

Sobre las resoluciones inmersas de superficies.

G.González Sprinberg (Institut Fourier, Université Grenoble I)

1. Introducción.

La resolución o desingularización de superficies algebraicas o analíticas ha sido obtenida por diferentes métodos propuestos por géómetras italianos, principalmente por B. Levi y G. Albanese, quienes disponían de la resolución de curvas obtenida en el siglo pasado por L. Kronecker y Max Noether. La primera demostración rigurosa y completa, para superficies, es debida a R. Walker en 1936, y está basada en la reducción al caso de singularidades particulares que habían sido estudiadas por H. Jung. Con métodos puramente algebraicos, O. Zariski obtiene una demostración para superficies sobre un cuerpo de característica cero, poco después. Desde entonces han habido resultados importantes y en un contexto más general (esquemas excelentes) de H. Hironaka y resultados parciales en característica positiva de S. Abhyankar. La existencia de resoluciones inmersas, en las que se preservó la información de la inmersión de la variedad singular en una variedad lisa, ha sido también obtenida (y en un cuadro más general que el de superficies). Pero la realización efectiva y la descripción de tales desingularizaciones plantean aún numerosos problemas, por ejemplo la determinación de resoluciones inmersas canónicas y la relación con la geometría intrínseca de la singularidad. Comenzamos con algunas definiciones precisas.

Sea (S, O) un representante de un germen de superficie compleja, en el que O es un punto singular aislado.

Una resolución o desingularización de S es un morfismo propio $\sigma: \hat{S} \rightarrow S$, donde \hat{S} es una superficie lisa, $\hat{S} \setminus \sigma^{-1}(O)$ es denso en \hat{S} y tal que la restricción de σ es un isomorfismo de $\hat{S} \setminus \sigma^{-1}(O)$ sobre $S \setminus \{O\}$. Dada una inmersión de S en una variedad lisa V , se llama resolución inmersa de $S \hookrightarrow V$ un morfismo propio $\sigma: \hat{V} \rightarrow V$ donde \hat{V} es también una

variedad lisa. $\hat{V} \setminus \sigma^{-1}(O)$ es denso en \hat{V} , la restricción de σ es un isomorfismo de $\hat{V} \setminus \sigma^{-1}(O)$ sobre $V \setminus \{O\}$, y tal que σ induce una resolución de S con cruces normales. Esta última condición significa:

(a) Sea $\hat{S} = \overline{\sigma^{-1}(S \setminus \{O\})}$ el transformado estricto de S , i.e. la adherencia de $\sigma^{-1}(S \setminus \{O\})$ en \hat{V} . La restricción $\sigma|_{\hat{S}}$ de σ a \hat{S} es una desingularización de S .

(b) $\sigma^{-1}(O)$ es un divisor de \hat{V} , unión de hipersuperficies lisas irreducibles $D_i, 1 \leq i \leq r$, y la familia $\{\hat{S}, D_1, \dots, D_r\}$ es con cruces normales.

La propiedad de cruces normales de la familia $\{\hat{S}, D_1, \dots, D_r\}$ quiere decir que, para cada punto $x \in \sigma^{-1}(O)$, existe un sistema local de coordenadas de \hat{V} en un entorno de x tal que las variedades de la familia $\{\hat{S}, D_1, \dots, D_r\}$ que contengan x son subespacios lineales de coordenadas, en posición general.

El divisor $\sigma^{-1}(O)$ de \hat{V} , cuya descomposición en componentes irreducibles es $D_1 \cup \dots \cup D_r$, es llamado el divisor excepcional de σ .

La descomposición en componentes irreducibles de $\sigma^{-1}(S)$ es $\hat{S} \cup D_1 \cup \dots \cup D_r$. El diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 \overline{\sigma^{-1}(S \setminus \{O\})} = \hat{S} & \hookrightarrow & \hat{V} \longleftarrow \sigma^{-1}(O) = D_1 \cup \dots \cup D_r \\
 \downarrow \sigma|_{\hat{S}} & & \downarrow \sigma \\
 S & \hookrightarrow & V
 \end{array}$$

Como consecuencia de la condición de cruces normales se obtienen las propiedades siguientes:

1) Por cada punto de $x \in \sigma^{-1}(0) \cap \hat{S}$ pasan a lo sumo dos componentes irreducibles de $\sigma^{-1}(0)$, pues \hat{S} es una variedad de dimensión dos.

2) Las componentes irreducibles de la fibra excepcional $\sigma_{|\hat{S}}^{-1}(0)$ de la restricción $\sigma_{|\hat{S}}$ son lisas y con cruces normales en \hat{S} (i.e. la resolución de S inducida por σ es lo que se llama una buena resolución de S).

En efecto, se tiene la igualdad $\sigma_{|\hat{S}}^{-1}(0) = \hat{S} \cap \sigma^{-1}(0)$, por lo que la familia de las componentes irreducibles de la fibra excepcional $(D_i \cap \hat{S}, i=1, \dots, r)$ es con cruces normales y en particular cada componente es lisa.

Las definiciones precedentes han sido dadas en el contexto analítico complejo: definiciones análogas existen en el contexto algebraico.

La obtención y la descripción de resoluciones inmersas de superficies es de una complejidad equivalente a la de las resoluciones de variedades de dimensión tres. En este artículo resumimos algunos métodos y resultados ilustrados con un ejemplo de una hipersuperficie, caso de una singularidad con dimensión de inmersión (es decir la dimensión del espacio tangente de Zariski) mínimo.

Los resultados resumidos aquí son una parte del contenido de varias conferencias realizadas en las Universidades de Harvard y de Northeastern en 1987 (en un seminario conjunto organizado por H. Hironaka, D.T. Lê, M. Spivakovsky, y el autor), y en el Instituto Fourier en 1988.

2. "Blow-up", superficies regladas y ciclo fundamental.

2.1 Uno de los métodos efectivos para el cálculo de resoluciones reposa sobre la utilización de "blow-up" (estallido) de centro puntos o curvas lisas en las que la superficie considerada es singular, o bien donde existe tangencia de un transformado estricto de ésta con los divisores excepcionales introducidos por estallidos anteriores. Los centros de los estallidos son subvariedades de la superficie, pero los estallidos son realizados en la variedad ambiente lisa. En el ejemplo considerado la variedad ambiente lisa es de dimensión tres; será suficiente, para los estallidos puntuales, fijar la notación standard del estallido de \mathbb{C}^3 de centro el origen: la variedad estallada $\hat{\mathbb{C}}^3$ está recubierta por los abiertos afines U_i , $1 \leq i \leq 3$, donde cada U_i es una copia de \mathbb{C}^3 con coordenadas (X_i, Y_i, Z_i) , de tal manera que U_i es el abierto en el que la imagen del i -ésimo generador del ideal maximal $m = (X, Y, Z)$ del origen de \mathbb{C}^3 es un generador del ideal principal $m \hat{\mathcal{O}}_{\mathbb{C}^3}$ (i.e. (X_1) en U_1 , (Y_2) en U_2 , (Z_3) en U_3); dicho generador en cada abierto U_i es una ecuación local del divisor excepcional D del estallido, divisor que es isomorfo a un plano proyectivo \mathbb{P}^2 . Las funciones de transición entre los tres abiertos son:

$$(X_1, Y_1, Z_1) = (X_2/Y_2, 1/X_2, Z_2/X_2)$$

$$(X_2, Y_2, Z_2) = (X_3/Y_3, Y_3/Z_3, 1/Y_3)$$

$$(X_3, Y_3, Z_3) = (1/Z_1, Y_1/Z_1, X_1/Z_1)$$

Denotaremos σ un estallido puntual, $\bar{\sigma}$ un estallido de centro una curva (lisa). En el ejemplo considerado, la notación utilizada para un estallido de tipo $\bar{\sigma}$ es análoga a la precedente, pero sobre cada abierto afín considerado, la variedad estallada es recubierta por dos abiertos afines en lugar de tres.

2.2 Los componentes irreducibles D_j del divisor excepcional son superficies racionales en el caso en que provengan de un estallido puntual, o superficies regladas si provienen de un estallido de una curva. Para las primeras utilizaremos la notación R_n para denotar un superficie isomorfa a un plano proyectivo complejo \mathbb{P}^2 estallado en n puntos, indicando también el grafo dual de las n curvas excepcionales de R_n , grafo ponderado por las auto-intersecciones de dichas curvas. Por ejemplo :



denota un divisor isomorfo a \mathbb{P}^2 estallado en dos puntos, tales que el segundo punto estallado pertenece a la fibra excepcional del primero. En el caso general este grafo dual no es suficiente para determinar el orden de los estallidos, pero lo es en los ejemplos considerados.

Para los divisores excepcionales que son superficies regladas, denotaremos F_m una superficie isomorfa al espacio total de un fibrado proyectivo $\mathbb{P}^1 \times_{\mathbb{P}^1} (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m))$ sobre la recta proyectiva \mathbb{P}^1 .

La consideración de estas superficies regladas es suficiente para los casos en los que la curva estallada es racional (lisa), i.e. isomorfa a \mathbb{P}^1 . En este caso, todas las superficies regladas obtenidas por estallido de una curva racional en una variedad lisa de dimensión tres son del tipo F_m , con $m \geq 0$. En particular si $m=0$, entonces $F_0 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, si $m > 0$ identificaremos la única curva en F_m cuya auto-intersección es $-m$.

Es de notar que las superficies F_1 y R_1 son isomorfas, pero es el único tipo común entre las F_m y las R_n .

La determinación del entero m depende de la clase de isomorfismo del fibrado normal $N_{\mathcal{C}}/V$ de la curva racional \mathcal{C} en V , que es del tipo $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b)$, donde a y b son enteros, $a \leq b$; se obtiene entonces $m=b-a$, pues el producto tensorial por $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-a)$ no modifica la clase de isomorfismo del fibrado proyectivo asociado.

2.3 Probablemente el caso más accesible de singularidad de superficie a ser considerado para obtener una resolución inmersa es el de las singularidades absolutamente aisladas, para las que se obtiene una resolución (no inmersa) por medio de estallidos puntuales. Una vez obtenida dicha resolución, se podrá considerar la condición de transversalidad o cruce normal de los divisores excepcionales con el transformado estricto de la superficie.

Si $\sigma : \hat{S} \rightarrow S$ es una resolución de S , donde $O \in S$ es una singularidad absolutamente aislada, el ideal $\mathfrak{m}_{\hat{S}}$ es localmente principal (\mathfrak{m} denota el ideal máximo en O); por lo tanto $\mathfrak{m}_{\hat{S}}$ define un divisor Z en \hat{S} tal que $\mathfrak{m}_{\hat{S}} = \mathcal{O}_{\hat{S}}(-Z)$. Sean d_1, \dots, d_r las componentes irreducibles de la fibra excepcional $\sigma^{-1}(O)$. Si la multiplicidad de intersección $(Z \cdot d_i)$ de Z con d_i es diferente de cero, entonces d_i pertenece a la fibra excepcional del primer estallido; si dicha intersección es cero, entonces la componente d_i no aparece en la fibra excepcional del primer estallido. (La multiplicidad de intersección considerada está dada por la forma intersección en el grupo de Picard de \hat{S}). La iteración de este procedimiento permite determinar el orden de aparición de las componentes d_i en la sucesión de estallidos puntuales. Si la singularidad es racional, el divisor Z coincide con el ciclo fundamental, que es el único ciclo divisorial minimal en la familia de los ciclos divisoriales positivos con soporte en la fibra excepcional $\sigma^{-1}(O)$, tales que $(Z \cdot d_i) \leq 0, \forall i$. De hecho el ciclo fundamental es determinado por la matriz intersección $(d_i \cdot d_j), 1 \leq i, j \leq r$; lo que reduce varios cálculos al dominio de la combinatoria.

El cálculo de las intersecciones $(Z \cdot d_i)$ es inmediato a partir del grafo [3.1] y de las auto-intersecciones; se obtiene $(Z \cdot d_i) = 0$ para todo $i \neq 1$. En consecuencia el transformado estricto de S por el estallido σ_i de centro el origen es una superficie con un único punto singular en cuya resolución minimal las componentes irreducibles de la fibra excepcional son $d_i, 2 \leq i \leq 7$.

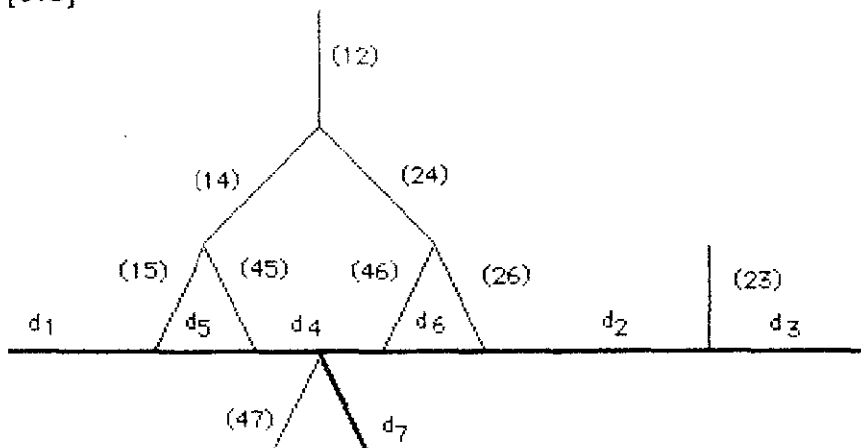
Fijemos algunas notaciones: para cada estallido puntual $\sigma_i, 1 \leq i \leq 7$, notaremos \hat{S}_i el transformado estricto de S por la composición $\sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_i$; D_i el divisor excepcional de la variedad ambiente de dimensión tres introducido por σ_i , y $d_i = |D_i \cap \hat{S}_i|$ la curva reducida traza de D_i en \hat{S}_i . Se conservará por abuso de notación, la misma denominación para los transformados estrictos de D_i y de d_i en los estallidos posteriores a σ_i . Finalmente denotaremos $(i \cdot j)$ la curva intersección de D_i con D_j , para $i \neq j$, si dicha intersección no es vacía, así como sus transformados estrictos. La ecuación del transformado total de S en el abierto U_3 (ver 2.1) de la variedad estallada en:

$$\sigma_1^*(f) = Z_3^2 + X_3^2(Y_3 Z_3 (Y_3^2 + Z_3)) = 0$$

La ecuación local en U_3 del divisor excepcional es $Z_3 = 0$, y el factor en paréntesis corresponde a \hat{S}_1 ; se verifica que el único punto singular de \hat{S}_1 es el origen de U_3 (de tipo \mathbb{D}_6).

Un cálculo análogo de los ciclos fundamentales de las singularidades sucesivas de $\hat{S}_i, 2 \leq i \leq 6$, determina el orden de aparición de las curvas excepcionales restantes: \hat{S}_2 posee dos puntos singulares (de tipo A_1 y \mathbb{D}_4); \hat{S}_3 obtenida con el estallido σ_3 del punto de tipo A_1 posee un solo punto singular en $d_1 \cap d_2$, cuyo estallido σ_4 permite obtener la superficie \hat{S}_4 con tres puntos singulares de tipo A_1 en $d_4 \cap d_1$, en $d_4 \cap d_2$ y un tercero en d_4 que son resueltos respectivamente con los estallidos $\sigma_5, \sigma_6, \sigma_7$.

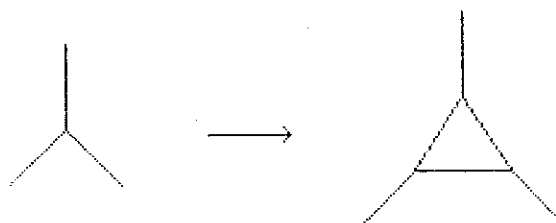
[3.2]



El cálculo local muestra que tres de los divisores excepcionales D_i son tangentes al transformado estricto \hat{S}_7 a lo largo de las curvas (racionales) $d_i = |D_i \cap \hat{S}_7|$, para los índices $i=1, 2, 4$.

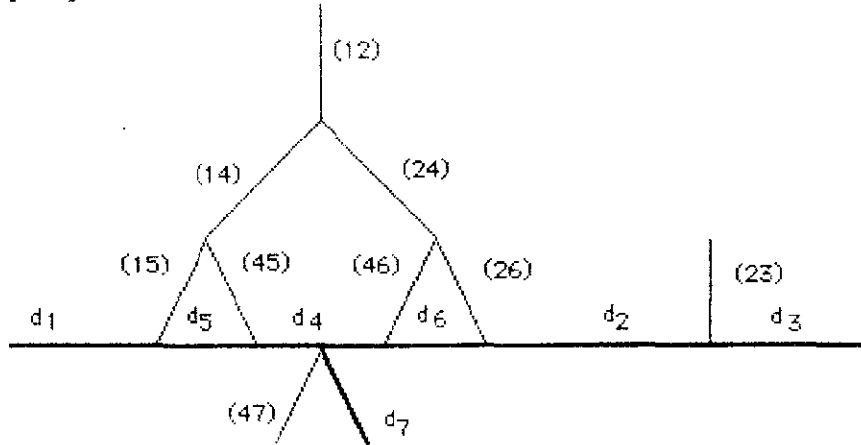
En estos tres casos en los que la condición de cruce normal no es satisfecha, el tipo de tangencia es el mismo, con orden de contacto 2; en consecuencia se obtiene una resolución inmersa luego de efectuar dos estallidos de centro d_i para cada $i=1, 2, 4$. Más precisamente, sea $\bar{\sigma}_i$ el estallido de centro d_i y sea D_i^- la superficie reglada obtenida como divisor excepcional. Las superficies D_i^- y los transformados estrictos de D_i y de \hat{S}_7 tienen una intersección común a lo largo de una curva que es centro del estallido siguiente, denotado $\bar{\sigma}_i$, estallido que introduce otra superficie reglada, D_i^+ . Las cuatro superficies D_i^+ , D_i^- , D_i y \hat{S}_7 presentan cruces normales (\hat{S}_7 denota el transformado estricto final de S); la única intersección no vacía de \hat{S}_7 con los tres otros divisores es $\hat{S}_7 \cap D_i^+$ que será denotado d_i^+ . Los divisores D_i^+ y D_i^- son disjuntos y sus intersecciones con D_i^- son denotados (i^-) e (i^+) respectivamente. Finalmente, si $(ij) = D_i \cap D_j \neq \emptyset$ la curva d_j es tangente a (ij) en $d_i \cap d_j$, y después de

Esta información permite la construcción del diagrama de incidencia de los divisores $\hat{S}_7, D_i, 1 \leq i \leq 7$ en el espacio ambiente de dimensión tres resultante de los siete estallidos. En este diagrama de incidencia son representadas todas las curvas que aparecen como intersección de los ocho divisores obtenidos; cada curva es representada por un segmento, y un punto común a dos segmentos representa un punto de intersección de dos curvas. Las curvas consideradas son reducidas; los divisores excepcionales D_i son transversales entre ellos pues son superficies lisas obtenidas todas por estallidos puntuales. La condición de cruce normal de los $D_i, 1 \leq i \leq 7$ con \hat{S}_7 será analizada posteriormente. La irreductibilidad de cada intersección $D_i \cap \hat{S}_7, 1 \leq i \leq 7$, implica que si el diagrama de incidencia conjuntista de tres divisores corresponde a la posición general de tres hiperplanos, entonces el diagrama de incidencia del estallido de centro el punto de intersección de los tres divisores se obtiene reemplazando este punto por un triángulo que representa las intersecciones del nuevo divisor excepcional con los tres precedentes, como en el diagrama siguiente:



El diagrama de incidencia conjuntista para la resolución minimal resulta de la regla precedente y de la información disponible sobre el orden y los centros sucesivos de estallidos; y es obtenido facilmente sin necesidad de conocer las ecuaciones locales del atlas de los abiertos afines. El resultado es el diagrama siguiente:

[3.2]

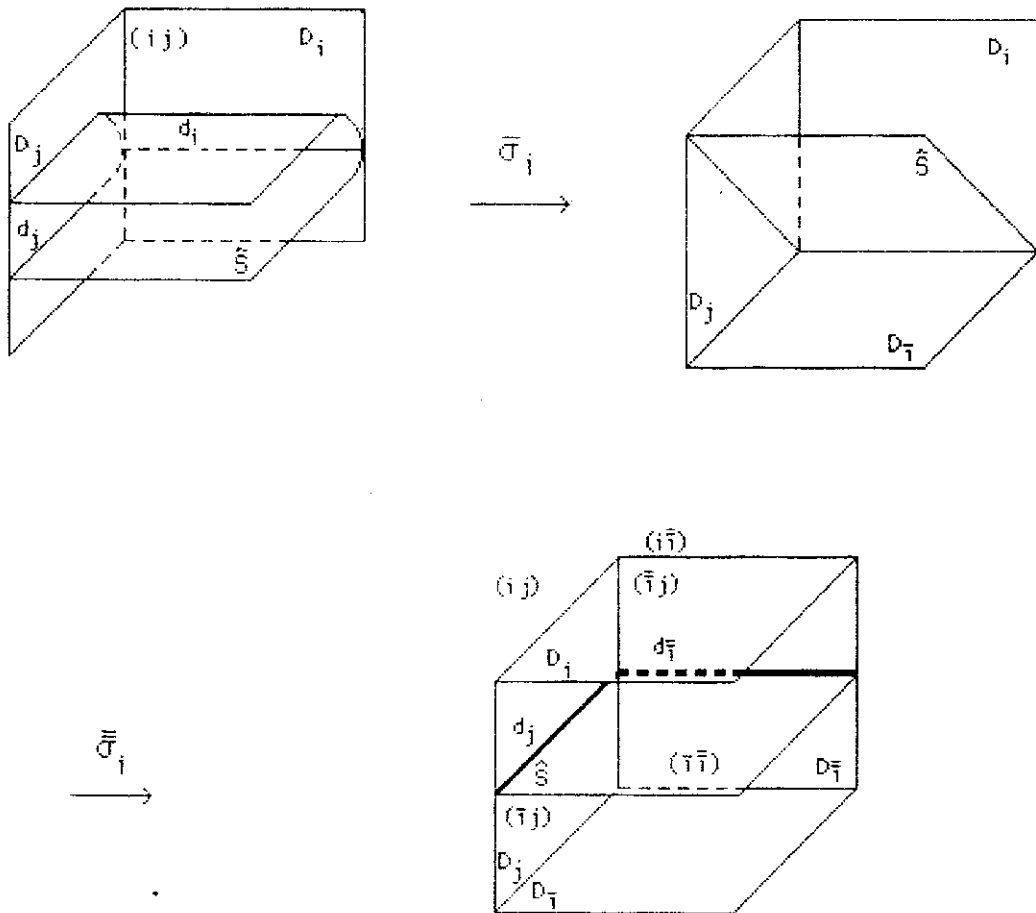


El cálculo local muestra que tres de los divisores excepcionales D_i son tangentes al transformado estricto \hat{S}_7 a lo largo de las curvas (racionales) $d_i = |D_i \cap \hat{S}_7|$, para los índices $i=1, 2, 4$.

En estos tres casos en los que la condición de cruce normal no es satisfecha, el tipo de tangencia es el mismo, con orden de contacto 2; en consecuencia se obtiene una resolución inmersa luego de efectuar dos estallidos de centro d_i para cada $i=1, 2, 4$. Más precisamente, sea $\bar{\sigma}_i$ el estallido de centro d_i y sea D_i^- la superficie reglada obtenida como divisor excepcional. Las superficies D_i^- y los transformados estrictos de D_i y de \hat{S}_7 tienen una intersección común a lo largo de una curva que es centro del estallido siguiente, denotado $\bar{\sigma}_i^-$, estallido que introduce otra superficie reglada, $D_i^{\bar{-}}$. Las cuatro superficies $D_i^{\bar{-}}$, D_i^- , D_i y \hat{S}_7 presentan cruces normales (\hat{S}_7 denota el transformado estricto final de S); la única intersección no vacía de \hat{S}_7 con los tres otros divisores es $\hat{S}_7 \cap D_i^{\bar{-}}$ que será denotado $d_i^{\bar{-}}$. Los divisores D_i^- y D_i son disjuntos y sus intersecciones con $D_i^{\bar{-}}$ son denotados $(i\bar{i}^-)$ e $(i\bar{i})$ respectivamente. Finalmente, si $(ij) = D_i \cap D_j \neq \emptyset$ la curva d_j es tangente a (ij) en $d_i \cap d_j$, y después de

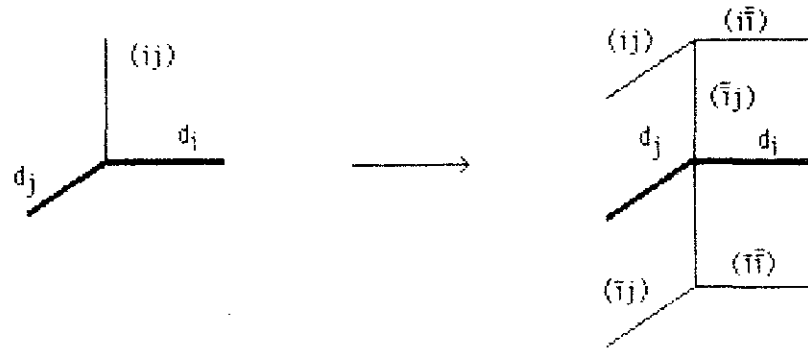
efectuar los estallidos $\bar{\sigma}_i$ y $\bar{\sigma}_i$, las intersecciones de D_j con D_i y D_i son denotadas $(i\bar{j})$, $(\bar{i}j)$ respectivamente.

Se puede representar graficamente estos estallidos en las trazas reales de las superficies de la manera siguiente:



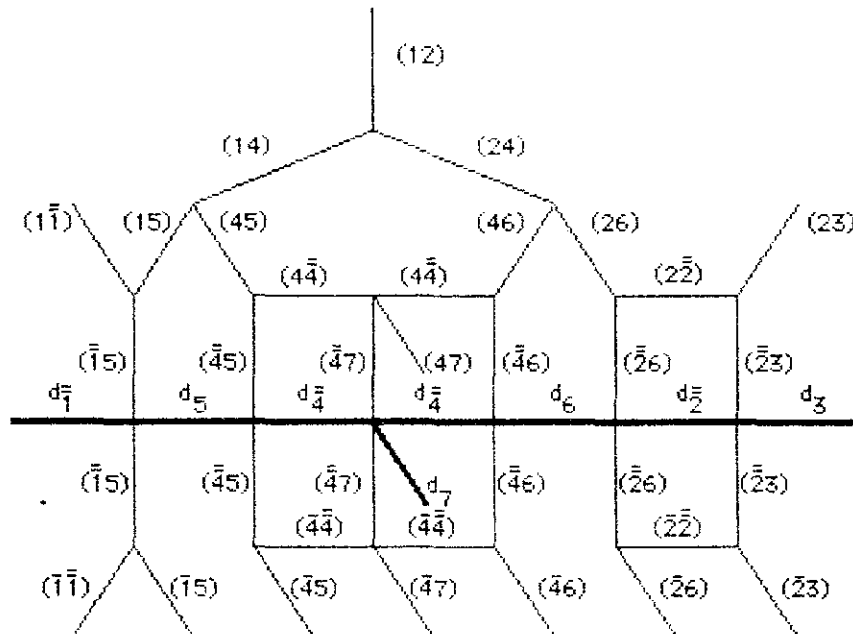
En consecuencia, el diagrama de incidencia local de \hat{S} , D_i , $D_{\bar{i}}$, $D_{\bar{i}}$, D_j se obtiene a partir del diagrama de \hat{S} , D_i , D_j de la manera siguiente:

[3.3]



El diagrama final de incidencia de la resolución inmersa de S se obtiene a partir de [3.2] con las sustituciones [3.3] para $i=1, 2, 4$; se tiene simultaneamente $j=5$ para $i=1$; $j=3, 6$ para $i=2$ y $j=5, 6, 7$ para $i=4$. El resultado es el siguiente :

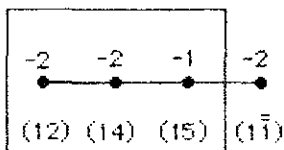
[3.4]



Para determinar el tipo de superficies racionales y regladas que aparecen como divisores excepcionales hay que retomar la sucesión de estallidos puntuales y de curvas que las generan.

La superficie D_1 que es isomorfa a un plano proyectivo complejo \mathbb{P}^2 , divisor excepcional de σ_1 , es estallada en tres puntos por $\sigma_2, \sigma_4, \sigma_5$, por lo que es isomorfa a una superficie racional de tipo R_3 (ver § 2.2), siendo las curvas excepcionales en D_1 , (12), (14), (15). Los puntos estallados pertenecen a d_1 o a su transformado estricto en cada estallido; d_1 es una recta en el primer estallido, pues el cono tangente de S en 0 es un plano (doble), su autointersección en D_1 es 1. Pero como la autointersección de una curva estallada en uno de sus puntos decrece de una unidad, al cabo de los tres estallidos ésta es -2 . Los estallidos de centro d_1 no modifican la superficie D_1 pues la curva ya es un divisor de Cartier; en cambio separan D_1 del transformado estricto de la superficie \hat{S} , por lo que la curva que denotamos d_1 deviene $(1\bar{1})$, es decir la intersección $D_1 \cap D_1^-$. Cada curva que aparece en el diagrama de incidencia posee una autointersección para cada superficie que la contiene, autointersección que es el grado de su fibrado normal en la superficie considerada.

Para completar la descripción de la resolución inmersa, determinamos todas las autointersecciones, resumidas en [3.5]. En éste se describe, para cada divisor excepcional, el grafo dual de las curvas de intersección con los otros divisores, grafo ponderado por las autointersecciones. Las curvas excepcionales de los n estallidos de R_n , así como la única curva de autointersección $-m < 0$ de F_m , son distinguidas (en recuadro) de las restantes. Para $D_1 = R_3$, el grafo es



El divisor excepcional $D_{\bar{1}}$ obtenido por el estallido $\bar{\sigma}_1$ de centro d_1 es una superficie reglada de tipo F_2 . En efecto cuando se efectúa el primer estallido, σ_1 , el divisor excepcional $D_1 \cong \mathbb{P}^2$ tiene un fibrado normal de grado -1 en la variedad ambiente de dimensión tres estallada \hat{V}_1 (pues $N_{D_1/\hat{V}_1} \cong \mathcal{O}_{D_1}(-1)$), y la curva $d_1 = |D_1 \cap \hat{S}_1|$ es una recta en D_1 , por lo que $N_{d_1/D_1} \cong \mathcal{O}_{d_1}(1)$. En consecuencia, se obtiene:

$$N_{d_1/\hat{V}_1} \cong \mathcal{O}_{d_1}(1) \oplus \mathcal{O}_{d_1}(-1)$$

Para cada estallido de centro puntos de $d_1, \sigma_2, \sigma_4, \sigma_5$, el grado de cada uno de los dos sumandos del fibrado normal disminuye de una unidad, por lo que se obtiene finalmente

$$\mathcal{O}_{d_1}(-2) \oplus \mathcal{O}_{d_1}(-4).$$

Este resultado se puede verificar también con cálculos locales y funciones de transición; con las notaciones adoptadas en § 2.1, un entorno de d_1 en \hat{V} está dado por los segundos abiertos de la descripción de σ_1 y de σ_5 , cada uno de ellos isomorfo a \mathbb{C}^3 , con funciones de transición:

$$(X, Y, Z) = (xy^2, y^4z, 1/y)$$

El ideal de definición de d_1 es (X, Y) (respectivamente (x, z)) en el primer (resp. segundo) abierto, por lo que se verifica el resultado enunciado sobre el fibrado normal, y el tipo de la superficie reglada

$$D_{\bar{1}} = \mathbb{P}_{d_1}(\mathcal{O}_{d_1}(-2) \oplus \mathcal{O}_{d_1}(-4)) \cong \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)).$$

Considerando ahora la curva $d_{\bar{j}} = |D_{\bar{j}} \cap \hat{S}|$ el estallido $\bar{\sigma}_{\bar{j}}$ de centro $d_{\bar{j}}$ tiene el divisor excepcional $D_{\bar{j}}$ isomorfo a F_0 (es decir $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$), pues el fibrado normal de $d_{\bar{j}}$ en la variedad ambiente es isomorfo a

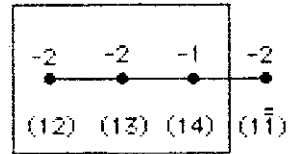
$$\mathcal{O}_{d_{\bar{j}}}(-2) \oplus \mathcal{O}_{d_{\bar{j}}}(-2).$$

Para $D_{\bar{i}}$ y $D_{\bar{j}}$, con $i=2,4$, se obtienen resultados análogos al obtenido para $i=1$.

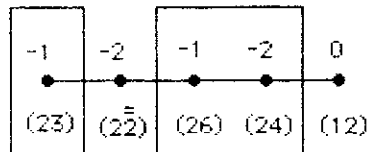
Si la curva d_j intersecta transversalmente un divisor D_j , la restricción a D_j del estallido σ_j de centro d_j es un estallido puntual de D_j . En el cuadro siguiente se resume el tipo de isomorfismo de cada divisor excepcional y el grafo dual de las curvas de la configuración [3.4] que contiene.

[3.5]

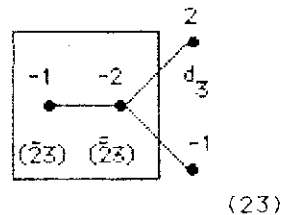
$$D_1 \cong R_3$$



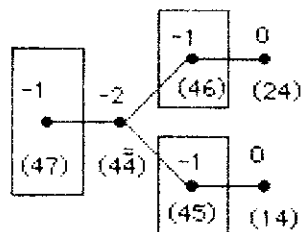
$$D_2 \cong R_3$$



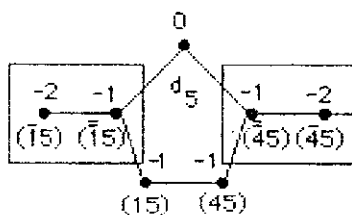
$$D_3 \cong R_2$$



$$D_4 \cong R_3$$



$$D_5 \cong R_4$$



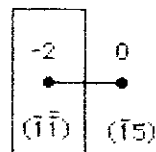
$$D_6 \cong R_4$$

(grafo igual al de D_5 , reemplazando los índices 1 por 2, 5 por 6).

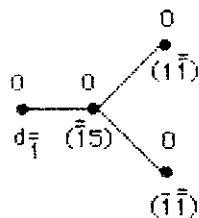
$$D_7 \cong R_2$$

(grafo igual al de D_3 , reemplazando los índices 2 por 4, 3 por 7)

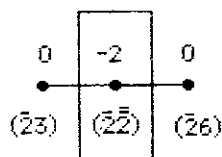
$$D_{\bar{1}} \cong F_2$$



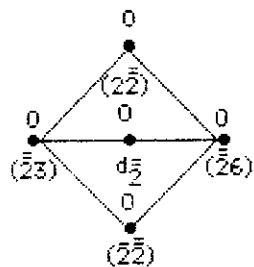
$$D_{\bar{1}} \cong F_0 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$$



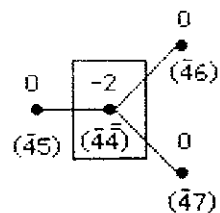
$$D_{\bar{2}} \cong F_2$$



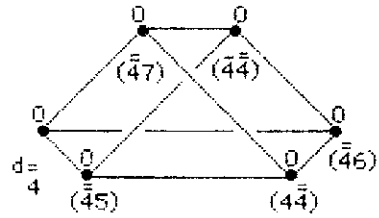
$$D_{\bar{2}} \cong F_0 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$$



$$D_{\bar{4}} \cong F_2$$



$$D_{\frac{d}{4}} \simeq F_0 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$$



Sea σ el morfismo de la resolución inmersa de S , composición de los estallidos puntuales y de centro las curvas indicadas. El transformado total $\sigma^{-1}(S)$ de S por σ se descompone como ciclo en suma del transformado estricto \hat{S} y de los divisores excepcionales con coeficientes enteros, coeficientes iguales a las multiplicidades genéricas de los divisores. Dichas multiplicidades son calculadas a partir del orden de los estallidos y de la multiplicidad del centro estallado. Sea m_i la multiplicidad de D_i , $i=1,2,4$; entonces la multiplicidad de D_i^- es (m_i+1) y la de D_i^+ es $(2m_i+2)$. El transformado total es:

$$\begin{aligned}
 [3.6] \\
 \sigma^{-1}(S) = & \hat{S} - 2D_1 + 4D_2 + 6D_3 + 8D_4 + 12D_5 + 14D_6 + 10D_7 \\
 & + 3D_1^- + 5D_2^- + 9D_4^- \\
 & + 6D_1^+ + 10D_2^+ + 18D_4^+
 \end{aligned}$$

Los cuadros [3.4], [3.5] y [3.6] completan la descripción de incidencias, autointersección y multiplicidades de la desingularización inmersa de S .

Referencias:

M.Artin. "On isolated rational singularities of surfaces"
(Amer.J.Math. 88, p. 129-136, 1966)

J.M.Aroca, H. Hironaka, J.L. Vicente. "Desingularization theorems"
(Mem. de Mat. 30, Madrid 1977)

H. Hironaka. "Resolution of singularities of an algebraic variety over a field
of characteristic zero"
(Annals of Math. 79, p.109-326, 1964)

G. González Sprinberg. "Resolution de Nash des points doubles rationnels".
(Ann. Inst. Fourier 32, p.111-178, 1982).

G.N. Tyurina. "Absolute isolatedness of rational singularities".
(Func. Annal. Appl. 2, p.324-332, 1968).

Manuscrito recibido en Abril de 1989.