Amas, idéaux à support fini et chaînes toriques

Antonio CAMPILLO, Gérard GONZALEZ-SPRINBERG et Monique LEJEUNE-JALABERT

Résumé — Un amas est une constellation pondérée de points infiniment voisins du point fermé défini par un anneau local régulier R. Soit $I \subset R$ un idéal ayant une constellation C de points base, Z la variété obtenue en éclatant C. On montre des inégalités pour les nombres d'intersection du diviseur défini par $I\mathcal{O}_Z$ avec les diviseurs exceptionnels et que Z est une désingularisation plongée de l'hypersurface définie par un élément général de I. On caractérise les idéaux monomiaux $*$-simples au sens de Zariski-Lipman.

Clusters, finitely supported ideals and toric chains

Abstract — *A cluster is a weighted constellation of infinitely near points to the closed point defined by a regular local ring R. Let $I \subset R$ be an ideal having a constellation C of base points, Z the variety obtained by blowing-up C. We prove some inequalities for the intersection numbers of the divisor defined by $I\mathcal{O}_Z$ with the exceptional divisors, and that Z is an embedded desingularization of the hypersurface defined by a general element of* I. *We characterize the $*$-simple monomial ideals in the sense of Zariski-Lipman.*

Soit R un anneau local régulier de dimension $d \geqq 2$, contenant un corps **k** algébriquement clos. Soit $X := \operatorname{Spec} R$, $O \in X$ le point fermé.

1. CONSTELLATIONS ET AMAS DE POINTS INFINIMENT VOISINS. — On dit qu'un point Q est *infiniment voisin* de O si Q est un point fermé appartenant à une variété Z obtenue à partir de X par une suite d'éclatements de points. Une *constellation* est la donnée d'une famille finie $C = \{Q_0, Q_1, \ldots, Q_n\}$, où $Q_0 := O \in Z_0 := X$ et chaque Q_i, $1 \leqq i \leqq n$, est un point infiniment voisin de O appartenant à la variété Z_i obtenue par l'éclatement $\sigma_i : Z_i \to Z_{i-1}$ de centre Q_{i-1}. Soit $p : Z = Z_{n+1} \to X$ la composition $\sigma_1 \circ \ldots \circ \sigma_{n+1}$. Soit $p_1 : Z \to Z_1 =: X_1$ la composition $\sigma_2 \circ \ldots \circ \sigma_n$, l'ensemble C_1 des points images des diviseurs contractés par p_1, et soit $\pi_2 : X_2 \to X_1$ l'éclatement de centre C_1. Alors il existe un morphisme $p_2 : Z \to X_2$ tel que $p_1 = \pi_2 \circ p_2$. Pour chaque $Q \in C_1$ il existe un seul indice i tel que X_1 et Z_i soient isomorphes aux voisinages de Q et de Q_i respectivement; en identifiant Q et Q_i, C_1 est une partie de C. Si $C_1 \neq C \setminus \{Q_0\}$, soit $\pi_3 : X_3 \to X_2$ l'éclatement de centre l'ensemble C_2 des points images des diviseurs contractés par p_2, et on identifie C_2 à une partie de C. Par récurrence, et en posant $C_0 = \{Q_0\}$, on obtient une partition de C. Si $Q_i \in C_l$ on appelle $l = l(Q_i)$ le *niveau* de Q_i, et quitte à réordonner les indices i on suppose que si $l(Q_j) > l(Q_i)$ alors on a $j > i$. Pour chaque $Q = Q_i \in C$ on note B_Q (ou B_i) le diviseur exceptionnel de l'éclatement de Q, et E_Q (ou E_i) ses transformées strictes (et B_Q). On écrit $Q \geqq P$ si Q est infiniment voisin de P. On définit une *relation de proximité* dans C : Q_j est *proche* de Q_i si $Q_j \in E_i$; on la note $Q_j \to Q_i$ (ou $j \to i$). On appelle *matrice de proximité* la matrice $(n+1) \times (n+1)$, $M = ((\mu_{ij}))$, avec $\mu_{ii} = 1$, $\mu_{ij} = -1$ si $i \to j$, et $\mu_{ij} = 0$ dans les autres cas ([1], [2]). Le groupe libre $\oplus \mathbf{Z} E_Q$ des diviseurs de Z à support exceptionnel est muni de la forme d-linéaire symétrique d'intersection. Pour chaque $Q \in C$, soit E_Q^* la transformée totale de B_Q dans Z; la famille des diviseurs E_Q^*, $Q \in C$, est aussi une base de $\oplus \mathbf{Z} E_Q$, et on démontre :

PROPOSITION 1. — (*a*) *Pour chaque* $Q \in C$ *on a* $E_Q = E_Q^* - \sum_{P \to Q} E_P^*$. *La matrice de proximité* M *est donc la matrice de changement de base des* E_Q *aux* E_Q^*.

(*b*) *Le produit d'intersection* $E_{i_1}^* \bullet \ldots \bullet E_{i_d}^*$ *vaut* $(-1)^{d-1}$ *si* $i_1 = \ldots = i_d$, *et vaut* 0 *sinon.*

On appelle *amas* une constellation pondérée $A=(C, \underline{m})$ avec C une constellation, et avec $\underline{m}={}^t(m_0, \ldots, m_n)$, où chaque $m_i=m_{Q_i}\in \mathbf{Z}$ est le poids de Q_i. On associe à chaque amas A le diviseur $D(A)$ à support exceptionnel dans Z défini par $D(A)=\sum m_i E_i^*$. On a $D(A)=\sum d_i E_i$, où $\underline{d}=M^{-1}\underline{m}$ [par prop. 1 (*a*)].

2. Idéaux à support fini. — Un idéal $I\subset R$ est à *support fini* s'il existe une constellation C de points infiniment voisins de O telle que le faisceau d'idéaux $I\mathcal{O}_Z$ soit inversible pour le morphisme $p: Z\to X$ défini par la constellation C. On associe à chaque idéal à support fini I un amas $A_I=(C_I, \underline{m})$, où $C_I=(Q_0, Q_1, \ldots, Q_n)$ est la constellation minimale telle que $I\mathcal{O}_Z$ soit inversible (les Q_i sont appelés les *points base* de I), m_0 est la multiplicité de I en Q_0 et m_i est la multiplicité de la *transformée faible* F_{Q_i} (ou F_i) de I au voisinage de $Q_i\in C_l$ dans X_l, $1\leq i\leq n$. La *transformée faible* F_i est définie par récurrence; on pose $F_0=I$, et si $Q_i\in B_j$ dans X_l, alors $F_i=x^{-m_j}F_j\mathcal{O}_{X_l}$, où $x=0$ est une équation locale de B_j en Q_i [3]. L'idéal $I\mathcal{O}_Z$ est inversible; il définit un diviseur de Cartier D_I dans Z, à support exceptionnel, $D_I=\sum d_Q E_Q$, tel que $I\mathcal{O}_Z=\mathcal{O}_Z(-D_I)$. On a $D(A_I)=D_I$, et $\sum d_Q E_Q=\sum m_Q E_Q^*$. On dit que l'idéal I est *complet* s'il est intègralement clos ([4], [3]).

Proposition 2. — (*a*) *L'application* α *qui à chaque idéal* I *complet et à support fini associe l'amas* A_I *est injective.*

(*b*) *Pour chaque constellation* C, *soit* ε *l'application qui associe à chaque idéal* I *dont la constellation de points base est* C, *le diviseur* D_I *tel que* $I\mathcal{O}_Z=\mathcal{O}_Z(-D_I)$. *Alors l'image de* ε *est l'ensemble des diviseurs* D *dans* Z, *à support exceptionnel, tels que l'application canonique* $p^*p_*\mathcal{O}_Z(-D)\to \mathcal{O}_Z(-D)$ *soit surjective, où* $p: Z\to X$ *est le morphisme défini par* C.

Pour montrer (*a*), on remarque que l'amas A_I détermine l'idéal I, car $D_I=D(A_I)$, et I étant complet, on a $I=p_*(\mathcal{O}_Z(-D_I))$ (*voir* aussi [3], prop. 1.10). L'assertion (*b*) résulte de [5], § 18. ■

Proposition 3. — *Soit* I *un idéal à support fini,* $D=D_I=\sum m_Q E_Q^*$ *le diviseur défini par* $I\mathcal{O}_Z$. *Soit* $k\in \mathbf{Z}$, $1\leq k<d=\dim(R)$, *et* $\mathcal{T}=\{i_1<\ldots<i_k\}$ *une partie de cardinal* k *de* $\{1, \ldots, n\}$, *où* n *est le nombre de points base de* I *infiniment voisins de* 0. *Alors on a l'inégalité suivante pour le produit d'intersection* $r_{\mathcal{T}}:=(-D)^{d-k}\bullet E_{i_1}\bullet\ldots\bullet E_{i_k}\geq 0$.

En effet Z est lisse, donc normal, et $I\mathcal{O}_Z$ est inversible, donc le morphisme $p: Z\to X$ se factorise par l'éclatement normalisé $\bar\sigma: \bar Y\to Z$ de centre I, avec un morphisme $\bar q: Z\to \bar Y$. On a donc $(-D)^{d-k}\bullet E_{i_1}\bullet\ldots\bullet E_{i_k}=c_1(I\mathcal{O}_{\bar Y})^{d-k}\bullet \bar q_*(E_{i_1}\bullet\ldots\bullet E_{i_k})$ (par la formule de projection). Or on a $\dim \bar q_*(E_{i_1}\bullet\ldots\bullet E_{i_k})\leq d-k$; si on a égalité le produit précédent est positif, et sinon il est nul, car $I\mathcal{O}_{\bar Y}$ est ample et $\bar q_*(E_{i_1}\bullet\ldots\bullet E_{i_k})$ est un cycle effectif. ■

Corollaire 4. — *On a* $(-1)^{k+1}\sum_{j=0}^{n}(\prod_{i\in\mathcal{T}}\mu_{ij})m_j^{d-k}\geq 0$; *d'où* $m_{i_k}^{d-k}\geq \sum_{j\to i, \forall i\in\mathcal{T}} m_j^{d-k}$.

La première inégalité équivaut à celle de l'énoncé de la proposition 3, compte tenu de la proposition 1; on en déduit la deuxième expression par la définition de M. ■

Les inégalités $r_{\mathcal{T}}\geq 0$ ont aussi une autre interprétation géométrique.

Lemme 5. — *Soient* $Q\to O$ *et* $F_{Q\mid E_0}$ *l'image de* F_Q *dans* $\mathcal{O}_{E_0, Q}$; $d\geq 3$. *Alors on a* $\mathrm{ord}_Q(F_Q)=\mathrm{ord}_Q(F_{Q\mid E_0})$.

En effet on a $\mathrm{ord}_Q(F_Q)\leq \mathrm{ord}_Q(F_{Q\mid E_0})$; d'où l'égalité car F_Q est à support fini. ■

Soit $\mathscr{T}=\{i_1<\ldots<i_k\}$, avec $1\leqq k<d$, tel que si $i, i'\in\mathscr{T}$, $i'>i$ alors on a $i'\to i$. On note $F_{\mathscr{T}}$ la transformée faible de I au voisinage de Q_{i_k}, $S_{\mathscr{T}}$ l'anneau local en Q_{i_k} de $E_{\mathscr{T}}:=E_{i_1}\cap\ldots\cap E_{i_{k-1}}$, et $F_{\mathscr{T}\mid E_{\mathscr{T}}}$ l'image de $F_{\mathscr{T}}$ dans $S_{\mathscr{T}}$. On a $\dim S_{\mathscr{T}}=d-k+1$.

THÉORÈME 6. — (*a*) *L'idéal* $F_{\mathscr{T}\mid E_{\mathscr{T}}}$ *est à support fini. Son amas a pour constellation les points* $Q\geqq Q_{i_k}$, *proches de* $Q_{i_1}, \ldots, Q_{i_{k-1}}$, *pondérée par les poids de l'amas de* I.

(*b*) *Le morphisme* $p:Z\to X$ *est une désingularisation plongée de l'hypersurface définie par un élément général de* I. [car (**k**) = 0].

(*c*) *Si* $k=1$, *alors* $r_{\mathscr{T}}$ *est le nombre de branches de la courbe intersection complète définie par* $d-1$ *éléments généraux de* I *qui rencontrent* E_{i_1}. *En général, pour* $k\geqq 1$, $r_{\mathscr{T}}$ *est le nombre de branches de la courbe intersection complète générale de* $F_{\mathscr{T}\mid E_{\mathscr{T}}}$. [car (**k**) = 0].

La démonstration de (*a*) repose sur le lemme 5. L'assertion (*b*) résulte de (*a*) et du théorème de Bertini. On utilise (*b*) et la définition de $r_{\mathscr{T}}$ pour le cas $k=1$ de (*c*); puis on l'applique à l'idéal $F_{\mathscr{T}\mid E_{\mathscr{T}}}$. ■

3. CHAÎNES TORIQUES ET IDÉAUX MONOMIAUX À SUPPORT FINI. — Soit $N\simeq\mathbf{Z}^d$ un réseau de dimension d, N^* le réseau dual. Soit Σ un éventail dans $N_{\mathbf{R}}=N\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{R}$; on note X_Σ la variété torique associée à Σ, munie de l'action d'un tore $T\cong(\mathbf{k}^*)^d$. Il existe une correspondance bijective entre les T-orbites de X_Σ et les cônes de Σ. Soit $\Delta=\langle\mathscr{B}\rangle$ un *cône simplicial régulier* de dimension d où $\mathscr{B}=\{v_1, \ldots, v_d\}$ est une *base ordonnée* de N qui engendre Δ. Soit $X_0\cong\mathbf{k}^d$ la variété torique affine associée à l'éventail Σ_0 formé de toutes les faces de Δ, Q_0 la T-orbite de dimension 0 de X_0; et $\sigma_1:X_1\to X_0$ l'éclatement de Q_0. La variété X_1 est associée à l'éventail Σ_1, subdivision minimale de Σ_0 qui contient l'arête qui porte le vecteur $u=\sum v_i$. Pour chaque i, $1\leqq i\leqq d$, soit $\mathscr{B}_i$ la base ordonnée obtenue en remplaçant dans $\mathscr{B}$ le vecteur v_i par u, et soit $\Delta_i:=\langle\mathscr{B}_i\rangle$. Le diviseur exceptionnel $B_0=\sigma_1^{-1}(Q_0)$ contient l'orbite dense correspondant à l'arête qui porte u; chaque orbite de dimension 0 de X_1 correspond à un cône Δ_i, $1\leqq i\leqq d$. Une *chaîne torique de points infiniment voisins de* Q_0 est une constellation $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_n)$ telle que Q_i soit une orbite de dimension 0 et $Q_i\in B_{i-1}$, $1\leqq i\leqq n$, où B_{i-1} est le diviseur exceptionnel de l'éclatement $\sigma_i:X_i\to X_{i-1}$ de centre Q_{i-1}. Le choix du point Q_1 équivaut à celui d'un entier a_1, $1\leqq a_1\leqq d$, qui détermine un cône Δ_{a_1} de Σ_1. La subdivision Σ_2 de Σ_1 correspondant à l'éclatement de Q_1 est obtenue en remplaçant Δ_{a_1} par les cônes $\Delta_{a_1 i}=\langle\mathscr{B}_{a_1 i}\rangle$, avec $\mathscr{B}_{a_1 i}$ la base ordonnée où l'on remplace le i-ème vecteur de $\mathscr{B}_{a_1}$ par $\sum v$, $v\in\mathscr{B}_{a_1}$. Le choix de $Q_2\in B_1$ équivaut au choix d'un entier a_2, $1\leqq a_2\leqq d$, qui détermine un cône $\Delta_{a_1 a_2}$. Par récurrence sur n on a :

PROPOSITION 7. — *Il existe une bijection entre les suites d'entiers* $(a_1, \ldots, a_n)$, *où* $1\leqq a_i\leqq d$, $1\leqq i\leqq n$ *et les chaînes toriques* $(Q_0, \ldots, Q_n)$: *pour chaque* i, *le point* Q_i *est l'orbite de dimension* 0 *de* X_i *correspondant au cône* $\Delta_{a_1,\ldots,a_i}$ *de* Σ_i.

PROPOSITION 8. — *Soit* $(Q_0, \ldots, Q_n)$ *la chaîne torique correspondant à une suite d'entiers* $(a_1, \ldots, a_n)$. *Soient* j *et* k *deux indices*, $0\leqq j<k\leqq n$. *Alors* Q_k *est proche de* Q_j *si et seulement si on a* $a_{j+1}\notin\{a_i\mid j+2\leqq i\leqq k\}$.

Soit I un idéal monomial (*i.e.* T-équivariant) de $\mathscr{O}_{X_0, Q_0}$; soit $x=(x_1, \ldots, x_d)$ le système de coordonnées de X_0 correspondant à la base $\mathscr{B}$; pour chaque j, $1\leqq j\leqq d$, soit U_j l'ouvert affine de X_1 défini par le cône Δ_j, et soit $y(j)=(y_1(j), \ldots, y_d(j))$ le système de coordonnées de U_j correspondant à la base $\mathscr{B}_j$. Soit $x^e=\pi x_i^{e_i}$ un monôme appartenant à I. Alors la *transformée faible* de x^e dans $\mathscr{O}_{U_j}$ est le monôme $y(j)^f$, où $f=f(e)=(f_1, \ldots, f_n)$ est donné par (TF) : $f_i=e_i$ si $i\neq j$; $f_j=\Sigma e_i-m$. Si $\mathscr{E}$ est un sous-ensemble fini de $\mathbf{Z}^d_{\geqq 0}$ tel que $\{x^e\mid e\in\mathscr{E}\}$ soit un système générateur de I, alors

$\{y(j)^{f(e)} \mid e \in \mathscr{E}\}$ est un système générateur de $F_1 \mathcal{O}_{U_j}$, où F_1 est la transformée faible de I. On a :

LEMME 9. — *Soit k un entier, $1 \leqq k \leqq d$, O_k l'orbite de dimension 0 de U_k. Alors la transformée faible F_1 de I est m_{O_k}-primaire (où m_{O_k} est l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X_1, O_k}$) si et seulement si :*

(*a*) $x_i^m \in I$, *pour tout $i \neq k$, $1 \leqq i \leqq n$, où $m = \operatorname{mult}_{Q_0}(I)$.*

(*b*) $\inf\{s \mid x_k^s \in I\} = :M > m$.

THÉORÈME 10. — (*a*) *Soit $\mathscr{B}$ une base ordonnée de N, $C = (Q_0, \ldots, Q_n)$ la chaîne torique déterminée par une suite $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$. Alors la suite de multiplicités minimale (pour l'ordre lexicographique inverse) des idéaux monomiaux à support fini ayant C comme points base est $\underline{m} = (m_0, \ldots, m_n)$ où $m_n = m_{n-1} = 1$, et pour $1 \leqq k < n$, $m_{k-1} = m_k$ si $a_k = a_{k+1}$, $m_{k-1} = r_k m_k + m_{k+r_k}$ si $a_k \neq a_{k+1}$, avec $r_k = \max\{i \mid a_{k+1} = a_{k+2} = \ldots = a_{k+i}\}$.*

(*b*) *Pour chaque chaîne torique C la suite de multiplicités de l'idéal $*$-simple complet associé à C* [3] *est celle déterminée en* (*a*).

Exemple. — Si $\underline{a} = (3, 1, 1, 2, 1, 1, 1)$, alors on a $\underline{m} = (14, 5, 5, 4, 1, 1, 1, 1)$.

Pour démontrer le théorème, on pose $F_n = m_{Q_n}$, d'où $m_n = 1$, et on montre qu'il existe un contracté F_{n-1} tel que $m_{n-1} = 1$. Ensuite on fait une récurrence en supposant que la transformée faible d'un idéal F soit à support l'orbite O_k de Δ_k, on utilise le lemme 1, et on fixe un entier j qui détermine le type de contraction F_{-1} de F. On obtient les entiers m_{-1} et M_{-1} analogues à ceux du lemme 1; si $k = j$ on a $m_{-1} = m$ et $M_{-1} = m + M$, et si $k \neq j$ on a $m_{-1} = M$ et $M_{-1} = m + M$. Pour montrer finalement que F est effectivement contractable, on inverse les formules (TF) et on montre que les conditions $\sum_{i \neq j} f_i \leqq M$ si $j \neq k$ (resp. $\leqq m$ si $j = k$) sont satisfaites pour les exposants f_i de chaque monôme d'un système générateur de F. La partie (*b*) résulte de [3], proposition 1.10, en considérant la clôture intégrale de l'idéal construit dans la démonstration précédente. ■

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] P. DUVAL, Reducible exceptional curves, *Amer. J. Math.*, 58, 1936, p. 285-289.

[2] E. CASAS, Infinitely near imposed singularities, *Math. Ann.*, 287, 1990, p. 429-454.

[3] J. LIPMAN, On complete ideals in regular local rings, *Alg. Geom. and Comm. Alg.*, I, 1987, p. 203-231.

[4] O. ZARISKI et P. SAMUEL, Appendix 5, in *Commutative Algebra II*, Van Nostrand, 1960.

[5] J. LIPMAN, Rational singularities with applications, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 36, 1969, p. 195-279.

A. C. : *Dpto de Algebra y Geometria, Facultad de Ciencias, E-*47005 *Valladolid;*

G. G.-S. et M. L.-J. : *Institut Fourier, U.R.A. n°* 188,

Université de Grenoble 1, B.P. n° 74, 38402 *Saint-Martin-d'Hères.*