \pi_2 = \bar{\sigma}_2$, le cycle maximal défini par $m_1\mathcal{O}_{X_2}$ est E $(m_1 = \mathrm{Max}\, \mathcal{O}_{S_1,O_1}))$ et $-(E^2) = 2$. D'autre part, C_{S_1,O_1} a 4 *génératrices spéciales toutes ordinaires* G_i, $1 \leq i \leq 3$ et T_{F,O_1} qui déterminent les 4 parapluies de Whitney sur S_2. Enfin *l'ensemble* $\mathcal{L}_1$ *des courbes lisses sur* (S_1, O_1) *comprend une unique famille* car $\pi_1^{-1}(O_1) = E$ et on a $F_{X_1}(\mathcal{L}_1) = E$ (3.2.1) et $F_{S_2}(\mathcal{L}_1) = \sigma_2^{-1}(O_1)$.

La chaîne de points infiniment voisins de O sur S associées à E est donc $\{O, O_1\}$ et la famille de courbes lisses sur (S_1, O_1) est $\mathcal{L}_1$ et $\Gamma \in \mathcal{L}_E$ si et seulement si $\Gamma = \sigma_1(\Gamma_1)$ où $\Gamma_1 \in \mathcal{L}_1$ et $T_{\Gamma_1,O_1} \neq T_{F,O_1}$.

Enfin, si γ est la paramétrisation de $\Gamma \in \mathcal{L}$, on lit sur $\rho_3(\gamma) = \gamma_3$ si T_{Γ_1,O_1} est une génératrice spéciale de C_{S_1,O_1}.

On vérifie, avec l'algorithme de [LJ]§ 1, que $\Gamma \in \mathcal{L}_E$ si et seulement si : $\gamma_3(x) = a_3t^3$, $\gamma_3(y) = b_2t^2 + b_3t^3$, $\gamma_3(z) = c_1t + c_2t^2 + c_3t^3$ et ou bien $a_3^2 + b_2^3 + c_1^6 = 0$, $c_1 \neq 0$ $a_3 \neq 0$, ou bien $a_3 = 0$, $b_2^3 + c_1^6 = 0$, $b_2^2 b_3 + 2c_1^5 c_2 = 0$, $c_1 \neq 0$. Dans le premier cas T_{Γ_1,O_1} n'est pas une génératrice spéciale et la suite des multiplicités de Nash de Γ est $m_0 = m_1 = m_2 = 2$, $m_i = 1$, $i \geq 3$. Dans le deuxième cas, $T_{\Gamma_1,O_1} = G_i$, $1 \leq i \leq 3$ et la suite des multiplicités de Nash de Γ est $m_0 = \cdots = m_3 = 2$, $m_i = 1$, $i \geq 4$.

Références

[A] ARTIN M. — *On isolated rational singularities of surfaces*, Amer. J. Math. **88** (1966), 129–136.

[GS 1] GONZALEZ-SPRINBERG G. — *Éventails en dimension deux et transformé de Nash*, Pub. de l'E.N.S., 1977.

[GS 2] GONZALEZ-SPRINBERG G. — *Cycle maximal et invariant d'Euler local des singularités isolées de surface*, Topology **21**, n°4 (1982), 401–408.

[$\widehat{\text{L.T}}$] LÊ D.T. et TEISSIER B. — *Sur la géométrie des surfaces complexes, I. Tangentes exceptionnelles*, Amer. J. Math. **101** (1979), 420–452.

[LJ] LEJEUNE-JALABERT M. — *Courbes tracées sur un germe d'hypersurface*, Amer. J. Math. **112** (1990), 525–568.

[L.T] LEJEUNE-JALABERT M et TEISSIER B. — *Contributions à l'étude des singularités du point de vue du polygone de Newton*, Thèse Université Paris 7, 1973.

[M] MUMFORD D. — *The topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity*, Pub. Math. IHES **9** (1961), 229–246.

[N] NASH J. — *Arc structure of singularities*, preprint non publié.

[T] TEISSIER B. — *Résolution simultanée I et II*, Lecture Notes in Mathematics **777** Springer, 1980.

[TE] KEMPF G., KNUDSEN F., MUMFORD D. and SAINT DONAT B. — *Toroidal embeddings I*, Lecture Notes in Mathematics **339** Springer, 1973.