

SUR L'HOMOLOGIE D'INTERSECTION ET LES CLASSES DE CHERN
DES VARIETES SINGULIERES

(Espaces de Thom, Exemples de J.L. Verdier et M. Goresky)

par

J.P. Brasselet et G. Gonzalez-Sprinberg

Introduction

Soit S une variété algébrique complexe singulière. Les classes de Chern de S ont été définies, dans l'homologie de S par M.H. Schwartz et R. Mac Pherson. D'autre part, pour de telles variétés, l'homomorphisme de Poincaré, cap-produit par la classe fondamentale de S , se factorise par l'homologie d'intersection $IH_*(S)$.

J.L. Verdier et M. Goresky ont construit des exemples montrant, l'un que le morphisme canonique $\varphi : IH_*(S) \rightarrow H_*(S)$ n'étant pas injectif, les classes de S pouvaient être réalisées de plusieurs manières comme images de classes de Chern de variétés lisses, le second que les classes de Chern de S ne sont pas toujours dans l'image de φ .

En fait, ce sont deux cas particuliers d'une même situation : S est un espace de Thom sur une variété lisse B , compacte. Dans ce cas, l'homomorphisme φ se décrit de manière naturelle, ce qui permet d'explicitier le calcul de ces deux exemples.

I. Rappels

Pour toute variété algébrique complexe S , on notera $[S]$ la classe fondamentale de S et $s = \dim_{\mathbb{C}} S$.

Classes de Chern [M] : Pour toute fonction constructible α sur S , les classes de Chern $c_*(\alpha)$, définies dans $H_*(S)$ satisfont à :

$$(i) \quad f_* c_*(\alpha) = c_* f_*(\alpha)$$

- (ii) $c_*(\alpha+\beta) = c_*(\alpha) + c_*(\beta)$
 (iii) $c_*(1_X) = c^*(X) \cap [X]$,

où f est un morphisme de S dans une autre variété S' , X est une variété lisse, 1_X la fonction constante 1 sur X et $c^*(X)$ la classe de Chern (en cohomologie) du fibré tangent à X .

Homologie d'intersection [GM] : Etant donnée une filtration de S en strates de dimensions paires :

$$S = S_{2s} \supset S_{2s-2} \supset S_{2s-4} \supset \dots \supset S_2 \supset S_0$$

où $\dim_{\mathbb{R}}(S_k - S_{k-2}) = k$, les groupes d'homologie d'intersection, pour la perversité "moitié", sont définis comme suit :

On note $C_i(S)$ le groupe des i -chaînes P.L. de S et $IC_i(S)$ le sous-groupe de $C_i(S)$ formé des chaînes ξ dont le support $|\xi|$ satisfait à :

$$\dim(|\xi| \cap S_{2s-2k}) \leq i-k-1, \quad \dim(|\partial\xi| \cap S_{2s-2k}) \leq i-k-2$$

Le i -ème groupe d'homologie d'intersection de S : $IH_i(S)$, est le i -ème groupe d'homologie du complexe $IC_*(S)$.

Propriétés des groupes d'homologie d'intersection :

1) Cas des singularités isolées [CGM]

Si S est une variété compacte, de dimension complexe s , admettant une singularité isolée en x , on a :

$$IH_i(S) = \begin{cases} H_i(S-\{x\}) & i < s \\ \text{Im}(H_i(S-\{x\}) \xrightarrow{i_*} H_i(S)) & i = s \\ H_i(S) & i > s \end{cases}$$

où, pour un espace localement compact, l'homologie est à supports compacts.

2) Factorisation de l'homomorphisme de Poincaré [GM]

L'homomorphisme de Poincaré $H^{2s-i}(S) \rightarrow H_i(S)$, cap-produit par la classe fondamentale de S , notée $[S]$, se factorise au travers

de l'homologie d'intersection

$$\begin{array}{ccc}
 H^{2s-i} & \xrightarrow{\quad} & H_i(S) \\
 & \searrow & \uparrow \varphi \\
 & & IH_i(S)
 \end{array}$$

où φ est induit par l'inclusion naturelle des chaînes.

II. Homologie d'intersection et espaces de Thom

Soit B une variété lisse compacte, de dimension complexe n , et $\pi : E \rightarrow B$ un fibré vectoriel réel orienté, de rang $2r$ sur B . L'espace de Thom S , associé à E , est une variété de dimension $2s = 2n+2r$, admettant un point singulier isolé $\{x\}$. On note $[S]$ la classe fondamentale de S dans $H_{2s}(S)$ et $e \in H^{2r}(B)$ la classe d'Euler du fibré E .

Proposition. On a, pour $i \neq 0$ et $i \neq 2s$, un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 H^{2s-i}(S) & \xrightarrow{\cap [S]} & H_i(S) \\
 \downarrow & \nearrow i_* & \downarrow \\
 H_i(S-\{x\}) & & H_i(E, E-B) \\
 \downarrow & \xrightarrow{j_*} & \downarrow \text{Thom} \\
 H_i(E) & & H_{i-2r}(B) \\
 \downarrow \pi_* & \xrightarrow{\cap e} & \downarrow \\
 H_i(B) & &
 \end{array}$$

où $i : S-\{x\} \rightarrow S$ et $j : (E, \Phi) \rightarrow (E, E-B)$ sont les inclusions canoniques et $\pi : E \rightarrow B$ la projection du fibré.

Démonstration. Les flèches verticales sont des isomorphismes et commutent avec les flèches horizontales. En particulier, le carré inférieur commute par définition de la classe d'Euler et par factoriabilité du cap-produit.

Proposition. Soit S espace de Thom associé au fibré E , de rang $2r$ sur B , alors on a :

$$IH_i(S) = \begin{cases} H_i(B) & i < s \\ \text{Im}(H_i(B)) \xrightarrow{\cap e} H_{i-2r}(B) & i = s \\ H_{i-2r}(B) & i > s \end{cases}$$

Démonstration : évidente, à partir des résultats précédents.

Pour un espace de Thom, l'homomorphisme de Poincaré s'identifie donc à l'homomorphisme :

$$H_i(B) \xrightarrow{\cap e} H_{i-2r}(B)$$

et, suivant les valeurs de i , $IH_i(S)$ en est la source, l'image ou le but.

III. Exemples de Verdier et de Goresky

1. Description

Dans ces deux exemples, l'espace B est une surface complexe projective lisse, $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ et \mathbb{P}^2 respectivement. Le fibré E sur B considéré est un fibré en droites, de bidegré $(1,1)$ (resp. $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)$). L'espace de Thom S associé à E est construit de la façon suivante. On considère le complété projectif X de l'espace total de E , i.e. $\mathbb{P}(E \oplus 1)$, qui est muni de deux sections de la projection canonique $\pi : X \rightarrow B$, appelées sections zéro et infinie, avec images B_0 et B_∞ dans X , et on contracte B_∞ en un point. La variété de dimension complexe trois ainsi obtenue est S ; elle a un point singulier isolé. Pour vérifier que la contraction utilisée est algébrique, on peut décrire cette construction d'une autre façon, en construisant d'abord S et en obtenant X comme une désingularisation de S :

On considère B plongé dans un espace projectif \mathbb{P}^n de sorte que la restriction à B du fibré en droites canoniques de \mathbb{P}^n soit isomorphe à E (quadrique dans \mathbb{P}^3 obtenue par le plongement de Segre de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, et surface quartique dans \mathbb{P}^5 obtenue par le plongement de Veronese de degré 2 de \mathbb{P}^2 , respectivement). Ensuite,

on considère \mathbb{P}^n plongé dans \mathbb{P}^{n+1} comme un hyperplan H , et on choisit un point p de \mathbb{P}^{n+1} en dehors de H . Alors S est le cône sur B de sommet p , et X est l'éclaté de S de centre p , car $S - \{p\}$ est isomorphe à l'espace total du fibré E et par suite X est isomorphe au complété projectif de E . On vérifie donc que X est lisse et le morphisme birationnel $\sigma : X \rightarrow S$ une désingularisation de S .

La fibre exceptionnelle sur p est isomorphe à la base B du cône S .

2. Homologie d'intersections et classes de Chern

Dans les deux exemples on a $\dim_{\mathbb{C}} S = 3$. Pour $i > 3$ on a donc $IH_i(S) = H_i(S)$ et φ est un isomorphisme. Un cas intéressant au regard de ces exemples est le cas $i = 2$, pour lequel on a :

$$\begin{array}{ccc} H^4(S) & \xrightarrow{\cap [S]} & H_2(S) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ IH_2(S) \cong H_2(B) & \xrightarrow[\varphi]{\cap e} & H_0(B) \end{array}$$

La classe d'Euler e , i.e. $c_1(E)$, est représentée par une section hyperplane de B plongée dans \mathbb{P}^n . Dans le premier exemple, on prend comme base de $H_2(B) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ deux droites d_1, d_2 appartenant aux deux systèmes de génératrices de la quadrique, respectivement le morphisme φ envoie d_1 et d_2 sur le générateur canonique de $H_0(B)$.

En fait, on peut réaliser $IH_*(S)$ de deux façons comme l'homologie d'une désingularisation de S :

Soit D_1 (resp. D_2) le plan dans $S \subset \mathbb{P}^4$ qui porte la droite d_1 (resp. d_2) et le point p ; c'est un diviseur de Cartier de S en tout point sauf en p . L'éclaté X_1 (resp. X_2) de S de centre D_1 (resp. D_2) est une variété lisse, désingularisation $\sigma_1 : X_1 \rightarrow S$ (resp. $\sigma_2 : X_2 \rightarrow S$) de S dont la fibre exceptionnelle est isomorphe à \mathbb{P}^1 .

La désingularisation $\sigma : X \rightarrow S$ se factorise par chaque

$\sigma_i : X_i \rightarrow S$, car on obtient X_i en contractant, dans X , le système de génératrices de $\sigma^{-1}(p)$ qui ne contient pas d_i , $i = 1, 2$. On a des morphismes canoniques formant un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 H_*(X_1) & \xrightarrow{\cong} & IH_*(S) & \xrightarrow{\cong} & H_*(X_2) \\
 & \searrow \sigma_{1*} & \downarrow & \swarrow \sigma_{2*} & \\
 & & H_*(S) & &
 \end{array}$$

Dans le deuxième exemple, on a $H_2(B) \cong \mathbf{Z}$ (resp. $H_0(B) \cong \mathbf{Z}$) avec générateur une droite (resp. un point) de $\mathbb{P}^2 \cong B$ et le morphisme φ est la multiplication par 2.

Pour calculer les classes de Chern de S , on calcule d'abord les classes de Chern du désingularisé X (en homologie), et ensuite on applique la naturalité des classes de Chern pour le morphisme de désingularisation $\sigma : X \rightarrow S$.

On rappelle qu'on a une projection canonique $\pi : X \rightarrow B$.

En regardant le fibré π^*E sur X comme le fibré tangent le long des fibres de π (car $X = \mathbb{P}(E \oplus 1)$), on a la suite exacte suivante :

$$0 \rightarrow \pi^*E \rightarrow T_X \rightarrow \pi^*T_B \rightarrow 0,$$

où T_X (resp. T_B) est le fibré tangent de X (resp. de B). On a donc l'égalité dans $H^*(X)$:

$$(i) \quad c(T_X) = c(\pi^*E) \cdot c(\pi^*T_B)$$

où $c(\)$ dénote la classe de Chern totale du fibré considéré. Par ailleurs on a, en identifiant fibrés en droites et faisceaux inversibles,

$$(ii) \quad \pi^*E \cong \mathcal{O}_X(B_0 + B_\infty)$$

car on peut aussi regarder π^*E comme le fibré normal à $B_0 + B_\infty$; et

$$(iii) \quad c(\pi^*T_B) = \pi^*c(T_B).$$

Les relations (i), (ii) et (iii) donnent un moyen de calculer $c(T_X)$,

d'où on obtient $c(X) = c(T_X) \cap [X]$ (avec $[X]$ la classe fondamentale de X).

En particulier, dans le deuxième exemple, où $B \cong \mathbb{P}^2$, on a

$$1_S = \sigma_*(1_X) - 2 1_p$$

car la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(\mathbb{P}^2) = 3$, et par suite

$$c(S) = c_*(1_S) = c_*(\sigma_* 1_X) - 2p = \sigma_*(c(X)) - 2p.$$

En calculant $c_2(S) \in H_2(S)$, on obtient

$$c_2(S) = 9 \sigma_*(\ell),$$

où ℓ est la classe dans $H_2(X)$ de la droite qui est fibre générique de la projection π , d'où $\sigma_*(\ell)$ est la classe dans $H_2(S)$ d'une génératrice du cône S .

On trouve donc que $c_2(S) \notin \varphi(IH_2(S))$, car on a

$$\varphi(IH_2(S)) = 2\mathbb{Z} \cdot \sigma_*(\ell).$$

IV. Quelques questions

Dans les deux exemples, l'application canonique $\varphi : IH_*(S) \rightarrow H_*(S)$ est de rang maximum (et même surjective, dans le premier). Est-ce toujours le cas pour les variétés algébriques complexes ? Si la réponse est négative, on peut finalement se demander si la classe de Chern appartient toujours à l'image de l'homologie d'intersection dans l'homologie à coefficients rationnels.

Références

- [CGM] J. CHEEGER, M. GORESKY, R. MAC PHERSON : The L^2 -cohomology and intersection homology of singular algebraic varieties, Seminar on Differential Geometry, Princeton University Press, 1982.
- [GM] M. GORESKY, R. MAC PHERSON : Intersection homology theory, Topology, 19, (1980), p. 135-162.

[M] R. MAC PHERSON : Chern classes for singular varieties,
Ann. of Math., 100, (1974), p. 423-432.

J.P. Brasselet
Université de Lille I
U.E.R. de Mathématiques
Pures et Appliquées
E.R.A. 590

G. Gonzalez-Sprinberg
Faculté des Sciences de Tours
Département de Mathématiques
et Informatique Scientifique
et

Ecole Normale Supérieure
Centre de Mathématiques
E.R.A. 589