

Informe sobre el aspecto geométrico de la correspondencia de McKay .

G. González Sprinberg (Institut Fourier, Université Grenoble I).

Este informe es un resumen de una parte de un curso (Introducción a la geometría singular) y de un seminario de geometría y álgebra sobre la correspondencia de McKay, realizados en Noviembre y Diciembre 1988 en el Departamento de Matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias. El autor agradece la invitación del Centro de Matemática de la Universidad y del Pedeciba, en particular a sus responsables y al secretariado del Centro de Matemática, que hicieron posible el desarrollo de estas actividades.

1. Grupos, singularidades y correspondencia de McKay .

El estudio de la correspondencia llamada de McKay tiene su origen en una observación esencialmente empírica (realizada en 1980, ver [M]) que relaciona objetos matemáticos de naturaleza diversa: singularidades de Klein de superficies complejas, representaciones de grupos binarios poliedrales, álgebras de Lie simples.

El contexto preciso en el que fue formulada parece ser sólo la parte visible de un "iceberg", pues actualmente continúa desarrollándose en varias direcciones y es objeto de una investigación activa por parte de matemáticos de universidades europeas y norteamericanas. Este informe no es exhaustivo; daremos una presentación de algunos resultados del aspecto geométrico obtenidos en parte por el autor, remitiendo a las referencias para las demostraciones completas.

Los objetos geométricos son las singularidades de Klein . Se trata de singularidades de superficies complejas obtenidas como cociente de \mathbb{C}^2 por subgrupos finitos de $SL_2(\mathbb{C})$, por lo que comenzaremos con la descripción de estos últimos.

1.1 Subgrupos finitos de $SL_2(\mathbb{C})$

La clasificación, a menos de conjugación, de los subgrupos finitos de $SL_2(\mathbb{C})$ se hace utilizando la clasificación de los subgrupos finitos de $SO_3(\mathbb{R})$,

y ésta última depende de la clasificación de los poliedros regulares de \mathbb{R}^3 .

Dichos poliedros son, por definición, poliedros convexos en los que todas las caras son polígonos regulares (i.e. equiláteros y equiangulares) iguales, y tales que por cada vértice hay igual número de caras. Están caracterizados por el símbolo de Schläfli (n,m) , donde n denota el número de aristas de una cara, y m el número de caras con un vértice común (ver, por ejemplo [C]). Dos poliedros cuyos símbolos son (n,m) y (m,n) son duales en el sentido que uno se obtiene a partir del otro considerando cómo vértices los puntos centrales de las caras del otro (a menos de homotecia). Existen cinco tipos de poliedros regulares en \mathbb{R}^3 (a menos de isometrías y homotecias); son llamados poliedros platónicos pues eran ya conocidos por geómetras de la academia de Platón (Euclides dedica el último libro de sus Elementos al estudio de su clasificación y propiedades métricas elementales). Algunos de sus invariantes numéricos están reunidos en la tabla siguiente:

(T1)

poliedro	#caras	#aristas	#vértices	símbolo de Schläfli
tetraedro	4	6	4	(3,3)
cubo	6	12	8	(4,3)
octaedro	8	12	6	(3,4)
dodecaedro	12	30	20	(5,3)
icosaedro	20	30	12	(3,5)

El tetraedro es autodual, el cubo es dual del octaedro y el dodecaedro es dual del icosaedro. Todos los poliedros regulares poseen un centro, i.e. se pueden inscribir en una esfera de radio igual a la distancia del centro a cualquier vértice. A cada poliedro regular se le asocia el grupo de rotaciones R que dejan invariante el poliedro en su conjunto, llamado grupo poliédrico de rotaciones (o grupo poliédrico puro). Dos poliedros duales poseen el mismo grupo de rotaciones. Tomando como centro del poliedro el origen de

\mathbb{R}^3 se obtienen así (a menos de conjugación) tres subgrupos finitos de $SO_3(\mathbb{R})$, que son isomorfos a los grupos alternados A_4 y A_5 para el tetraedro y para el icosaedro (o dodecaedro) respectivamente, y al grupo simétrico S_4 para el octaedro (o cubo).

Considerando como casos degenerados de poliedros los polígonos regulares (como poliedros con una sola cara) y los diedros (poliedros con dos caras iguales a un polígono regular, unidos por el borde) se obtienen dos familias numerables de subgrupos finitos de $SO_3(\mathbb{R})$, los grupos cíclicos y los grupos diedrales. Se tiene el resultado clásico siguiente (ver por ejemplo [S]).

Proposición : La clasificación (a menos de conjugación) de los subgrupos finitos de $SO_3(\mathbb{R})$ está formada por cinco tipos: grupos cíclicos, diedrales y los tres grupos de rotaciones de los poliedros regulares.

Identificando la esfera S^2 en \mathbb{R}^3 con la compactificación con un punto $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ de \mathbb{C} , por medio de la proyección estereográfica, los subgrupos finitos de $SO_3(\mathbb{R})$ se identifican con subgrupos finitos de $IPSU_2(\mathbb{C})$ (grupo multiplicativo de las matrices unitarias complejas 2×2 , módulo ± 1). Más generalmente, esta construcción por medio de la proyección estereográfica establece un isomorfismo entre $SO_3(\mathbb{R})$ y $IPSU_2(\mathbb{C})$.

La compactificación $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ es identificada a la recta proyectiva compleja $IP^1(\mathbb{C})$. Es el método clásico utilizado por F. Klein para pasar de \mathbb{R} a \mathbb{C} (ver [K]).

Por otra parte, todo subgrupo finito G de $SL_2(\mathbb{C})$ es conjugado (en $SL_2(\mathbb{C})$) a un subgrupo finito de $SU_2(\mathbb{C})$. Para ésto basta considerar una forma hermitiana invariante por G (que se puede obtener a partir de una forma hermitiana \langle , \rangle cualquiera, definiendo $\langle x, y \rangle_G := \sum_{g \in G} \langle gx, gy \rangle$).

Por lo tanto la clasificación de los subgrupos finitos de $SL_2(\mathbb{C})$ coincide con la de los subgrupos finitos de $SU_2(\mathbb{C})$.

Sea $\pi : SU_2(\mathbb{C}) \longrightarrow IPSU_2(\mathbb{C})$ el epimorfismo cociente canónico, cuyo núcleo es $\{\pm 1\}$. Si R es un subgrupo finito de $IPSU_2(\mathbb{C})$, el grupo

$G = \pi^{-1}(R)$ es una extensión de R por $\{\pm 1\}$, y es un subgrupo finito de $SU_2(\mathbb{C})$, de orden doble del de R ; el grupo es llamado grupo binario poliédrico si R es un grupo de rotaciones poliédrico.

Proposición: La clasificación (a menos de conjugación) de los subgrupos finitos de $SL_2(\mathbb{C})$ está formado por cinco tipos: cíclicos, binarios diedrales, binario tetraédrico, binario octaédrico y binario icosaédrico.

Demostración : Sea G subgrupo finito de $SL_2(\mathbb{C})$. Tomando un conjugado se puede suponer $G \subset SU_2(\mathbb{C})$. Si $-1 \in G$, entonces $\pi^{-1}(\pi(G)) = G$ por lo tanto G es un grupo binario. Si $-1 \notin G$, entonces G no posee ningún elemento de orden 2 (pues -1 es el único elemento de orden 2 en $SU_2(\mathbb{C})$) y G es isomorfo a $\pi(G)$. Pero en este caso, por la clasificación de los subgrupos finitos de $SO_3(\mathbb{R}) \cong IPSU_2(\mathbb{C})$, $\pi(G)$ es cíclico de orden impar, pues son los únicos que no poseen elementos de orden 2.

1.2 Singularidades de Klein.

Sea G un subgrupo finito de $SL_2(\mathbb{C})$. G opera sobre \mathbb{C}^2 , siendo el origen el único punto fijo y operando libremente sobre $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$.

En efecto, todo elemento $g \in G$ es diagonalizable pues es de orden finito; si g deja fijo $z \neq 0$, uno de sus valores propios es 1, pero al ser su determinante 1, el otro valor propio es también 1 por lo tanto g es la identidad. Se llama singularidad de Klein el cociente \mathbb{C}^2/G de \mathbb{C}^2 por G ; como conjunto está constituido por las órbitas de \mathbb{C}^2 bajo la acción de G y su estructura algebraica es definida por el anillo de las funciones regulares de \mathbb{C}^2 (es decir los polinomios complejos de dos variables) que toman igual valor para todo punto de una misma órbita, i.e. los polinomios invariantes bajo la acción de G . El anillo de invariantes ha sido calculado explícitamente por F Klein (ver [K]) en 1884; aunque ya había sido estudiado por H. Schwartz en 1882, estos cocientes son conocidos con el nombre de Klein.

Este último demuestra que existe en cada caso un sistema minimal de generadores constituidos por tres polinomios homogéneos y determina la ecuación (normalizada) que satisfacen. Estos generadores están íntimamente relacionados con la geometría del poliedro correspondiente.

Por ejemplo, en el caso del icosaedro, Klein determina tres polinomios homogéneos X, Y, Z de grados respectivos 30, 20 y 12 que representan las ecuaciones de los 30 medios de aristas, 20 centros de caras y 12 vértices respectivamente, para una posición fijada del poliedro respecto al sistema de coordenadas; es un hecho notable que luego de cálculos en los que intervienen números irracionales imaginarios, los coeficientes que se encuentran sean no sólo reales, sino enteros ! :

$$\begin{aligned}
 X &= u^{30} + v^{30} + 522 (u^{25}v^5 - u^5v^{25}) - 10005 (u^{20}v^{10} + u^{10}v^{20}) . \\
 Y &= u^{20} + v^{20} - 288 (u^{15}v^5 - u^5v^{15}) + 494 u^{10}v^{10} . \\
 Z &= uv (u^{10} + 11u^5v^5 - v^{10}) .
 \end{aligned}$$

La tabla siguiente resume para cada tipo de grupo finito G los grados de los generadores invariantes homogéneos y las ecuaciones normalizadas:

(T2)

|← grados de generadores →|

G	G	X	Y	Z	ecuación (E)
cíclico	$n+1, n \geq 1$	$n+1$	$n+1$	2	$xy + z^{n+1} = 0$
binario diedral	$4(n-2), n \geq 4$	$2(n-1)$	$2(n-2)$	4	$x^2 + z(y^2 + z^{n-2}) = 0$
binario tetra.	24	12	8	6	$x^2 + y^3 + z^4 = 0$
binario octa.	48	18	12	8	$x^2 + y(y^2 + z^3) = 0$
binario ico.	120	30	20	12	$x^2 + y^3 + z^5 = 0$

El anillo de los polinomios invariantes puede ser también calculado utilizando un teorema de Chevalley sobre grupos de reflexiones (ver por ejemplo [S]).

El morfismo de pasaje al cociente

$$q: \mathbb{C}^2 \longrightarrow S = \mathbb{C}^2 / G.$$

$$(u,v) \longmapsto (X(u,v), Y(u,v), Z(u,v))$$


fuera del origen es un revestimiento de grado igual al orden del grupo G , por lo que $q(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})$ es regular, pero la imagen del origen es un punto singular (aislado) de la superficie cociente S . Esta última es una superficie compleja en \mathbb{C}^3 determinada por la ecuación E ; se verifica directamente que el origen es su único punto singular por el criterio jacobiano, que en este caso consiste en la anulación simultánea de las tres derivadas parciales.

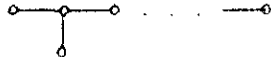
Las singularidades así obtenidas han sido posteriormente estudiadas por otros matemáticos (P.Duval [D], M.Artin [A], E.Brieskorn [B]) y caracterizadas como puntos dobles racionales (ver [A]).


Sea $p: \tilde{S} \longrightarrow S$ una desingularización minimal de S .


Esto significa que \tilde{S} es regular, p es un morfismo birracional, isomorfismo fuera del punto singular O de S . La minimalidad significa que \tilde{S} no contiene ninguna curva racional con auto-intersección -1 . (La auto-intersección de una curva en una superficie lisa es el grado de su fibrado normal). Sea D la fibra excepcional de la desingularización p , $D = p^{-1}(O)$. Descomponiendo D en componentes irreducibles, $D = \bigcup_{i=1}^n d_i$, y considerando las intersecciones de diferentes componentes y las auto-intersecciones de cada componente, se obtiene una descripción de la fibra excepcional D que es habitualmente representada por un grafo dual Γ . Los vértices de Γ corresponden a las componentes irreducibles d_i de D ; las aristas corresponden a los puntos de intersección y cada vértice es ponderado por la auto-intersección del d_i correspondiente. Para los puntos dobles racionales cada d_i es isomorfo a \mathbb{P}^1 y su auto-intersección es -2 , por lo que no se indicarán. Los grafos duales Γ correspondientes a los cinco tipos de singularidades de Klein, en el mismo orden que en la tabla T2, con sus denominaciones, son los siguientes :

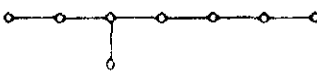
(T3) Γ :

A_n ($n \geq 1$)  (n vértices)

D_n ($n \geq 4$)  (n vértices)

E_6 

E_7 

E_8 

Si H es una intersección de S con un plano de \mathbb{C}^3 en posición general que contenga el punto singular O , la curva obtenida como imagen inversa $p^{-1}(H)$ por el morfismo de desingularización $p: \tilde{S} \rightarrow S$, tiene componentes irreducibles contenidas en la fibra excepcional D y una componente T que no está contenido en D , llamada la transformada estricta de H .

Considerando las multiplicidades de las componentes irreducibles del divisor definido por $p^{-1}(H)$, se obtiene entonces


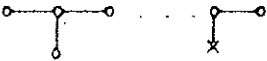
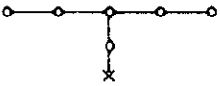

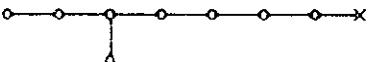
$$p^{-1}(H) = \mathcal{Z} + T, \text{ donde } \mathcal{Z} = \sum_{i=1}^n n_i d_i$$

El divisor \mathcal{Z} es llamado el ciclo fundamental de $p: \tilde{S} \rightarrow S$.

El grafo dual Γ puede completarse con un vértice suplementario correspondiente a la transformada estricta T de $p^{-1}(H)$ y con aristas

representando las intersecciones de T con la fibra excepcional D . El grafo dual completado será notado $\tilde{\Gamma}$. En la tabla siguiente se indica para cada caso el ciclo fundamental \mathcal{Z} ; cuyos coeficientes han sido representados en el lugar del vértice correspondiente en Γ , y el grafo completado $\tilde{\Gamma}$:

(T4)

	\mathcal{Z}	$\tilde{\Gamma}$
$A_n (n \geq 1)$	1 1 ... 1 1	
$D_n (n \geq 4)$	1 2 2 ... 2 1 1	
E_6	1 2 3 2 1 2	
E_7	2 3 4 3 2 1 2	
E_8	2 4 6 5 4 3 2 3	

1.3 Correspondencia de McKay.

Sea G un subgrupo finito de $SL_2(\mathbb{C})$; sea $\{\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_n\}$ el conjunto de las clases de isomorfismo de representaciones irreducibles (lineales complejas) de G , donde ρ_0 es la representación trivial de rango 1.

La observación de J.McKay es la siguiente (ver [M]):

Sea c la representación de G , que llamaremos canónica, definida por la inclusión $G \subset SL_2(\mathbb{C})$. Se considera el producto tensorial de c con representación ρ_i , y se descompone este producto en suma de representaciones irreducibles:

$$c \otimes \rho_i = \sum_{j=0}^n a_{ij} \rho_j, \quad 0 \leq i \leq n.$$

Para todos los subgrupos finitos de $SL_2(\mathbb{C})$ se obtiene $a_{ii} = 0$, $0 \leq i \leq n$ y $a_{ij} = a_{ji}$, con $a_{ij} = 0$ o $a_{ij} = 1$, si $i \neq j$. Es decir que la matriz $C((a_{ij}))$ es simétrica, con coeficientes 0 ó 1, y diagonal nula.

A esta matriz se le asocia un grafo (o carcaj con aristas no orientadas) con un vértice para cada representación ρ_i , $0 \leq i \leq n$, y una arista entre los vértices de ρ_i y ρ_j si $a_{ij} = 1$. Los grafos así construidos coinciden, para cada grupo G , con los grafos completados $\tilde{\Gamma}$ asociados a las singularidades cocientes $S = \mathbb{C}^2/G$ del párrafo precedente.

Haciendo corresponder al vértice suplementario de $\tilde{\Gamma}$ la representación trivial ρ_0 , se induce una biyección (módulo automorfismos de grafo) entre el conjunto $\text{Irr}(G)$ de las representaciones irreducibles no triviales de G , $\text{Irr}(G) = \{ \rho_1, \dots, \rho_n \}$ y el conjunto $\text{Irr}(D) = \{ d_1, \dots, d_n \}$ de las componentes irreducibles de la fibra excepcional $D = p^{-1}(0)$ de la desingularización minimal $p: \tilde{S} \rightarrow S$. Bajo esta biyección, los grados de las representaciones irreducibles coinciden con los coeficientes del ciclo fundamental \mathcal{Z} , que están indicados en la tabla (T4) del párrafo precedente.

(Los grafos $\tilde{\Gamma}$ son grafos de Dynkin completados; la matriz $2I - C$, donde I denota la matriz identidad, es la matriz de Cartan, correspondiente al sistema de raíces. Esta observación es la relación con las álgebras de Lie simples):

La obtención del mismo grafo con dos construcciones diferentes permite la correspondencia (combinatoria) señalada.

2. Construcción geométrica de la correspondencia de McKay.

La estructura geométrica de las singularidades consideradas es local, pues las singularidades son aisladas. Por lo tanto basta considerar el germen analítico (o formal) local correspondiente.

El punto de vista local es necesario para la formulación de los resultados siguientes, cuyo objeto es el de dar una construcción geométrica de la correspondencia de McKay, construcción que realiza la biyección entre representaciones G y componentes irreducibles de la fibra excepcional de la desingularización minimal de S de manera explícita y no por identificación combinatoria. Fijemos las nuevas notaciones:

V denota el germen de \mathbb{C}^2 en el origen, S el germen de la superficie cociente V/G por un subgrupo finito (no trivial) G de $SL_2(\mathbb{C})$, $0 \in S$ el punto singular, $p: \tilde{S} \longrightarrow S$ la desingularización minimal. Notaremos $\text{Pic}(\tilde{S})$ el grupo de Picard de los divisores en \tilde{S} módulo equivalencia lineal (o las clases de isomorfismo de fibrados vectoriales de rango 1 sobre \tilde{S} , lo que es equivalente), y $\text{Pic}_0(\tilde{S})$ el subgrupo de $\text{Pic}(\tilde{S})$ formado por los divisores con soporte en la fibra excepcional $p^{-1}(0) = D = \bigcup_{i=1}^n d_i$.

El grupo de Picard $\text{Pic}(\tilde{S})$ está provisto de una forma intersección que notaremos (\cdot, \cdot) . Asociando a un fibrado vectorial de rango 1 sobre \tilde{S} el grado de su restricción a cada d_i , se establece una aplicación de $\text{Pic}(\tilde{S})$ en \mathbb{Z}^n que es un isomorfismo para las singularidades que estamos considerando (ver [A]). El conjunto $\text{Irr}(D) = \{d_1, \dots, d_n\}$ es una \mathbb{Z} -base de $\text{Pic}_0(\tilde{S})$, y el conjunto formado por los duales $\{d^{v,1}, \dots, d^{v,n}\}$ es una \mathbb{Z} -base de $\text{Pic}(\tilde{S})$. La matriz de la inclusión $\text{Pic}_0(\tilde{S}) \subset \text{Pic}(\tilde{S})$ en estas bases es llamada la matriz intersección de la fibra excepcional.

La información obtenida en esta matriz es equivalente a la información contenida en el grafo dual ponderado Γ . El ciclo fundamental $\mathbb{Z} \in \text{Pic}_0(\tilde{S})$ es caracterizado por el hecho de ser el único ciclo minimal (con la relación de orden parcial inducida por el orden de \mathbb{Z} en los coeficientes) de la familia de los ciclos

$$\{ Y \in \text{Pic}_0(\tilde{S}) \mid Y > 0 ; (Y \cdot d_i) \leq 0, \forall i \}.$$

La construcción geométrica para asociar a cada representación irreducible no trivial de G una componente irreducible de D es la siguiente.

Para cada $\rho \in \text{Irr}(G)$, sea E_ρ el \mathbb{C} -espacio vectorial de dimensión igual al grado de ρ dado por la representación (i.e. un $\mathbb{C}[G]$ módulo simple). Por abuso de notación, denotaremos también E_ρ el fibrado vectorial trivial de fibra E_ρ sobre V (o el haz de O_V -módulos localmente libre de las secciones locales de ese fibrado). El grupo G opera sobre la base por la representación canónica y sobre la fibra por la representación ρ . Denotamos O_V (resp. O_S , etc.) el haz estructural de V (resp. de S , etc.).

Sea M_ρ el O_S -módulo definido por :

$$M_\rho := \text{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(E_\rho, O_V)$$

(M_ρ es canónicamente isomorfo al O_S -módulo $(O_V \otimes_{\mathbb{C}} E_{\rho^V})^G$, donde ρ^V denota la representación dual o contragradiente, y el exponente G significa que se consideran los puntos fijos bajo la acción de G).

Sea \tilde{M}_ρ el transformado estricto de M_ρ , como $O_{\tilde{S}}$ -módulo, p^*M_ρ módulo la $O_{\tilde{S}}$ -torsión, es decir

$$\tilde{M}_\rho := (O_{\tilde{S}} \otimes_{O_S} M_\rho) / \text{Torsión}.$$

Proposición 2.1 Con las notaciones precedentes, se tiene :

- i) $p_* m_r = M_r$ y $R^1 p_* m_r = 0$.
- ii) El O_S -módulo m_r es localmente libre de rango igual al grado de la representación r .

Para la demostración, ver [G-V].

De esta manera, para cada representación $\rho \in \text{Irr}(G)$ hemos obtenido un fibrado vectorial sobre la desingularización \tilde{S} . Para cada fibrado vectorial se puede considerar su primera clase de Chern, que es representada por un divisor en el grupo de Picard. Así se obtiene la biyección de McKay:

Teorema 2.2 Sea $\pi : \text{Irr}(G) \longrightarrow \text{Pic}(D)$ definida por

$$\pi(\rho) := c_1(\tilde{M}_\rho).$$

Entonces:

- i) Para cada $\rho_i \in \text{Irr}(G)$, existe un único elemento $d_i \in \text{Irr}(D)$ tal que $\pi(\rho_i) = d_i^\vee$, es decir $(\pi(\rho_i) \cdot d_j) = \delta_{ij}$. Por lo tanto π induce una biyección de $\text{Irr}(G)$ sobre $\text{Irr}(D)$; notemos d_ρ la imagen de ρ por esta biyección.
- ii) $(d_{\rho_i} \cdot d_{\rho_j}) = a_{ij}$ si $i \neq j$. Es decir que la biyección respeta las aristas del grafo de McKay.
- iii) El ciclo fundamental verifica $\mathcal{Z} = \sum (\text{gr } r) d_r$ donde $(\text{gr } r)$ denota el grado de r .

Para demostrar este teorema, los ingredientes principales utilizados son los siguientes. Cada grupo binario $G \subset \text{SL}_2(\mathbb{C})$ que se puede suponer (a menos de conjugación) subgrupo de $\text{SU}_2(\mathbb{C})$ es un subgrupo de índice 2 de un grupo $G \subset \text{U}_2(\mathbb{C})$ engendrado por reflexiones. Esto es debido esencialmente al hecho de que los subgrupos poliédricos de rotaciones son subgrupos de índice 2 de grupos engendrados por reflexiones de \mathbb{R}^3 ; estos últimos son obtenidos considerando además de las rotaciones, las reflexiones que dejan invariante el poliedro. (Ver [K] o [D]). Esto permite construir resoluciones (periódicas infinitas) de los O_S -módulos M_ρ por O_S -módulos libres. (ver[G-V]).

3. Generalizaciones en característica positiva.

Sea O_S un álgebra completa local de dimensión 2 sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k , con ideal maximal m , tal que $O_S/m \simeq k$.

Se supone que el espectro $S = \text{Spec}(O_S)$ es un punto doble racional.

Esta es la generalización natural, para un cuerpo de cualquier característica, de las singularidades de Klein. Si la característica es nula, estas singularidades están clasificadas (a menos de isomorfismo formal, o analítico si $k = \mathbb{C}$) por el grafo dual Γ de la desingularización minimal. En característica positiva, si bien los grafos duales son los mismos que los que se encuentran en característica nula, éstos no bastan para clasificar los puntos dobles racionales.

M. Artin hizo una clasificación por medio del grupo fundamental local que clasifica los revestimientos etales (ver[A2]). El número de clases de isomorfismo, cuando difiere del caso de característica nula, está resumido en la tabla siguiente:

(T5)

característica de k	$\#D_n$	$\#E_6$	$\#E_7$	$\#E_8$
2	$[n/2]$	2	4	5
3		2	2	3
5				2

Se observa el comportamiento siempre notable de E_8 (el "icosaedro"), en el que se invierten las características.

En característica positiva, ya no existe la construcción de singularidades cociente, por lo que hay que formular de otra manera la correspondencia de McKay. Los O_S -módulos asociados a las representaciones de G en característica nula, son reflexivos (es decir isomorfos a sus biduales) pues la dualidad de las representaciones es una involución. Entonces los objetos que se consideran son los O_S -módulos reflexivos.

Notemos MRI el conjunto de las clases de isomorfismo de O_S -módulos reflexivos inescindibles, no triviales (es decir no libres).

Haciendo una construcción análoga a la de la característica nula, se obtiene el resultado siguiente :

Teorema 3.1 Sea $p: \tilde{S} \longrightarrow S$ la desingularización minimal de S .

- i) Sea M un O_S -módulo reflexivo, $\tilde{M} = p^* M / \text{torsión}$ el transformado estricto de M . Entonces $(c_1(\tilde{M}) \cdot \mathcal{Z}) \leq \text{rango}(M)$; la igualdad es válida si y sólo si M no tiene sumandos libres.
- ii) Existe una correspondencia biyectiva entre MRI e $\text{Irr}(D)$ tal que si la imagen de M_i es d_i , entonces $(c_1(\tilde{M}_i) \cdot d_i) = \delta_{ij}$
- iii) El carácter de Chern ($\text{rango}(\tilde{M}), c_1(\tilde{M})$) clasifica las clases de isomorfismo de O_S -módulos reflexivos.

Para la demostración ver [A-V].

Esto establece la biyección entre los vértices; para establecer la correspondencia entre las aristas, hay que generalizar la construcción de McKay que utilizaba una representación canónica de un grupo que ya no existe sobre un cuerpo k cualquiera. Esto se subsana con el descubrimiento de un módulo reflexivo canónico, que denotaremos Ω .

Proposición 3.2

- i) Existe un O_S -módulo Ω de rango 2, único a menos de isomorfismo, extensión de m por O_S .
- ii) $\Omega \cong \Omega^*$, donde $\Omega^* = \text{Hom}_{O_S}(\Omega, O_S)$, por lo que Ω es reflexivo.
- iii) Ω no tiene sumandos libres.
- iv) $c_1(\tilde{\Omega}) + \mathcal{Z} = 0$.

Para la demostración, se aplica $R \text{Hom}_{O_S}(\cdot, O_S)$ a la sucesión exacta $0 \longrightarrow m \longrightarrow O_S \longrightarrow k \longrightarrow 0$, por lo que se obtiene $\text{Ext}_{O_S}^1(m; O_S) = k$, utilizando que O_S es Gorenstein, por lo que O_S es

dualizante. Para el resto, se utiliza el teorema 3.1 y el hecho que $(\mathcal{Z} \cdot \mathcal{Z}) = -2$ para todos los puntos dobles racionales. (Ver detalles en [G-V2]).

La notación Ω para este O_S -módulo "canónico" proviene del hecho de que en característica nula $\Omega \simeq (\Omega^1, S)^{**}$.

Si M y N son O_S -módulos reflexivos, se define un "producto reflexivo", notado $M.N$ como el bidual de su producto tensorial, o de manera equivalente $M.N = \text{Hom}_{O_S}(M^*, N)$, donde M^* denota el dual de M .

Si d_i es la componente irreducible de D correspondiente a M_i por la biyección del teorema 3.1, como la expresión de $d_i \in \text{Pic}_0(\tilde{S})$ en la base $\{d_j^v\}$

de $\text{Pic}_0(\tilde{S})$ es $d_i = -2d_i^v + \sum_{j \rightarrow i} d_j^v$, donde $j \rightarrow i$ denota los vértices adyacentes

al i (correspondiente a los d_j que cortan d_i), y como $c_1(\tilde{\Omega}, \tilde{M}_i) = \sum_{j \rightarrow i} d_j^v$ si

la regla de McKay se verifica, la traducción de esta regla es

$$c_1(\tilde{\Omega}, \tilde{M}_i) = 2 c_1(\tilde{M}_i) + d_i.$$

Por lo tanto esta es la igualdad que se debe verificar para que la correspondencia entre los grafos respete las aristas.

Se obtiene el resultado siguiente:

Teorema 3.3 Sea M un O_S -módulo reflexivo inescindible no trivial, $d^v = c_1(\tilde{M})$. Entonces,

i) $c_1(\tilde{\Omega}, \tilde{M}) = 2 c_1(\tilde{M}) + v$, donde $v = 0$ o bien $v = d$.

ii) Si $(\text{rango}(M), \text{car}(k)) = 1$, $v = d$; si $\text{car}(k)$ divide $\text{rango}(M)$, $v = 0$.

Esto significa que no siempre el grafo obtenido por la generalización de la construcción de McKay coincide con Γ ; esto es así si la característica de k es diferente de 2, 3 y 5, y en caso contrario existen algunos vértices "patológicos" (ver los rangos en la tabla T4). La demostración se hace

estudiando la especialización de característica 0 en característica positiva, y utilizando una resolución de Ω análoga a la de la característica nula.

También se utiliza otra caracterización de Ω :

Proposición 3.4 El O_S -módulo Ω es el segundo syzygy de m :

$$0 \longrightarrow \Omega \longrightarrow O_S^3 \longrightarrow m \longrightarrow 0 \text{ es exacta}$$

Para la demostración del teorema 3.3 y de la proposición 3.4 ver [G-V 2]. M Auslander demuestra una parte del teorema 3.3 por métodos diferentes, utilizando sucesiones casi-escindibles (ver [Au]).

En el caso en que el producto por Ω respeta la regla multiplicativa de McKay, se puede reconstruir toda la estructura multiplicativa del anillo de representaciones de un grupo que de hecho ha practicamente desaparecido:

Teorema 3.5 Sea $\mathcal{R}(s)$ el anillo de las clases de isomorfismo de O_S -módulos reflexivos provisto de la involución $*$ definida por la dualidad de O_S -módulos.

- i) Si la característica de k es nula, la estructura del anillo con involución $(\mathcal{R}(s), *)$ posee las propiedades siguientes:

(A1) Verifica la regla multiplicativa de McKay.

(A2) Sea α la clase de un módulo reflexivo inescindible de rango 1; entonces $\alpha \alpha^* = 1$. Para todo par α, β de clases de módulo reflexivos inescindibles de rango 1, $\alpha \cdot \beta$ es la clase de un módulo de rango 1.

- ii) Existe sobre $(\mathcal{R}(s), *)$ una sola estructura de anillo con involución que posea las propiedades A1 y A2 .

Se demuestra utilizando la clasificación de los diagramas de Dynkin Γ (ver [G-V 2]).

Referencias

- [A] M.Artin: "On isolated rational singularities of surfaces"
(Amer. J. Math. 88, 1966, p.129-136).
- [A-2] M.Artin: "Coverings of the rational double points in characteristics p."
(Complex analysis and algebraic geometry, Iwanami Skoten,
Tokyo 1977, p. 11-22).
- [A-V] M.Artin,J.L.Verdier: "Reflexive modules over rational double points".
(Math. Ann. 270, 1985, p. 79-82).
- [Au] M.Auslander: "Rational singularities and almost split sequences".
(Trans. A.M.S., Vol. 293, N°2, 1986,p.511-531).
- [B] E.Brieskorn: "Rationale Singularitäten Komplexer Flächen".
(Inv. Math. 4, 1968, p. 336-358).
- [C] H.S.M.Coxeter: "Regular Polytopes"
(Dover 3rd. ed., New York, 1973).
- [D] P.Du Val: "Homographies, Quaternions and Rotations".
(Clarendon Press, Oxford 1964).
- [G-V 1] G.González-Sprinberg, J.L.Verdier: "Construction géométrique de la correspondencia de McKay".
(Ann.Scient. Ec.Norm.sup., t.16, 1983, p.409-449).
- [G-V 2] G.González-Sprinberg, J.L.Verdier: "Structure multiplicative des modules reflexifs sur les points doubles rationnels".
(Singularités et Géométrie complexe, Travaux en cours N° 22,
Hermann, p. 79-110, 1987).
- [K] F.Klein: "The Icosahedron and the General 5th. Degree Equation".
(1884, Dover reprint 1956).
- [M] J.McKay: "Graphs, singularities and finite groups".
(Proc. of Symp. Pure Math., A.M.S., vol. 37, 1980, p. 183-186).
- [S] T.A.Sprinberg: "Invariant Theory".
(Springer -Verlag, L.N.M. Vol. 585, 1977).

Manuscrito recibido en Diciembre de 1988.