

Courbes lisses sur les singularités de surface

Gérard GONZALEZ-SPRINBERG et Monique LEJEUNE-JALABERT

RÉSUMÉ . — Poursuivant l'étude des familles de courbes tracées sur une singularité, proposée par J. Nash, on donne des critères d'existence de courbes lisses sur une singularité de surface (S, O) et de branches lisses d'une section hyperplane générale de celle-ci. Il en résulte une partition naturelle de l'ensemble des courbes lisses sur (S, O) en familles et une description de chacune d'elles en terme de chaînes de points infiniment voisins et des cycles maximaux déterminés par la chaîne.

Smooth curves on surface singularities

ABSTRACT . — Following the study of the arc structure of singularities, initiated by J. Nash, we give criteria for the existence of smooth curves on a surface singularity (S, O) and of smooth branches of its generic hyperplane section. A natural partition of the set of smooth curves on (S, O) into families as well as a description of each one of them by means of chains of infinitely near points and their associated maximal cycle follow from these criteria.

Dans toute la suite, nous désignerons par (S, O) une *singularité de surface*, i.e. le germe en un point fermé singulier O d'une surface algébrique ou formelle S , réduite, équidimensionnelle définie sur un corps algébriquement clos k ; et par \mathcal{L} l'ensemble des courbes formelles lisses (i.e. de multiplicité un) Γ sur (S, O) telles que $\Gamma \setminus \{O\}$ soit contenu dans l'ouvert des points réguliers $\text{Reg } S$ de (S, O) .

1. Existence de courbes lisses.

Soit $\pi : X \rightarrow (S, O)$ un morphisme propre et birationnel. On appelle *cycle maximal* de π (noté \mathcal{Z}_X) la composante de codimension un (éventuellement nulle) du cycle sous-jacent au sous-schéma de X défini par $m\mathcal{O}_X$ où m est l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{S, O}$. Si E est une courbe irréductible contenue dans le support $|\mathcal{Z}_X|$ de \mathcal{Z}_X , on note m_E la multiplicité de E dans \mathcal{Z}_X . Si π induit un isomorphisme de $\pi^{-1}(\text{Reg } S)$ sur $\text{Reg } S$, il détermine alors une application "fibre" $\Phi_X : \mathcal{L} \rightarrow \pi^{-1}(O)$ en faisant correspondre à $\Gamma \in \mathcal{L}$ le point exceptionnel de sa transformée stricte Γ_X sur X .

PROPOSITION 1. — Soit $\pi : X \rightarrow (S, O)$ une désingularisation de (S, O) et soit $Q \in \pi^{-1}(O)$.

(a) Si Q est un point isolé de $\pi^{-1}(O)$, alors $Q \in \Phi_X(\mathcal{L})$ si et seulement si il existe un système régulier de paramètres (u, v) de $\mathcal{O}_{X, Q}$ et un entier $m \geq 1$ tel que $m\mathcal{O}_{X, Q} = (u, v^m)$.

(b) Si $Q \in |\mathcal{Z}_X|$, alors $Q \in \Phi_X(\mathcal{L})$ si et seulement si il existe un système régulier de paramètres (u, v) de $\mathcal{O}_{X, Q}$ tel que $m\mathcal{O}_{X, Q} = (u)$.

Idée de la preuve. — Au voisinage de Q , π est donné (formellement) par $x_j = \varphi_j(u, v)$, $1 \leq j \leq n$, où (x_1, \dots, x_n) (resp. (u, v)) est un système minimal de générateurs de m (resp. $M := \text{Max } \mathcal{O}_{X, Q}$). Alors $Q \in \Phi_X(\mathcal{L})$ si et seulement si il existe une courbe $\tilde{\Gamma}$ sur (X, Q) donnée par $(u(t), v(t))$ telle que $1 = \inf \text{ord}_t \varphi_j(u(t), v(t))$.

COROLLAIRE 2. — Si (S, O) est normale ou si $m\mathcal{O}_X$ est inversible, alors \mathcal{L} est non vide si et seulement si le cycle maximal \mathcal{Z}_X possède une composante réduite E (i.e. $m_E = 1$).

COROLLAIRE 3. — Soit π la désingularisation minimale de (S, O) . Pour toute composante irréductible E de $\pi^{-1}(O)$, soit $\mathcal{L}_E = \{\Gamma \in \mathcal{L} \mid \Phi_X(\Gamma) \in E\}$. Alors \mathcal{L} est la réunion disjointe des \mathcal{L}_E ; et les courbes E telles que $\mathcal{L}_E \neq \emptyset$ sont les composantes de $|\mathcal{Z}_X|$ telles que $m_E = 1$.

2. Courbes lisses et section hyperplane générale.

Soit $\sigma_1 : S_1 \rightarrow (S, O)$ l'éclatement de centre O , $n_1 : \bar{S}_1 \rightarrow S_1$ la normalisation de S_1 , $\bar{\sigma}_1 = \sigma_1 \circ n_1$ l'éclatement normalisé. On note \mathcal{Z}_1 (au lieu de \mathcal{Z}_{S_1}) et $\bar{\mathcal{Z}}_1$ (au lieu de $\mathcal{Z}_{\bar{S}_1}$) les cycles maximaux correspondants. Enfin, soit $C_{S,O}$ (resp. $T_{S,O}$) le cône tangent (resp. l'espace tangent de Zariski) de S en O .

DÉFINITION 4. — On désigne par section hyperplane de (S, O) une courbe (non nécessairement réduite) sur (S, O) admettant pour équation locale $h=0$ où $h \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$. On dit qu'elle est générale si l'hyperplan H de $\text{Proj } T_{S,O}$ ayant pour équation $h \bmod \mathfrak{m}^2 = 0$ coupe transversalement $\text{Proj } |C_{S,O}| = |\mathcal{Z}_1|$ en évitant ses points singuliers, la transformée stricte du lieu singulier de S , (si O n'est pas un point singulier isolé de S), les images par n_1 des points singuliers (isolés) de \bar{S}_1 , de $|\bar{\mathcal{Z}}_1|$ et des points de ramification de sa restriction à $|\bar{\mathcal{Z}}_1|$. Les génératrices de $C_{S,O}$ correspondant aux points de $\sigma_1^{-1}(O)$ évités seront dites spéciales.

LEMME 5. — Si $\bar{\mathcal{Z}}_1 = \sum m_i E_i$, alors toute section hyperplane générale de (S, O) a $-(\bar{\mathcal{Z}}_1 \cdot |\bar{\mathcal{Z}}_1|)$ branches (i.e. composantes analytiquement irréductibles) dont $-(\bar{\mathcal{Z}}_1 \cdot E_i)$ de multiplicité m_i et elle est génériquement réduite.

Il en résulte le critère suivant pour l'existence de branches lisses d'une section hyperplane générale.

PROPOSITION 6. — Soit $\pi : X \rightarrow (S, O)$ une désingularisation de (S, O) telle que $m\mathcal{O}_X$ soit inversible. Pour qu'une section hyperplane générale de (S, O) possède une branche lisse, il faut et il suffit qu'il existe une courbe irréductible E dont la multiplicité m_E dans \mathcal{Z}_X soit 1 et telle que $(\mathcal{Z}_X \cdot E_i) < 0$.

On peut appliquer les critères du corollaire 2 et de la proposition 6 aux singularités rationnelles de surface en connaissant seulement le graphe dual pondéré du diviseur exceptionnel de la désingularisation minimale. En effet, celui-ci détermine le cycle fondamental qui coïncide avec le cycle maximal. Ainsi parmi les points double-rationnels, la singularité de type E_8 est la seule pour laquelle $\mathcal{L} = \emptyset$ et les singularités de type A_n sont les seules dont une section hyperplane ait des branches lisses.

3. Familles de courbes lisses.

Nous désignerons par famille de courbes lisses sur (S, O) tout sous-ensemble non vide \mathcal{L}_E figurant dans la partition de \mathcal{L} obtenue dans le corollaire 3 à partir de la désingularisation minimale $\pi : X \rightarrow (S, O)$. Chaque famille est contenue dans un feuillet (i.e. composante analytiquement irréductible) de (S, O) ; la normalisation du feuillet \mathcal{F}_E contenant \mathcal{L}_E est non singulière si et seulement si $\dim E = 0$. Nous dirons alors que la famille \mathcal{L}_E est petite. Nous conservons les notations des § 1 et 2.

PROPOSITION 7. — Soit \mathcal{L}_E une famille de courbes lisses sur (S, O) . Si \mathcal{L}_E contient une branche lisse d'une section hyperplane générale de (S, O) — nous dirons que \mathcal{L}_E

est une (h.g.)-famille —, alors il existe une composante réduite \overline{F}_1 de $\overline{\mathcal{Z}}_1$ telle que $\Phi_{\overline{S}_1}(\mathcal{L}_E) = \overline{F}_1 \cap \text{Reg } \overline{S}_1 \cap \text{Reg } |\overline{\mathcal{Z}}_1|$.

Sinon, il existe un point singulier \overline{O}_1 de \overline{S}_1 tel que $\Phi_{\overline{S}_1}(\mathcal{L}_E) = \overline{O}_1$.

Idée de la preuve. — Soit $\overline{\pi}_1 : X_1 \rightarrow \overline{S}_1$ la désingularisation minimale de \overline{S}_1 ; le morphisme $\pi_1 = n_1 \circ \overline{\pi}_1$ est la désingularisation minimale de S_1 et on a $\sigma_1 \circ \pi_1 = \pi \circ \tau_1$ où $\tau_1 : X_1 \rightarrow X$ est la composition d'une suite d'éclatements de points de longueur minimale telle que $m\mathcal{O}_{X_1}$ soit inversible. Il résulte de la proposition 1 que $\Phi_{X_1}(\mathcal{L}_E)$ est contenu dans une seule composante réduite E_1 de \mathcal{Z}_{X_1} : la transformée stricte de E si $\dim E = 1$, celle de la courbe exceptionnelle de l'éclatement de E si $\dim E = 0$. Vu la définition 4, cette courbe est contractée par $\overline{\pi}_1$ si et seulement si \mathcal{L}_E n'est pas une (h.g.)-famille.

Remarque 8. — On vérifie, en calculant explicitement la partie de \mathcal{Z}_{X_1} au-dessus de E , qu'une petite famille \mathcal{L}_E est une (h.g.)-famille si et seulement si O est un point régulier de \mathcal{F}_E . Dans ce cas $\overline{F}_1 \cong \mathbb{P}^1$, $(\overline{F}_1)^2 = -1$ et $\Phi_{\overline{S}_1}(\mathcal{L}_E) = \overline{F}_1$.

COROLLAIRE 9. — L'application $\Phi_{\overline{S}_1}$ induit une bijection entre l'ensemble des (h.g.)-familles de courbes lisses et celui des composantes réduites de $\overline{\mathcal{Z}}_1$.

Pour qu'une (h.g.)-famille soit petite, il faut et il suffit que la composante réduite de $\overline{\mathcal{Z}}_1$ qui lui correspond soit contenue dans $\text{Reg } \overline{S}_1$ et soit un \mathbb{P}^1 d'auto-intersection -1 .

La proposition 7 suggère de distinguer deux types de génératrices spéciales.

DÉFINITION 10. — On dira qu'une génératrice spéciale de $C_{S,O}$ est ordinaire si O_1 étant le point de $\sigma_1^{-1}(O)$ correspondant à sa direction, on a $n_1^{-1}(O_1) \subset \text{Reg } \overline{S}_1$; sinon on dira qu'elle est singulière.

Ainsi donc, selon que \mathcal{L}_E est une (h.g.)-famille ou non, la réunion des droites tangentes aux $\Gamma \in \mathcal{L}_E$ est un cône dense dans une composante irréductible de $C_{S,O}$ ou une de ses génératrices spéciales singulières ; $O_1 \in S_1$ étant sa direction, la courbe E_1 de X_1 définie ci-dessus détermine alors une famille de courbes lisses sur (S_1, O_1) qui contient les transformées strictes des $\Gamma \in \mathcal{L}_E$.

Il en résulte la définition et le dévissage suivants :

DÉFINITION 11. — On dira qu'une chaîne de points infiniment voisins de (S, O) (i.e. une suite $\{O_h\}_{0 \leq h \leq \ell}$ où $O_0 = O$ et O_h est un point de la fibre exceptionnelle de l'éclatement $\sigma_h : S_h \rightarrow S_{h-1}$ de O_{h-1}) est une chaîne spéciale singulière, si O_h est la direction d'une génératrice spéciale singulière de $C_{S_{h-1}, O_{h-1}}$, $1 \leq h \leq \ell$.

PROPOSITION 12. — Soit \mathcal{L}_E une famille de courbes lisses sur (S, O) . Elle détermine une chaîne finie de points infiniment voisins de (S, O) , $\{O_h\}_{0 \leq h \leq \ell}$, spéciale singulière et une composante réduite $\overline{F}_{\ell+1}$ du cycle maximal $\overline{\mathcal{Z}}_{\ell+1}$ de $\sigma_1 \circ \dots \circ \overline{\sigma}_{\ell+1}$ (où $\overline{\sigma}_{\ell+1} : \overline{S}_{\ell+1} \rightarrow S_\ell$ est l'éclatement normalisé de O_ℓ) contractée en O_ℓ par $\overline{\sigma}_{\ell+1}$ et telle que

$$a) \Phi_{S_h}(\mathcal{L}_E) = O_h, \quad 1 \leq h \leq \ell.$$

$$b) \Phi_{\overline{S}_{\ell+1}}(\mathcal{L}_E) = \overline{F}_{\ell+1} \cap \text{Reg } \overline{S}_{\ell+1} \cap \text{Reg } |\overline{\mathcal{Z}}_{\ell+1}|.$$

L'application birationnelle $\pi^{-1} \circ \sigma_1 \circ \dots \circ \overline{\sigma}_{\ell+1}$ identifie des voisinages de $\Phi_{\overline{S}_{\ell+1}}(\mathcal{L}_E)$ et $\Phi_X(\mathcal{L}_E)$.

Idée de la preuve. — Il s'agit essentiellement de montrer que la chaîne infinie de points infiniment voisins de (S, O) déterminée par une courbe quelconque $\Gamma \in \mathcal{L}_E$ ne peut-être

spéciale singulière. Or comme Γ est lisse et $\Gamma \setminus \{O\} \subset \text{Reg } S$, il existe un entier N tel que $O_N \in \text{Reg } S$ ([4], 1.28).

Remarque 13. — $\overline{F}_{\ell+1}$ est aussi une composante réduite du cycle maximal de $\overline{\sigma}_{\ell+1}$. Les transformées strictes sur S_ℓ des $\Gamma \in \mathcal{L}_E$ appartiennent à la (h.g.)-famille de courbes lisses sur (S_ℓ, O_ℓ) qu'elle détermine (cor. 9).

On peut aussi voir la chaîne $\{O_h\}_{0 \leq h \leq \ell}$ comme une chaîne de points infiniment voisins d'une variété formelle régulière (Z_0, O) contenant (S, O) . On observe alors que O_{h+1} est le seul point de la chaîne que soit proche de O_h . (On rappelle que O_i est proche de O_j si $i > j$ et O_i est un point infiniment voisin du diviseur exceptionnel de l'éclatement $Z_{j+1} \rightarrow Z_j$ de O_j . [1]) Nous dirons qu'une telle chaîne est *P-triviale*.

Ceci permet la détection des familles de courbes lisses sur une singularité normale de surface indépendamment du calcul du cycle maximal Z_X .

THÉORÈME 14. — *Si $O \in S$ est normale, toute chaîne de points infiniment voisins de (S, O) qui soit à la fois spéciale singulière et P-triviale est finie et il n'existe qu'un nombre fini de telles chaînes.*

Les familles de courbes lisses sur (S, O) sont en bijection avec l'ensemble des couples formés d'une chaîne de points infiniment voisins $\{O_h\}_{0 \leq h \leq \ell}$ de (S, O) , à la fois spéciale singulière et P-triviale, et d'une composante réduite du cycle maximal $\overline{Z}_{\ell+1}$ de $\sigma_1 \circ \dots \circ \overline{\sigma}_{\ell+1}$ au-dessus de O_ℓ autre qu'un \mathbb{P}^1 d'auto-intersection -1 contenu dans $\text{Reg } \overline{S}_{\ell+1}$.

Idée de la preuve. — Comme (S, O) est normale, il résulte de [4], 1.28 appliqué à $S \cup \Gamma$, où Γ est la courbe lisse sur Z_0 déduite d'une chaîne infinie P-triviale, que les chaînes considérées forment un système projectif dont la limite est vide. D'où la première partie de l'énoncé. Il suffit ensuite de voir que l'image par l'application birationnelle $\pi^{-1} \circ \sigma_1 \circ \dots \circ \overline{\sigma}_{\ell+1}$ d'une composante réduite de $\overline{Z}_{\ell+1}$ ayant les propriétés énoncées est une courbe. Or, π_ℓ étant la désingularisation minimale de S_ℓ , son image par $\pi_\ell^{-1} \circ \overline{\sigma}_{\ell+1}$ est une courbe (cor. 9). On applique ensuite la proposition 1.(b) pour voir que c'est la transformée stricte d'une courbe sur X .

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] A. CAMPILLO, G. GONZALEZ-SPRINBERG, M. LEJEUNE-JALABERT. — *Amas, idéaux à support fini et chaînes toriques*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **315** (1992), 987–990.
- [2] G. GONZALEZ-SPRINBERG. — *Cycle maximal et invariant local des singularités isolées de surface*, Topology **21**(4) (1982), 401–408.
- [3] M. LEJEUNE-JALABERT. — *Courbes tracées sur un germe d'hypersurface*, Amer. J. Math. **112** (1990), 525–568.
- [4] J. LIPMAN. — *Desingularization of two-dimensional schemes*, Ann. of Math. **107** (1978), 151–207.
- [5] J. NASH. — *Arc structure of singularities*, Preprint non publié.

Gérard GONZALEZ-SPRINBERG, Monique LEJEUNE-JALABERT,
Laboratoire de Mathématiques associé au C.N.R.S. URA 188,
Institut Fourier, B.P. 74, F-38402 Saint-Martin-d'Hères.

e-mail : gonsprin@grenet.fr, lejeune@grenet.fr.