

G-désingularisations de variétés toriques

Catherine BOUVIER et Gérard GONZALEZ-SPRINBERG

Résumé – Soit V la variété torique associée à un cône σ sur un corps k , et G le système générateur minimal du semi-groupe défini par σ . Une G -désingularisation de V correspond à une subdivision régulière de σ dont les arêtes portent les éléments de G . On démontre l'existence en dimension 3, une construction par des éclatements élémentaires à partir d'un modèle terminal minimal, l'unicité pour les variétés canoniques V d'indice >1 , et l'unicité en général à flops près. On donne un exemple de non existence en dimension 4 et une interprétation géométrique de G en dimension quelconque.

G-desingularizations of toric varieties

Abstract – Let V be a toric variety associated to a cone σ over a field k , and G the minimal generator system of the semi-group defined by σ . A G -desingularization of V corresponds to a regular subdivision of σ whose edges contain the elements of G . We prove the existence in dimension 3, a construction by elementary blow-ups from a minimal terminal model, the uniqueness for the canonical varieties V of index >1 , and the uniqueness in general up to flops. We give an example of non existence in dimension 4 and a geometric interpretation of G in any dimension.

1. RAPPELS ET NOTATIONS. – Soit N un \mathbb{Z} -module libre de rang d , $N_{\mathbb{Q}} := N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, σ un cône convexe rationnel polyédral (ou plus simplement cône) dans $N_{\mathbb{Q}}$, et V_{σ} la variété torique affine associée à σ sur un corps k (voir [1], [2], [3]). Les cônes considérés dans la suite sont fortement convexes, *i.e.* ne contiennent aucun sous-espace vectoriel non trivial de $N_{\mathbb{Q}}$.

La variété V_{σ} est d'indice r s'il existe m dans le dual de N et un entier $r > 0$ tels que $\langle m, v \rangle = r$ pour chaque vecteur extrémal v de σ (*i.e.* vecteur primitif d'une face de dimension 1); et V_{σ} (ou σ) est canonique (resp. terminale) si de plus on a $\langle m, n \rangle \geq r$ pour tout $n \in \sigma \cap N \setminus \{0\}$ (resp. si de plus $\langle m, n \rangle > r$ pour tout n appartenant à $\sigma \cap N \setminus \{0\}$ non extrémal) [4], [3].

Le cône σ est régulier (resp. simplicial) s'il est engendré par un sous-ensemble d'une base de N (resp. par des vecteurs linéairement indépendants). Une subdivision Σ de σ est régulière (resp. terminale, resp. canonique) si chaque cône de Σ est régulier (resp. terminal, resp. canonique). Si σ est un cône simplicial engendré par des vecteurs primitifs e_i , $1 \leq i \leq s$, de N , on appelle multiplicité de σ l'indice μ_{σ} du sous-module $\bigoplus \mathbb{Z} e_i$ de $N \cap (\bigoplus \mathbb{Q} e_i)$; le cône σ est régulier si et seulement si on a $\mu_{\sigma} = 1$.

Chaque désingularisation équivariante $\pi: X \rightarrow V_{\sigma}$ de la variété V_{σ} correspond à une subdivision régulière- Σ du cône σ , où $X = X_{\Sigma}$ est la variété torique associée à l'éventail Σ (voir [1]). On désigne par G_{σ} (ou G) le système générateur minimal du semi-groupe $\sigma \cap N$.

2. G-DÉSINGULARISATIONS. – On appelle G -désingularisation de la variété V_{σ} une désingularisation équivariante correspondant à une subdivision régulière de σ ne contenant comme arêtes que celles qui portent les vecteurs du système générateur minimal G (G -subdivision régulière). Si la dimension de σ (*i.e.* du sous-espace vectoriel de $N_{\mathbb{Q}}$ engendré par σ) est 2, alors il existe toujours une G -désingularisation de V_{σ} , qui est en fait la désingularisation minimale de la surface si $d=2$ (voir [1], [5]).

Si σ est de dimension 3, soit Σ_C la subdivision canonique dont les cônes sont engendrés par les faces du bord ∂ de l'enveloppe convexe de $\sigma \cap N \setminus \{0\}$ dans $N_{\mathbb{Q}}$. On appelle subdivision terminale minimale de σ une subdivision terminale simpliciale Σ_τ de Σ_C dont les vecteurs extrémaux appartiennent aux faces de ∂ , et modèle terminal minimal de V la variété torique V_τ définie par Σ_τ . Si x est un élément de N appartenant à l'intérieur d'un cône simplicial σ , on appelle éclatement élémentaire de V_σ de centre x le morphisme équivariant défini par la subdivision minimale de σ qui contient l'arête portant x (subdivision élémentaire centrée en x).

THÉORÈME 1. — *Soit V une variété torique affine de dimension 3.*

- (i) *Il existe une G -désingularisation de V .*
- (ii) *À partir de chaque modèle terminal minimal V_τ de V on construit une G -désingularisation par une suite finie d'éclatements élémentaires.*

Résumé de la démonstration. — Il suffit de démontrer (ii). Soit Σ_τ une subdivision terminale minimale de σ et τ un cône non régulier de dimension 3 de Σ_τ engendré par les vecteurs extrémaux e_i , $1 \leq i \leq 3$.

Soit μ_τ la multiplicité de τ et l_τ la forme linéaire de N dans \mathbb{Q} telle que $l_\tau(e_i) = 1$, $1 \leq i \leq 3$. Le système générateur minimal G_τ de τ est l'ensemble des $n \in \tau \cap N$ tels que $1 \leq l_\tau(n) < 2$, car τ est terminal simplicial.

Par ailleurs la forme linéaire $\mu_\tau l_\tau$ de N dans \mathbb{Z} induit une bijection de $N/\oplus \mathbb{Z}e_i$ sur $\mathbb{Z}/\mu_\tau \mathbb{Z}$. Par suite, il existe un unique élément x_τ de $\tau \cap N$ appartenant à $l_\tau^{-1}([1, 1 + 1/\mu_\tau])$; on a en fait $l_\tau(x_\tau) = 1 + 1/\mu_\tau$, donc x_τ appartient à G_τ . La subdivision élémentaire centrée en x_τ est formée de cônes terminaux simpliciaux. En itérant pour chaque tel cône terminal simplicial non régulier la subdivision élémentaire du type précédent, on obtient en un nombre fini de pas une G_τ -subdivision régulière de τ . En effet, une subdivision régulière de τ contient au moins $\text{card}(G_\tau) = \mu_\tau + 2$ arêtes; chaque subdivision élémentaire ajoute une seule arête et deux cônes de dimension 3. Au bout de $\mu_\tau - 1$ subdivisions élémentaires, on obtient un nombre de cônes égal à la somme de leurs multiplicités, par suite la multiplicité de chaque cône est 1, donc la subdivision est régulière et ne contient que $\mu_\tau + 2$ arêtes. Finalement, le système générateur minimal G_σ est la réunion des G_τ quand τ parcourt Σ_τ , car les vecteurs extrémaux de chaque τ appartiennent à une face du bord ∂ , et la subdivision de σ obtenue est alors une G -subdivision régulière. ■

Si τ est un cône terminal simplicial, e_i , $1 \leq i \leq 3$, ses vecteurs extrémaux, on appelle *profil* de τ le tétraèdre de sommets O , e_i , $1 \leq i \leq 3$. On appelle profil d'un éventail terminal simplicial Σ_τ la réunion des profils de ses cônes. Si τ_1 et τ_2 sont deux cônes de Σ_τ de vecteurs extrémaux e_1, u, v et e_2, u, v respectivement, tels que $e_1 + e_2 = u + v$, soit Σ'_τ l'éventail obtenu en remplaçant τ_1 et τ_2 (et leurs faces) par les cônes τ'_1 et τ'_2 (et leurs faces) de vecteurs extrémaux e_1, e_2, u et e_1, e_2, v respectivement. On appelle *flop* l'application birationnelle de V_{Σ_τ} dans $V_{\Sigma'_\tau}$ ainsi obtenue. Contrairement au cas des surfaces, les G -désingularisations ne sont pas uniques en dimension 3. Mais le profil est unique, et on a aussi une seule G -désingularisation dans certains cas :

THÉORÈME 2. — *Soit V une variété torique affine de dimension 3.*

- (i) *Si V est canonique d'indice $r > 1$, alors son modèle terminal minimal est unique et sa G -désingularisation l'est aussi.*
- (ii) *Toute G -désingularisation de V domine un modèle terminal minimal V_τ et est obtenue à partir de V_τ par une suite finie d'éclatements élémentaires;*

(iii) Les G -désingularisations de V ont le même profil, on peut donc relier deux G -désingularisations par une suite finie de flops.

La démonstration repose sur les faits suivants : si σ est un cône canonique d'indice $r > 1$, de dimension 3, alors le bord ∂ ne contient pas deux segments distincts ayant un même milieu dont les seuls points de N soient leurs extrémités; par suite, il n'existe pas de flop d'un modèle terminal minimal, qui est donc unique. L'unicité de x_τ (introduit dans la démonstration du théorème 1) implique que chaque cône de dimension 2 de la G -subdivision régulière du théorème 1, (ii), appartient à toute G -subdivision régulière, d'où l'unicité de (i). La preuve de (ii) suit les mêmes arguments qui concernent les cônes de dimension 2 des modèles canonique et terminal. Pour montrer (iii) on remarque que les G -désingularisations d'une variété canonique d'indice 1 sont ses modèles terminaux minimaux. ■

Remarque 3. — Si V est une variété torique terminale, alors sa G -désingularisation est unique, par (i) du théorème 2. Elle coïncide donc avec celle obtenue par Danilov dans [6], dont la construction repose sur le théorème de Frumkin-White, qui n'intervient pas dans la démonstration précédente.

En dimension supérieure ou égale à 4, il n'existe pas nécessairement une G -désingularisation.

Exemple 4. — Soit σ le cône de dimension 4 engendré par $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0)$, $e_4 = (1, 4, 3, 7)$.

Alors σ est un cône terminal d'indice 1, son système générateur minimal est formé de 10 vecteurs, dont les 6 non-extrémaux sont coplanaires et appartiennent aux côtés d'un parallélogramme. Dans la famille des cônes qui doivent appartenir à une G -subdivision régulière de σ , il existe deux cônes de dimension 2 dont l'intersection n'est pas une face. Par conséquent, σ ne possède pas de G -subdivision régulière.

3. INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DU SYSTÈME GÉNÉRATEUR MINIMAL G . — Soit V une variété torique. Si $\pi_i : X_i \rightarrow V$, $i = 1, 2$, sont deux désingularisations équivariantes de V , des diviseurs irréductibles $D_i \subset X_i$ sont *birationnellement équivalents relativement à V* s'ils sont en correspondance par l'application birationnelle $\pi_2^{-1} \circ \pi_1 : X_1 \dashrightarrow X_2$. On appelle *diviseur essentiel* pour V un diviseur irréductible (défini à équivalence birationnelle relative à V près) qui possède un représentant dans toute désingularisation équivariante de V . Si Σ est un éventail, les diviseurs équivariants irréductibles de V_Σ correspondent aux cônes de dimension 1 de Σ , [1]. On a une interprétation géométrique du système générateur minimal G d'un cône σ de dimension quelconque.

THÉORÈME 5. — Soit V_σ une variété torique affine. Alors le système générateur minimal G de σ est l'ensemble des vecteurs extrémaux communs à toutes les subdivisions régulières de σ . On a donc une correspondance bijective entre les éléments de G et les diviseurs essentiels pour V_σ . Les éléments de G qui ne sont pas extrémaux pour σ sont en correspondance bijective avec les diviseurs essentiels exceptionnels pour V_σ , i.e. les diviseurs appartenant (à équivalence birationnelle près) au lieu exceptionnel de toute désingularisation équivariante de V_σ .

La démonstration consiste à construire, pour chaque élément primitif non nul x de $\sigma \cap N \setminus G$, une subdivision régulière Σ de σ qui ne contient pas le cône engendré par x . En effet, on a $x = n_1 + n_2$ avec $n_i \in \sigma \cap N \setminus \{0\}$ car $x \notin G$, donc x n'appartient pas au système générateur minimal du cône $\langle n_1, n_2 \rangle$ engendré par n_1 et n_2 et par suite il

appartient à l'intérieur d'un cône η de dimension 2 de la subdivision régulière minimale de $\langle n_1, n_2 \rangle$. On construit Σ contenant η , d'où le résultat. ■

On peut généraliser la définition des diviseurs essentiels pour V à toutes les désingularisations de V non nécessairement équivariantes.

En dimension 3, il existe un morphisme π d'une G -désingularisation X de V sur son modèle canonique $V_{\mathbb{C}}$ (qui est unique [7]). Pour le diviseur associé à un élément de G le coefficient de « discrepancy » associé au diviseur canonique K_X de X relativement à π est dans $[0, 1[$. En utilisant la théorie des modèles minimaux (ici $k = \mathbb{C}$) [7], on démontre la proposition suivante.

PROPOSITION 6. — *Soit V_{σ} une variété torique de dimension 3. Alors les diviseurs associés aux éléments de G (théorème 5) sont également essentiels pour les désingularisations de V_{σ} non nécessairement équivariantes.*

Note remise le 26 juin 1992, acceptée le 6 juillet 1992.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] G. KEMPF et coll., *Toroidal embeddings 1*, Lecture Notes in Math., 339, Springer, 1973.
- [2] V. DANILOV, The geometry of toric varieties, *Russian Math. Surveys*, 33, 1978, p. 97-154.
- [3] T. ODA, *Convex bodies and algebraic geometry*, *Ergeb. Math. Grenzberb.*, 15, Springer, 1988.
- [4] M. REID, Decomposition of toric morphisms, *Progr. Math.*, 36, Birkhäuser, 1983, p. 395-418.
- [5] G. GONZALEZ-SPRINBERG, Éventails en dimension 2 et transformé de Nash, *Publ. Ecole Norm. Sup.*, 1977.
- [6] V. DANILOV, Birational geometry of toric 3-folds, *Math. U.S.S.R.-Izv.*, 21, 1983, p. 269-279.
- [7] S. MORI, Flip theorem and the existence of minimal models for 3-folds, *J. Amer. Math. Soc.*, 1, 1988, p. 117-253.

*Laboratoire de Mathématiques associé au C.N.R.S. n° 188,
Institut Fourier, Université Grenoble-I, B.P. 74, 38402 Saint-Martin-d'Hères.*