Sur les arrangements simples de huit droites dans $\mathbf{RP}^2$

Gérard GONZALEZ-SPRINBERG et Guy LAFFAILLE

Résumé — Nous démontrons une conjecture de B. Grünbaum : tout arrangement simple de huit pseudo-droites dans le plan projectif réel est étirable. Ceci résulte de la classification complète des classes d'isomorphisme d'arrangements simples de huit droites projectives. On trouve en particulier des arrangements non isomorphes ayant le même indice, infirmant une assertion de L. D. Cummings sur la classification d'arrangements par l'indice.

On simple arrangements of eight lines in $\mathbf{RP}^2$

Abstract — *We prove a conjecture of B. Grünbaum: every simple arrangement of eight pseudolines in the projective real plane is stretchable. This results from the complete classification of the isomorphism classes of simple arrangements of eight projective lines. We find in particular non isomorphic arrangements with the same index, contradicting an assertion of L. D. Cummings on the classification of arrangements by the index.*

INTRODUCTION. — On appelle un *arrangement* de droites une famille finie de droites dans le plan projectif réel $\mathbf{RP}^2$. On dit que l'arrangement est *simple* si aucun point n'appartient à plus de deux droites. On associe à un arrangement le complexe cellulaire dans lequel les droites décomposent $\mathbf{RP}^2$. On dit que deux arrangements sont *isomorphes* si les complexes cellulaires associés sont isomorphes, *i. e.* s'il existe une bijection qui préserve les incidences entre les sommets, arêtes et faces d'un arrangement et ceux de l'autre.

L'intérêt dans l'étude des arrangements remonte déjà à Steiner et Von Staudt; plus tard pour la classification des bitangentes des courbes quartiques planes (*voir* [1]), pour la classification topologique de courbes lisses obtenues par déformations infinitésimales d'arrangements (*voir* [2]), ou pour l'étude des classes de Chern de surfaces algébriques associées à des arrangements (*voir* [4]). On peut trouver d'autres points de vue, des exposés systématiques et des références dans le livre de Grünbaum [3].

Le nombre $c^s(n)$ de classes d'isomorphisme d'arrangements simples de n droites est connu pour $n \leqq 7$: on a $c^s(3)=c^s(4)=c^s(5)=1$, $c^s(6)=4$ et $c^s(7)=11$ (Cummings, White, Klee, Grünbaum, th. 2.2 de [3]). Pour des représentants de chaque classe, démonstrations ou références, *voir* [3].

Plus généralement, on considère des arrangements de *pseudo-droites*; ce sont des familles finies de courbes fermées lisses dans $\mathbf{RP}^2$, telles que deux courbes quelconques d'une famille se coupent transversalement en un et un seul point. Autrement dit, une pseudo-droite est un cercle plongé topologiquement dans le plan projectif de telle sorte que son complémentaire soit connexe. Une droite projective est un cas particulier de pseudo-droite. On définit les arrangements simples de pseudo-droites et l'isomorphisme de manière analogue à celle des droites. On dit qu'un arrangement de pseudo-droites est *étirable* (stretchable) s'il est isomorphe à un arrangement de droites. Tout arrangement de n pseudo-droites est étirable pour $n \leqq 7$ (Canham et Halsey); par ailleurs, on connaît des arrangements de 9 pseudo-droites qui ne le sont pas, car pour un arrangement de droites isomorphes on aurait une contradiction avec le théorème de Pappus-Pascal (Levi, th. 3.1 de [3]). On connaît le nombre des classes d'isomorphisme d'arrangements simples de huit pseudo-droites : 135 (Canham et Halsey, 1971). Nous démontrons l'égalité pour les droites; ce résultat était conjecturé par Grünbaum (conjecture 3.1 dans [3]); c'est le dernier cas de comparaison qui n'était pas connu entre les arrangements simples de droites et de pseudo-droites.

THÉORÈME. — *Il y a* 135 *classes différentes d'isomorphisme d'arrangements de* 8 *droites. Tout arrangement de* 8 *pseudo-droites est étirable.*

MÉTHODE DE DÉMONSTRATION ET ALGORITHMES. — (*a*) Tout arrangement simple de droites est aussi un arrangement simple de pseudo-droites et la relation d'isomorphisme est la même si l'on considère les droites comme pseudo-droites, d'où une injection de l'ensemble des classes d'isomorphisme de droites dans celui de pseudo-droites. Le cardinal de ce dernier est 135, on a donc l'inégalité $c^s(8) \leq 135$. La méthode de démonstration de l'égalité repose sur l'idée d'utiliser la dualité projective de $\mathbf{RP}^2$, dualité qui échange droites et points en préservant les relations d'incidence et l'ordre relatif entre les droites d'un pinceau et les points de la droite duale. L'utilisation de cette dualité est un moyen d'expliciter la spécificité des droites. Étant donné un arrangement simple A de n droites, on détermine les classes d'isomorphisme des arrangements simples de $n+1$ droites obtenus en ajoutant une autre droite à A. L'arrangement dual $\breve{A}$ est l'arrangement associé aux n points duaux des droites de A, formé des droites définies par chaque couple de points choisis parmi les n points duaux. Choisir une droite supplémentaire d qui ne porte aucun des sommets de A équivaut à choisir un point p qui ne soit pas sur une droite de $\breve{A}$, appartenant donc à l'intérieur d'une face (polygone) de la décomposition cellulaire associée à $\breve{A}$. Deux points p et p' appartenant à l'intérieur d'une même face induisent deux arrangements isomorphes dans le plan de départ. En effet, on peut joindre p et p' par une courbe qui ne traverse pas les bords de la face, donc on peut joindre les droites duales d et d' par une famille de droites sans traverser aucun sommet de A, donc sans modifier les relations d'incidence dans le complexe cellulaire associé. Par conséquent, pour chaque arrangement simple A, le nombre des faces de l'arrangement dual $\breve{A}$ est un majorant pour le nombre de classes d'isomorphisme des arrangements simples obtenus en ajoutant une droite à A. La classe d'isomorphisme d'un arrangement simple A de n droites est déterminée par une *matrice d'incidence* M(A) qui est une donnée combinatoire définie de la manière suivante : on numérote les $n(n-1)/2$ sommets de A. Pour chaque droite d de A, on construit une liste ordonnée l_d des $(n-1)$ entiers représentant les sommets appartenant à d, à partir d'un sommet, et dans l'ordre dans lequel on rencontre les autres en parcourant la droite dans un sens quelconque. M(A) est une matrice à n lignes et $(n-1)$ colonnes, où les lignes sont les listes l_d. Une telle matrice est loin d'être unique; on peut changer la numérotation des sommets, changer l'ordre des lignes, et pour chaque ligne on peut faire une permutation circulaire et inverser l'ordre. Les matrices d'incidence considérées peuvent avoir l'information d'un modèle affine de l'arrangement; on choisit pour cela une droite « à l'infini » d_∞ qui ne porte aucun des sommets de A, et on choisit comme premier point de chaque ligne l_d une des extrémités de l'arête de d qui rencontre d_∞. De manière analogue on associe une matrice d'incidence M($\breve{A}$) à l'arrangement dual $\breve{A}$.

(*b*) La démarche utilisée pour l'obtention de 135 classes différentes d'isomorphisme d'arrangements simples de huit droites est résumée de la façon suivante :

(1) Pour chaque matrice d'incidence, on détermine la liste des faces (polygones). Ceci est fait en deux étapes; d'abord on détermine la liste des secteurs (ou angles) représentés par des triplets ordonnés de sommets et ensuite les listes de sommets consécutifs de

chaque polygone. On dispose d'algorithmes combinatoires réalisant ceci pour des matrices d'incidence d'arrangements simples ou non (car le dual d'un arrangement simple ne l'est pas si $n>3$).

(2) Étant donnée une matrice d'incidence $M(\check{A}_n)$ du dual d'un arrangement simple A_n de n droites, on dispose d'un algorithme qui produit une matrice d'incidence $M(\check{A}_{n+1})$ d'un arrangement $\check{A}_{n+1}$ obtenu en ajoutant un sommet appartenant à chaque face de la liste produite par l'algorithme (1) pour $M(\check{A}_n)$. Si A_n est en position générale (*i. e.* trois sommets sont alignés seulement s'ils appartiennent à une droite de A_n) alors les nombres de sommets, arêtes et faces de A_n sont respectivement :

$$\check{s}=n+\frac{1}{2}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2};\qquad \check{a}=\binom{n}{2}\left(\binom{n-2}{2}+2\right);\qquad \check{f}=1+\check{a}-\check{s},\quad \text{car } \chi(\mathbf{RP}^2)=1.$$

En particulier, pour $n=7$ on a $\check{f}=141$. Le point ajouté appartenant à l'intérieur d'une face de $\check{A}_n$ est donné par un algorithme numérique, de sorte que A_{n+1} soit en position générale.

(3) Étant donnée une matrice d'incidence $M(\check{A}_n)$ du dual d'un arrangement simple A_n (en position générale) on dispose d'un algorithme combinatoire qui associe à chaque face de $M(\check{A}_n)$ une matrice $M(A_{n+1})$ [*voir* (*a*)].

(4) Soit p l'intersection de deux droites d et d' d'un arrangement simple A_n. Le complémentaire de $d\cup d'$ dans $\mathbf{RP}^2$ a deux composantes connexes U_1, U_2. Soit a_i le nombre de sommets de A_n dans U_i; on a $a_1+a_2=\binom{n}{2}-2n+1$. On appelle *l'indice de* p le minimum de $\{a_1, a_2\}$. On appelle *l'indice de* A_n la liste du nombre de sommets de A_n pour chaque indice. Étant donnée une matrice d'incidence $M(A_n)$ d'un arrangement simple, on dispose d'un algorithme qui calcule l'indice de A_n.

(5) Étant donné des matrices d'incidence $M(A_n)$ et $M(B_n)$ de deux arrangements simples ayant un même nombre de polygones de chaque type et un même indice, on dispose d'un algorithme combinatoire qui détermine si A_n et B_n sont isomorphes.

La donnée au départ est un arrangement simple A_5 et l'arrangement $\check{A}_5$; ces données sont numériques. On choisit des matrices d'incidence $M(A_5)$ et $M(\check{A}_5)$ ayant l'information des modèles affines. On détermine les faces de $\check{A}_5$ par (1) et des matrices d'incidence $M(\check{A}_6)$ par (2). On itère cette démarche pour calculer des matrices d'incidence $M(\check{A}_7)$. On les classe par l'indice [algorithme (4)] et on en garde 11 (classification des A_7). On applique l'algorithme (3) pour obtenir des $M(A_8)$; ensuite par (1) et (4) on calcule pour chaque $M(A_8)$ la liste de polygones et l'indice. On obtient ainsi 131 familles d'arrangements qui diffèrent par le nombre de polygones d'un même type ou par l'indice. En appliquant l'algorithme (5) on trouve 4 familles (parmi les précédentes) contenant chacune deux sous-familles non isomorphes. D'où les 135 classes d'isomorphismes. En particulier ce résultat infirme une assertion de L. D. Cummings sur la classification par l'indice [1].

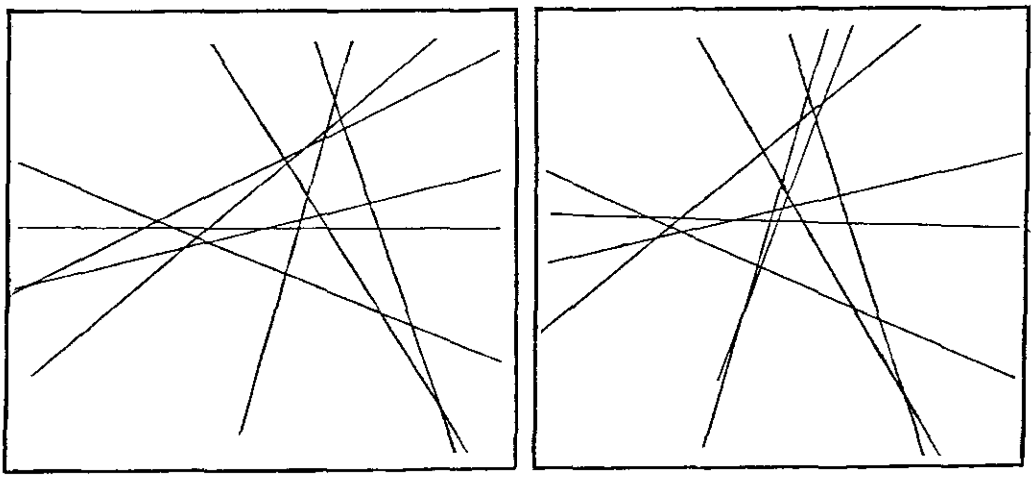
Remarques et exemples. — La classe d'isomorphisme d'un arrangement A ne détermine pas en général la classe d'isomorphisme de l'arrangement dual $\check{A}$. En effet, pour $n\geq 6$, il existe des arrangements simples isomorphes dont les duaux ne le sont pas. Ce fait est la difficulté principale pour obtenir, par récurrence sur le nombre de droites, une classification des classes d'isomorphisme d'arrangements. Pour une telle récurrence, il faudrait pouvoir classifier pour chaque classe d'isomorphisme fixée toutes les classes d'isomorphisme d'arrangements duaux. Autrement dit, pour obtenir les classes d'isomorphisme d'arrangements de $n+1$ droites en connaissant celles de n droites, il faudrait classifier les arrangements obtenus en ajoutant toutes les droites qui portent deux sommets quelconques des arrangements de n droites. Ceci paraît hors de portée pour $n \geqq 8$.

Les nombres de polygones du même type et l'indice des quatre familles d'arrangements simples de huit droites qui donnent lieu à deux classes d'isomorphisme, sont les suivants :

	Δ_8	Δ_7	Δ_6	Δ_5	Δ_4	Δ_3	i_0	i_1	i_2	i_3	i_4	i_5	i_6	i_7
(i)	0	0	0	6	13	10	1	4	2	7	3	4	3	4
(ii)	0	0	0	5	15	9	2	3	4	2	5	3	5	4
(iii)	0	0	1	3	16	9	3	1	4	4	4	4	4	4
(iv)	0	0	1	3	16	9	3	2	1	6	5	4	2	5

(où Δ_m désigne le nombre de m-gones et i_n le nombre de sommets d'indice n).

Dans chaque cas on peut distinguer les deux classes d'isomorphisme différentes par les nombres de polygones d'un type ayant même nombre de polygones adjacents de chaque type. Cet invariant permet de distinguer les 135 classes. Voici un exemple de deux modèles non isomorphes de (i) :



Les calculs ont été réalisés avec des programmes en Pascal et en C sur un PC et un SUN 3.60 à l'Institut Fourier. Des précisions sur la démonstration, les algorithmes, les modèles obtenus et d'autres applications seront publiées ultérieurement.

Note remise le 22 mai 1989, acceptée le 6 juin 1989.

Références bibliographiques

[1] L. D. Cummings, On a method of comparison for straight-line nets, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 39, 1933, p. 411-416.

[2] G. Gonzalez-Springberg et V. Ruggiero, Petites déformations de droites dans le plan projectif réel, *Ann. Univ. Ferrara*, XXIX, 1983, p. 179-210.

[3] B. Grünbaum, *Arrangements and Spreads*, Regional Conference in Mathematics, 10, *Amer. Math. Soc.*, 1972.

[4] F. Hirzebruch, Arrangements of lines and algebraic surfaces, *Arithmetic and Geometry*, vol. II, *Progress in Math.*, Birkhäuser, 36, 1983, p. 113-140.

Laboratoire de Mathématiques associé au C.N.R.S. n° 188,
Institut Fourier, B.P. n° 74, 38402 *Saint-Martin-d'Hères.*