

ESPACES DE THOM ET CONTRE-EXEMPLE DE

J.L. VERDIER ET M. GORESKY

par

J.P. BRASSELET et G. GONZALEZ-SPRINBERG

§.1. Rappels : Classes de Chern. Homologie d'une intersection.

1. Classes de Chern.

Les classes de Chern définies par M.H. Schwartz [8], à l'aide de la théorie d'obstruction, et R. Mac-Pherson [6], par des méthodes de géométrie algébrique, généralisent les classes, définies classiquement pour les variétés analytiques complexes, au cas des variétés algébriques complexes singulières.

Définition : Un ensemble constructible d'une variété algébrique X est obtenu, à partir des sous-variétés de X , par un nombre fini de réunions, intersections et complémentaires.

Définition : Une fonction constructible α , définie sur X , est une fonction à valeurs dans \mathbb{Z} , telle qu'il existe une partition de X en ensembles constructibles sur chacun desquels α est constante.

Proposition [6] : Il existe un unique foncteur \mathbb{F} des variétés algébriques complexes dans les groupes abéliens, tel que :

(i) $\mathbb{F}(X)$ est le groupe des fonctions constructibles sur X .

(ii) Pour tout morphisme $f : X \rightarrow Y$, on a :

$$(1) \quad f_* (1_W) (y) = \chi(f^{-1}(y) \cap W) \quad \forall y \in Y$$

où 1_W est la fonction caractéristique de $W \subset X$ et où χ désigne la

caractéristique d'Euler-Poincaré topologique.

Théorème [6], [3]. Il existe une transformation naturelle c_* du foncteur \mathbb{F} dans l'homologie, telle que, si X est sans singularité, on ait :

$$(2) \quad c_*(1_X) = c^*(X) \cap [X]$$

où $c^*(X)$ désigne la classe de Chern cohomologique de X et $[X]$ la classe fondamentale d'homologie de X .

La formule (2) exprime le fait que la classe de Chern de la fonction constructible 1_X , que l'on notera $c_*(X)$, est l'image de la classe de Chern du fibré tangent à X , par l'isomorphisme de Poincaré.

De manière plus précise, le théorème signifie que l'on fait correspondre, à toute fonction constructible α sur une variété complexe X , un élément $c_*(\alpha)$ de $H_*(X)$ tel que :

- (i) $f_* c_*(\alpha) = c_*(f_* \alpha)$ pour tout morphisme $f : X \rightarrow Y$
- (ii) $c_*(\alpha + \beta) = c_*(\alpha) + c_*(\beta)$ pour toutes fonctions constructibles α et β sur X
- (iii) $c_*(1_X) = c^*(X) \cap [X]$ si X est lisse.

2. Homologie d'intersection.

Dans ce paragraphe, les espaces et sous-espaces considérés sont des espaces P.L. ("linéaires par morceaux").

Définition : Une pseudovariété S , de dimension réelle $2s$, est un espace pour lequel existe un sous-espace fermé Σ tel que :

- (i) $S - \Sigma$ est une variété lisse, de dimension $2s$, orientée, dense dans S ,
- (ii) $\dim \Sigma \leq 2s - 2$.

La dimension de Σ est ici entendue comme maximum de la dimension en chacun de ses points.

Remarque. Si S est munie d'une triangulation localement finie, il est équivalent de dire que S est l'adhérence de ses $2s$ -simplexes et tout $(2s-1)$ -simplexe est face d'exactly deux $2s$ -simplexes.

Définition [1]. On dit que la pseudovariété S admet une stratification en strates de dimensions paires, s'il existe une filtration

$$S = S_{2s} \supset S_{2s-2} \supset S_{2s-4} \supset \dots \supset S_2 \supset S_0 \supset \emptyset$$

par des sous-espaces fermés, telle que :

(i) chaque $S_i - S_{i-2}$ est réunion finie de variétés lisses de dimension i , appelées strates,

(ii) $\Sigma = S_{2s-2}$ est l'ensemble singulier de S

(iii) tout point x de $S_i - S_{i-2}$ admet un voisinage U homéomorphe à $B^i \times \overset{\circ}{c}(L_x)$ où

B^i est une i -boule ouverte

L_x est une pseudovariété compacte de dimension $2s-i-1$

$\overset{\circ}{c}$ désigne le cône ouvert (moins la base) sur L_x , et l'homéomorphisme envoie strate sur strate.

Les variétés algébriques complexes sont des pseudovariétés admettant une stratification en strates de dimensions paires.

Si (K) désigne une triangulation (localement finie) de S , le complexe des chaînes simpliciales (à support compact) de S , relativement à la triangulation (K) , est noté $C_*^{(K)}(S)$. Le groupe des i -chaînes P.L. de S , $C_i(S)$, est défini comme la limite directe des $C_i^{(K)}(S)$ pour toutes les triangulations de S . On peut encore le définir comme la réunion des groupes

$C_i^{(K)}(S)$, pour toutes les triangulations de S , modulo l'identification de deux chaînes ξ_1 de (K_1) et ξ_2 de (K_2) lorsque, pour une sous-triangulation commune (K') , leurs images canoniques dans $C_i^{(K')}(S)$ coïncident.

Pour une chaîne ξ de $C_i(S)$, le support $|\xi|$ de ξ est défini comme la réunion des adhérences des i -simplexes σ dont le coefficient dans ξ est non nul.

Définition. On dit qu'une i -chaîne ξ de $C_*(S)$ est permise si, pour tout k , $k \neq 0$, on a :

$$(4) \quad \dim(|\xi| \cap S_{2s-2k}) \leq i-k-1$$

Définition [4]. Le groupe des i -chaînes simpliciales d'intersection, $IC_i(S)$ est le sous-groupe de $C_i(S)$ formé des chaînes ξ telles que ξ et $\partial\xi$ soient permises. Les groupes d'homologie d'intersection $IH_*(S)$ sont ceux du complexe $IC_*(S)$.

Nous rappelons ci-dessous quelques propriétés des groupes d'homologie d'intersection :

a) Cas des singularités isolées [1],[2] :

Si S est une pseudovariété compacte, admettant une singularité isolée en p , $S - \{p\}$ est une variété lisse de dimension $2s$. Dans ce cas, il n'y a plus qu'une seule condition (4) :

$$\dim(|\xi| \cap \{p\}) \leq i-s-1$$

Autrement dit, les chaînes qui ne rencontrent pas le point p sont permises et une i -chaîne qui contient p est permise si et seulement si $i \geq s+1$. D'où :

Proposition : On a :

$$(5) \quad \mathbb{H}_i(S) = \begin{cases} H_i(S - \{p\}) & i < s \\ \text{Im}(H_i(S - \{p\}) \rightarrow H_i(S)) & i = s \\ H_i(S) & i > s \end{cases}$$

où, pour l'espace localement compact $S - \{p\}$, l'homologie est à supports compacts.

b) Factorisation de l'homomorphisme de Poincaré [4], [2] :

Si S est une pseudovariété de dimension $2s$, le cycle fondamental de S peut être défini comme somme des simplexes (orientés) de dimension $2s$, d'une triangulation de S . Sa classe, $[S]$, dans $H_{2s}(S)$ est la classe fondamentale de S .

Proposition. L'homomorphisme de Poincaré, $P : H^{2s-i}(S) \rightarrow H_i(S)$, cap-produit par la classe fondamentale $[S]$, se factorise en :

$$\begin{array}{ccc} H^{2s-i}(S) & \xrightarrow{\cdot \cap [S]} & H_i(S) \\ & \searrow \beta & \nearrow \alpha \\ & & \mathbb{H}_i(S) \end{array}$$

où α est induit par l'inclusion des chaînes $IC_i(S) \hookrightarrow C_i(S)$, et où β est induit par P ([2], [4]).

3. Position du problème.

Pour une variété algébrique complexe S , les classes de Chern de S sont dans l'homologie $H_*(S)$. Si S est lisse, ce sont les images par isomorphisme de Poincaré des classes de Chern cohomologiques $c^*(S)$. Sinon, les classes de Chern ne sont pas nécessairement dans l'image de l'homomorphisme de Poincaré.

J.L. Verdier a construit un exemple dans lequel le morphisme canonique $\alpha : IH_*(S) \rightarrow H_*(S)$ n'étant pas injectif, les classes de Chern de S peuvent être réalisées de plusieurs manières comme images des classes de Chern de variétés lisses. Une variation de ce type d'exemple, faite par M. Goresky, montre que les classes de Chern ne sont pas toujours dans l'image de α . Dans ces deux exemples, S est un espace de Thom sur une variété lisse B .

§.2. Espaces de Thom et homomorphisme de Poincaré.

1. Espaces de Thom.

Soit B une variété lisse compacte, de dimension réelle $2n$ et E fibré vectoriel réel orienté, de rang r (pair) sur B . L'espace de Thom S , associé à E , est défini comme le compactifié d'Alexandroff de E , par adjonction d'un point à l'infini $\{p\}$. On peut aussi le définir comme suit :

Pour une métrique euclidienne sur E , notons $T(E)$ (resp. $S(E)$) le fibré en boules fermées (resp. en sphères) associé à E . L'espace de Thom est défini par le quotient $T(E)/S(E)$.

L'espace de Thom associé à E est une pseudovariété de dimension $2s = 2n+r$ admettant un point singulier isolé $\{p\}$.

On rappelle (par exemple [7], lemme 18.1) que, si la variété B est munie d'une décomposition cellulaire, l'espace de Thom S est également muni d'une décomposition cellulaire, admettant une $(i+r)$ -cellule, pour toute i -cellule de B , et une 0-cellule : le point $\{p\}$.

Notons $[S]$ la classe fondamentale de S , dans $H_{2s}(S)$, et $e \in H^r(B)$ la classe d'Euler du fibré E (par exemple [7]). Soit $u \in H^r(E, E-B)$ la classe de Thom du fibré E , si $\pi : E \rightarrow B$ désigne la projection du fibré et $j : (E, \phi) \rightarrow (E, E-B)$ l'inclusion naturelle, on a :

$$\pi^*(e) = j^*(u)$$

où :

$$H^r(E, E-B) \xrightarrow{j_*} H^r(E) \xleftarrow[\pi_*]{\cong} H^r(B)$$

Proposition. On a, pour tout i , ($i \neq 0, 2s$), un diagramme commutatif

$$(7) \quad \begin{array}{ccc} H^{2s-i}(S) & \xrightarrow{\cdot \cap [S]} & H_i(S) \\ \cong \downarrow & & \cong \downarrow \\ H_i(E) & & H_{i-r}(E) \\ \cong \downarrow & & \cong \downarrow \\ H_i(B) & \xrightarrow{\cdot \cap e} & H_{i-r}(B) \end{array}$$

Démonstration : Ceci résulte du diagramme suivant, dans lequel ①, ② et ③ commutent :

$$(8) \quad \begin{array}{ccc} H^{2s-i}(S) & \xrightarrow{\cdot \cap [S]} & H_i(S) \\ \cong \downarrow & \nearrow i_* & \cong \downarrow \\ H_c^{2s-i}(S-\{p\}) & & H_i(S, \{p\}) \\ \text{Poincaré} \cong \downarrow & & \cong \downarrow r_* \\ H_i(S-\{p\}) & & H_i(S, S-B) \\ \cong \downarrow & & \cong \downarrow \\ H_i(E) & \xrightarrow{j_*} & H_i(E, E-B) \\ \cong \downarrow \pi_* & & \cong \downarrow u \cap \cdot \\ H_i(B) & \xrightarrow{\cdot \cap e} & H_{i-r}(E) \\ & & \cong \downarrow \pi_* \\ & & H_{i-r}(B) \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{①} \\ \text{②} \\ \text{③} \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \text{Thom} \end{array}$$

Dans ① figurent l'isomorphisme canonique entre la cohomologie de S et la cohomologie à supports compacts de $S - \{p\}$. Ce dernier étant une variété lisse, l'homomorphisme de Poincaré, cap-produit par la classe fondamentale de $S - \{p\}$ est un isomorphisme

$$H_c^{2s-i}(S - \{p\}) \longrightarrow H_i(S - \{p\}).$$

Dans ② la rétraction $r : S - B \rightarrow \{p\}$ et l'excision déterminent des isomorphismes commutant avec les injections canoniques :

$$i : S - \{p\} \hookrightarrow S \quad \text{et} \quad j : (E, \phi) \hookrightarrow (E, E-B).$$

Enfin, ③ commute par définition de la classe d'Euler et par functorialité du cap-produit. La projection $\pi : E \rightarrow B$, du fibré E , induit un isomorphisme en homologie.

2. Homologie d'intersection des espaces de Thom.

Proposition. Soit B une variété lisse, compacte, de dimension (réelle) $2n$, et S l'espace de Thom associé à un fibré vectoriel orienté, de rang r et de base B . Alors on a :

$$IH_i(S) = \begin{cases} H_i(B) & i < s \\ \text{Im}(H_i(B) \xrightarrow{\cdot \cap e} H_{i-r}(B)) & i = s \\ H_{i-r}(B) & i > s \end{cases}$$

Démonstration : Ceci résulte de (5) et de la considération des isomorphismes du diagramme (8).

Pour un espace de Thom, l'homomorphisme de Poincaré se transforme donc, à isomorphisme près, en l'homomorphisme

$$\psi : H_i(B) \xrightarrow{\cdot \cap e} H_{i-r}(B)$$

et l'homologie d'intersection $IH_i(S)$ est isomorphe à $H_i(B)$, $\text{Im } \psi$ ou $H_{i-r}(B)$ selon les valeurs de i .

3. Cas particulier des espaces de Thom associés à un plongement $B \hookrightarrow \mathbb{P}^k$.

Soit \mathbb{P}^k l'espace projectif complexe de dimension (complexe) k , et H un hyperplan de \mathbb{P}^k . Il lui correspond, d'une part une classe fondamentale $[H] \in H_{2k-2}(\mathbb{P}^k)$ et une classe de cohomologie $\eta_H \in H^2(\mathbb{P}^k)$, duale de $[H]$ par dualité de Poincaré, d'autre part un fibré E_H de rang (complexe) un sur \mathbb{P}^k . Ce fibré, canoniquement associé au diviseur H de \mathbb{P}^k est appelé "fibré hyperplan", sa classe d'Euler est égale à $c^1(E_H) = \eta_H$ et engendre $H^2(\mathbb{P}^k; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

Si $B \subset \mathbb{P}^k$ est une sous-variété lisse de dimension (réelle) $2n$, la section hyperplan générique $D = B \cap H$ est un diviseur de B . On note $[D]$ sa classe fondamentale dans $H_{2n-2}(B)$ et, par dualité de Poincaré, η_D sa classe de cohomologie dans $H^2(B)$. Le fibré E_D , de base B , associé au diviseur D de B est, par functorialité, restriction à B du fibré hyperplan E_H . Sa classe d'Euler est égale à $c^1(E_D) = \eta_D$.

L'espace de Thom S associé au fibré $E = E_D$ s'interprète de deux façons :

a) Notons 1 le fibré trivial de rang (complexe) un, de base B , et $X = \mathbb{P}(E \oplus 1)$ le complété projectif de l'espace total de E .

$$\mathbb{P}(E \oplus 1) = \bigcup_{b \in B} \mathbb{P}(E_b \oplus 1_b)$$

E s'identifie à un ouvert de X , de complémentaire $\mathbb{P}(E)$, au moyen des inclusions :

$$E_b \hookrightarrow \mathbb{P}(E_b \oplus 1_b)$$

$$a \rightsquigarrow \overline{(a, 1)}$$

$$\mathbb{P}(E_b) \hookrightarrow \mathbb{P}(E_b \oplus 1_b)$$

$$\bar{a} \rightsquigarrow \overline{(a, 0)}.$$

La projection canonique $\mathbb{P}(E \oplus 1) \rightarrow B$ est munie de deux sections s_0 et s_∞ définies par :

$$s_0(b) = \overline{(0, y)} \quad \text{où } y \in l_b \text{ est quelconque, non nul}$$

$$s_\infty(b) = \overline{(a, 0)} \quad \text{où } a \in E_b \text{ est quelconque, non nul.}$$

Les images en sont :

$$B_0 = \text{Im } s_0 \stackrel{\sim}{=} \mathbb{P}(1) \quad B_\infty = \text{Im } s_\infty \stackrel{\sim}{=} \mathbb{P}(E).$$

En contractant B_∞ en un point, on obtient une variété S de dimension (réelle) $2n+2$, admettant un point singulier isolé p . On vérifie qu'elle est homéomorphe à l'espace de Thom associé à E , en remarquant que :

$$S - \{p\} = \mathbb{P}(E \oplus 1) \setminus \mathbb{P}(E) \stackrel{\sim}{=} E.$$

On vérifie, d'autre part, que S est une variété algébrique, à l'aide de l'interprétation suivante :

b) on considère \mathbb{P}^k plongé dans \mathbb{P}^{k+1} comme un hyperplan, et on choisit un point p de \mathbb{P}^{k+1} situé en dehors de \mathbb{P}^k . On note S le cône sur $B \subset \mathbb{P}^k$, de sommet p et X l'éclaté de S de centre p .

$S - \{p\}$ est isomorphe à l'espace total du fibré E , on en déduit d'une part que S est homéomorphe à l'espace de Thom et, d'autre part, que X est homéomorphe à $\mathbb{P}(E \oplus 1)$. X est lisse et le morphisme birationnel $\sigma : X \rightarrow S$ est une désingularisation de S . La fibre exceptionnelle, c'est-à-dire le diviseur exceptionnel $\sigma^{-1}(p)$, est homéomorphe à $\mathbb{P}(E)$, base du cône S .

4. Deux exemples.

On étudie deux exemples de plongements $B \hookrightarrow \mathbb{P}^k$ pour lesquels le fibré E sur B est restriction du fibré hyperplan de \mathbb{P}^k . On va calculer la classe d'Euler de E et expliciter le morphisme $\alpha : \text{IH}_1(S) \rightarrow H_1(S)$.

Dans ces deux exemples, on aura $\dim_{\mathbb{C}} S = 3$ et $r = 2$. Pour $i > 3$, on a donc $IH_i(S) = H_i(S)$ et α est un isomorphisme. Un cas intéressant, au regard de ces exemples est le cas $i = 2$, pour lequel on a :

$$(10) \quad \begin{array}{ccc} H^4(S) & \xrightarrow{\cdot \cap [S]} & H_2(S) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ IH_2(S) \cong H_2(B) & \xrightarrow[\psi]{\cdot \cap e} & H_0(B) \end{array}$$

a) Considérons le plongement de Segre $f : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^3$ défini en coordonnées homogènes par :

$$f : \mathbb{P}_x^1 \times \mathbb{P}_y^1 \longrightarrow \mathbb{P}^3$$

$$(x_0 : x_1), (y_0 : y_1) \rightsquigarrow (x_0 y_0 : x_0 y_1 : x_1 y_0 : x_1 y_1)$$

f est un plongement de bidegré $(1,1)$ et l'image $f(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$ est une quadrique non dégénérée Q dans \mathbb{P}^3 . Les familles de génératrices de cette quadrique sont données :

d'une part, par $d_\beta = f(\mathbb{P}^1, \beta)$ où β décrit \mathbb{P}_y^1

d'autre part, par $d_\alpha = f(\alpha, \mathbb{P}^1)$ où α décrit \mathbb{P}_x^1 .

Le fibré E est la restriction à Q du fibré hyperplan de \mathbb{P}^3 . Si H est un hyperplan générique de \mathbb{P}^3 et d une génératrice de Q , on a $H \cap d = \{\text{point}\}$. Le fibré E restreint à chaque génératrice de Q est le fibré hyperplan de cette génératrice (identifiée à \mathbb{P}^1).

La classe d'Euler du fibré E , dans

$$H^2(\mathbb{P}_x^1 \times \mathbb{P}_y^1) = H^2(\mathbb{P}_x^1) \oplus H^2(\mathbb{P}_y^1) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

est donc égale à $c^1(E) = (\eta_x, \eta_y)$ où η_x et η_y sont les classes d'Euler des fibrés "hyperplans" E_x et E_y de \mathbb{P}_x^1 et \mathbb{P}_y^1 , et engendrent $H^2(\mathbb{P}_x^1) = \mathbb{Z}$

et $H^2(\mathbb{P}_y^1) = \mathbb{Z}$ respectivement. Si $[\mathbb{P}_x^1]$ et $[\mathbb{P}_y^1]$ sont les classes fondamentales de \mathbb{P}_x^1 et de \mathbb{P}_y^1 , générateurs de $H_2(\mathbb{P}_x^1)$ et $H_2(\mathbb{P}_y^1)$, on a :

$$\eta_x \cap [\mathbb{P}_x^1] = 1 \quad \eta_y \cap [\mathbb{P}_y^1] = 1.$$

Le morphisme $\psi : H_2(B) \rightarrow H_0(B)$ s'écrit donc :

$$\begin{array}{ccc} H_2(\mathbb{P}_x^1 \times \mathbb{P}_y^1) = H_2(\mathbb{P}_x^1) \oplus H_2(\mathbb{P}_y^1) & \xrightarrow{\cdot \cap e} & H_0(\mathbb{P}_x^1 \times \mathbb{P}_y^1) \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{Z} \end{array}$$

et, relativement aux générateurs précédents, on a $\psi(a,b) = a+b$.

Remarque. De façon plus générale, on peut considérer le plongement de Segre $f : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \hookrightarrow \mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1}$, de bidegré (1.1). On obtiendrait les mêmes résultats que ci-dessus.

b) Le plongement de Véronèse : $f : \mathbb{P}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^5$, de degré 2, est défini, en coordonnées homogènes, par :

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{P}^2 & \longrightarrow & \mathbb{P}^5 \\ (x_0 : x_1 : x_2) & \rightsquigarrow & (x_0^2 : x_0 x_1 : x_0 x_2 : x_1^2 : x_1 x_2 : x_2^2). \end{array}$$

L'image $f(\mathbb{P}^2)$ est une variété lisse V de degré 4, appelée surface de Véronèse. Si H est un hyperplan de \mathbb{P}^5 , la section hyperplane générique $H \cap V$ est un diviseur de $V \cong \mathbb{P}^2$, homologue à $2K$ où K désigne un hyperplan de \mathbb{P}^2 .

La restriction du fibré hyperplan de \mathbb{P}^5 à V est le fibré en droites (complexes) E sur V , associé au diviseur $2K$ de V . Sa classe d'Euler est égale à $c^1(E) = 2\eta_K$ où $\eta_K = c^1(E_K)$ est la classe d'Euler de fibré hyperplan de \mathbb{P}^2 . Celle-ci engendre $H^2(\mathbb{P}^2) = \mathbb{Z}$ et, si $[K]$ désigne la classe fondamentale de K , générateur de $H_2(\mathbb{P}^2) = \mathbb{Z}$, on a $\eta_K \cap [K] = 1$.

Le morphisme $\psi : H_2(B) \rightarrow H_0(B)$, cap-produit par la classe d'Euler de E s'écrit donc :

$$H_2(\mathbb{P}^2) = \mathbb{Z} \longrightarrow H_0(\mathbb{P}^2) = \mathbb{Z}$$

et relativement aux générateurs précédents, est la multiplication par 2.

Remarque. De façon plus générale, on peut définir le plongement de Véronèse de degré d , $f : \mathbb{P}^n \hookrightarrow \mathbb{P}^{\binom{n+d}{d}-1}$, en considérant tous les monômes de degré d en les coordonnées homogènes de \mathbb{P}^n . Dans ce cas, ψ devient la multiplication par d .

§.3. Homologie et homologie d'intersection de l'espace de Thom, par les deux exemples précédents.

Pour chacun des deux exemples, on explicite l'homologie de X et l'homologie et l'homologie d'intersection de S . On note toujours $\pi : X \rightarrow B$ la projection canonique de $X = \mathbb{P}(E \oplus 1)$ sur B , en tant que fibré, de fibre \mathbb{P}^1 . D'autre part, $\sigma : X \rightarrow S$ désigne la désingularisation de S , de fibre exceptionnelle $\sigma^{-1}(p) \simeq B$.

a) Cas du plongement de Segre : $f : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^3$.

Notons $d_\alpha = d_1$ et $d_\beta = d_2$ deux droites fixées appartenant chacune à un système de génératrices de la quadrique. Soit D_1 (resp. D_2) le plan dans $S \subset \mathbb{P}^4$ qui porte la droite d_1 (resp. d_2) et le point p . L'éclaté de S , de centre D_1 , est noté X_1 . C'est une variété lisse, désingularisation $\sigma_1 : X_1 \rightarrow S$, dont la fibre exceptionnelle $\sigma_1^{-1}(p)$ est isomorphe à \mathbb{P}^1 . On obtient de même la désingularisation $\sigma_2 : X \rightarrow S$ en éclatant D_2 . La désingularisation $\sigma : X \rightarrow S$ se factorise par chacune des $\sigma_j : X_j \rightarrow S$ car on obtient X_j en contractant, dans X , le système de générateurs de $\sigma^{-1}(p)$ qui ne contient pas d_j ($j = 1, 2$). On a, puisque σ_j est propre, des morphismes canoniques formant un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathrm{IH}_*(X_1) & \xrightarrow[\cong]{\hat{\sigma}_{1*}} & \mathrm{IH}_*(S) & \xleftarrow[\cong]{\hat{\sigma}_{2*}} & \mathrm{IH}_*(X_2) \\
 \downarrow \psi_1 \cong & & \downarrow \psi & & \downarrow \psi_2 \cong \\
 \mathrm{H}_*(X_1) & \xrightarrow{\sigma_{1*}} & \mathrm{H}_*(S) & \xleftarrow{\sigma_{2*}} & \mathrm{H}_*(X_2)
 \end{array}$$

dans lequel les ψ_j sont des isomorphismes, car les X_j sont lisses, et nous montrons (remarque ci-dessous) que les $\hat{\sigma}_{j*}$ sont des isomorphismes.

Le calcul des groupes d'homologie peut se faire en adoptant le point de vue combinatoire : on déduit aisément une décomposition cellulaire de X , à partir d'une décomposition cellulaire de $B = \mathbb{P}_x^1 \times \mathbb{P}_y^1$. Cependant, le point de vue algébrique sera mieux adapté quand il faudra calculer les classes de Chern de S . Dans toute la suite le symbole \cdot dénotera le dual du cup-produit dans X (variété lisse compacte), ou de manière équivalente, le produit d'intersection des cycles dans X .

Les générateurs des groupes d'homologie de X sont :

dans $H_6(X)$: $[X]$ classe fondamentale de X

dans $H_4(X)$: b_0 et b_∞ , classes fondamentales de B_0 et B_∞ respectivement et p_1 et p_2 , classes fondamentales de $\pi^{-1}(d_1)$ et $\pi^{-1}(d_2)$.

dans $H_2(X)$: $d_j = p_j \cdot b_0 \quad j = 1, 2$
 $\delta_j = p_j \cdot b_\infty \quad j = 1, 2$

ℓ , classe fondamentale de $\pi^{-1}(b)$ où b est un point de B

dans $H_0(X)$: a classe d'un point de X .

La table d'intersection de ces générateurs s'obtient à partir de la remarque suivante : Soit π^*E le fibré de base X , image réciproque de E par $\pi : X \rightarrow B$. Le fibré normal de B_0 (resp. B_∞) dans X est isomorphe à la

$$\begin{aligned} k_1 a &= b_0 \cdot k_1 = b_0 \cdot (d_1 - \delta_1) = b_0 \cdot d_1 = b_0 \cdot b_0 \cdot p_1 \\ &= (d_1 + d_2) \cdot p_1 = d_1 \cdot p_1 = a. \end{aligned}$$

d'où $k_1 = 1$. On obtient de même $k_2 = 1$.

$H_2(X)$ est donc isomorphe à \mathbb{Z}^3 avec, pour générateurs d_1, d_2 et ℓ .

On a :

$$d_1 - \delta_1 = \ell \qquad d_2 - \delta_2 = \ell$$

Pour $j = 4$, on a la suite exacte :

$$0 \rightarrow H_2(B) \xrightarrow{\psi} H_4(X) \xrightarrow{\pi_*} H_4(B) \rightarrow 0$$

et $\pi_*(b_0) = \pi_*(b_\infty)$, $\pi_*(p_1) = \pi_*(p_2) = 0$ d'où $b_0 - b_\infty \in \text{Ker } \pi_*$ et $\text{Ker } \pi_*$ est engendré par $p_1 = \psi(d_1)$ et $p_2 = \psi(d_2)$. Pour déterminer les entiers n_1 et n_2 tels que $b_0 - b_\infty = n_1 p_1 + n_2 p_2$, on peut écrire (par exemple) :

$$\begin{aligned} n_1 \ell &= (n_1 p_1 + n_2 p_2) \cdot p_2 = (b_0 - b_\infty) \cdot p_2 = d_2 - \delta_2 = \ell \\ n_2 \ell &= (n_1 p_1 + n_2 p_2) \cdot p_1 = (b_0 - b_\infty) \cdot p_1 = d_1 - \delta_1 = \ell \end{aligned}$$

d'où $n_1 = n_2 = 1$.

Il vient $H_4(X) = \mathbb{Z}^3$, avec pour générateurs b_∞, p_1 et p_2 . On a :

$$b_0 - b_\infty = p_1 + p_2.$$

Homologie de X_1 et X_2 .

Notons $\tau_1 : X \rightarrow X_1$ le morphisme de contraction de système δ_2 dans B_∞ , de même $\tau_2 : X \rightarrow X_2$ le morphisme de contraction du système δ_1 dans B_∞ . Pour tout $\xi \in H_i(X)$, on notera $\xi' = \tau_{1*}(\xi)$ et $\xi'' = \tau_{2*}(\xi)$ ses images respectives dans $H_i(X_1)$ et $H_i(X_2)$. Ainsi, on a $\delta_2' = 0$ dans $H_2(X_1)$ et

$\delta_1'' = 0$ dans $H_2(X_2)$. D'où :

$$(13)_1 \quad d_1' - d_2' = \delta_1'$$

$$(13)_2 \quad d_2'' - d_1'' = \delta_2''$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} H_0(X_1) &= \mathbb{Z} \text{ engendré par } a' \\ H_2(X_1) &= \mathbb{Z}^2 \text{ engendré par } d_1', d_2' = \ell \quad (d_1' - \delta_1' = \ell') \\ H_4(X_1) &= \mathbb{Z}^2 \text{ engendré par } p_1', p_2' \quad (b_0' = p_1' + p_2') \\ H_6(X_1) &= \mathbb{Z} \text{ engendré par } [X_1] \end{aligned}$$

On obtient de même l'homologie de X_2 .

Homologie de S.

Pour tout $\xi \in H_i(X)$, on notera $\tilde{\xi}$ son image dans $H_i(S)$. Ainsi, par contraction de B_∞ , on obtient l'homologie de S à partir de celle de X, avec les relations $\tilde{\delta}_1 = \tilde{\delta}_2 = 0$ et $\tilde{b}_\infty = 0$. Il vient :

$$\begin{aligned} H_0(S) &= \mathbb{Z} \text{ engendré par } \tilde{a} \\ H_2(S) &= \mathbb{Z} \text{ engendré par } \tilde{d}_1 = \tilde{d}_2 = \tilde{\ell} \\ H_4(S) &= \mathbb{Z}^2 \text{ engendré par } \tilde{p}_1, \tilde{p}_2 \quad (\tilde{b}_0 = \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2) \\ H_6(S) &= \mathbb{Z} \text{ engendré par } [S]. \end{aligned}$$

Homologie d'intersection de S.

On l'obtient en utilisant (9) et la remarque qui précède (5). Un i -cycle ξ de S est permis si :

$$\dim(|\xi| \cap \{p\}) \leq i-3-1 = i-4.$$

Pour $i \leq 4$, aucun i -cycle contenant le point $\{p\}$ n'est permis.

Il vient donc :

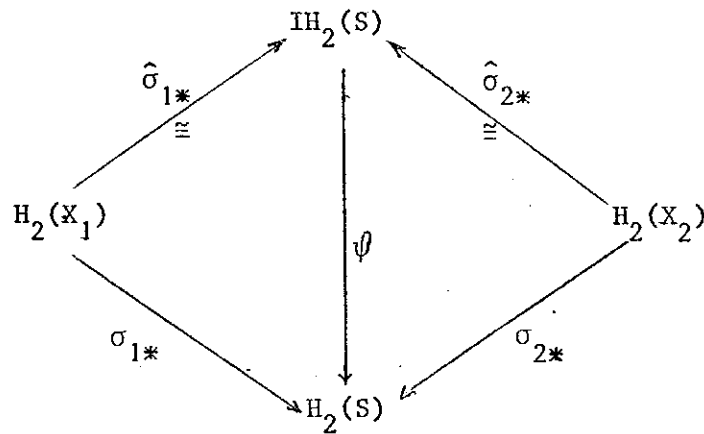
$$\begin{aligned} \text{IH}_0(S) = H_0(B) = \mathbb{Z} & \quad \text{engendré par } a \\ \text{IH}_2(S) = H_2(B) = \mathbb{Z}^2 & \quad \text{engendré par } \tilde{d}_1, \tilde{d}_2 \\ \text{IH}_4(S) = H_4(B) = \mathbb{Z}^2 & \quad \text{engendré par } \tilde{p}_1, \tilde{p}_2 \\ \text{IH}_6(S) = H_4(B) = \mathbb{Z} & \quad \text{engendré par } [S]. \end{aligned}$$

Remarques. 1) le cycle $\tilde{\ell}$ n'est pas un cycle permis

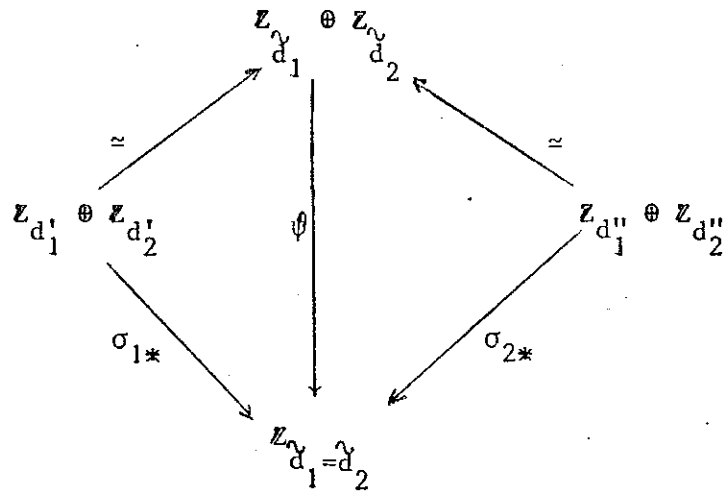
2) les isomorphismes $\hat{\sigma}_{1*} : \text{IH}_*(X_1) \rightarrow \text{IH}_*(S)$ et

$\hat{\sigma}_{2*} : \text{IH}_*(X_2) \rightarrow \text{IH}_*(S)$ sont évidents.

3) les morphismes du diagramme (11) s'expriment naturellement, en fonction des générateurs précédents. En particulier, pour $i = 2$, le diagramme



devient



b) Cas du plongement de Véronèse $f : \mathbb{P}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^5$

Les générateurs de l'homologie de X sont :

dans $H_6(X)$: $[X]$, classe fondamentale de X

dans $H_4(X)$: b_0 et b_∞ classes fondamentales de B_0 et B_∞ respectivement, et $\gamma = \pi^{-1}(d)$, où d est une droite projective de $B = \mathbb{P}^2$.

dans $H_2(X)$: $d_0 = \gamma \cdot b_0$, $d_\infty = \gamma \cdot b_\infty$ et ℓ , classe fondamentale de $\pi^{-1}(b)$ où b est un point de B .

dans $H_0(X)$: a , classe d'un point de X .

La table d'intersection de ces cycles est donnée par : D'une part $b_0 \cdot b_0 = 2d_0$. En effet, l'auto-intersection de B_0 dans X est la classe de Chern de son fibré normal.

D'autre part, $b_0 \cdot b_\infty = 0$, $d_0 \cdot \gamma = a$

$$\ell \cdot b_0 = \ell \cdot b_\infty = a, \quad d_0 \cdot b_\infty = 0$$

Les relations liant ces générateurs s'obtiennent encore à partir de la suite exacte de Gysin du fibré en sphères $\pi : X \rightarrow B$ (12).

Pour $i = 2$, on a la suite exacte courte :

$$0 \rightarrow H_0(B) \xrightarrow{\psi} H_2(X) \xrightarrow{\pi_*} H_2(B) \rightarrow 0$$

et :
$$\pi_*(d_0) = \pi_*(d_\infty), \quad \pi_*(\ell) = 0.$$

Il vient $d_0 - d_\infty \in \text{Ker } \pi_*$ et ℓ engendre $\text{Ker } \pi_*$, d'où $d_0 - d_\infty = k \cdot \ell$.
Pour déterminer k , on utilise la table d'intersection précédente :

$$\begin{aligned} k \cdot a &= k\ell \cdot b_0 = (d_0 - d_\infty) \cdot b_0 = d_0 \cdot b_0 = \gamma \cdot b_0 \cdot b_0 \\ &= \gamma \cdot 2d_0 = 2a. \end{aligned}$$

D'où $k = 2$, $H_2(X)$ est isomorphe à \mathbb{Z}^2 , avec pour générateurs d_0 et ℓ . On a :

$$d_0 - d_\infty = 2\ell.$$

Pour $i = 4$, on a la suite exacte courte :

$$0 \rightarrow H_2(B) \xrightarrow{\psi} H_4(X) \xrightarrow{\pi_*} H_4(B) \rightarrow 0$$

et
$$\pi_*(b_0) = \pi_*(b_\infty), \quad \pi_*(\gamma) = 0.$$

Il vient $b_0 - b_\infty \in \text{Ker } \pi_*$ et γ engendre $\text{Ker } \pi_*$, d'où $b_0 - b_\infty = n\gamma$.
La table d'intersection permet d'écrire :

$$n d_0 = n\gamma \cdot b_0 = (b_0 - b_\infty) \cdot b_0 = 2d_0,$$

or $d_0 \cdot \gamma = a$ d'où $n = 2$.

$H_4(X)$ est donc isomorphe à \mathbb{Z}^2 , avec pour générateurs b_0 et γ ,
on a :

$$b_0 - b_\infty = 2\gamma$$

Pour $i = 6$, $H_6(X) = \mathbb{Z}$ est engendré par $[X]$, classe fondamentale
de X .

Homologie de S.

Par contraction de B_∞ en un point, on obtient l'homologie de S, à partir de celle de X. On notera $\tilde{\xi}$ l'image dans $H_*(S)$ d'une classe ξ de $H_*(X)$. On a donc : $\tilde{d}_\infty = 0$, $\tilde{b}_\infty = 0$ et :

$$\begin{aligned} H_0(S) &= \mathbb{Z} && \text{engendré par } \tilde{a} \\ H_2(S) &= \mathbb{Z} && \text{engendré par } \tilde{\ell} \quad (\tilde{d}_0 = 2\tilde{\ell}) \\ H_4(S) &= \mathbb{Z} && \text{engendré par } \tilde{\gamma} \quad (\tilde{b}_0 = 2\tilde{\gamma}) \\ H_6(S) &= \mathbb{Z} && \text{engendré par } [S] \end{aligned}$$

Homologie d'intersection de S.

On l'obtient en utilisant (9) et en observant quels sont ceux, parmi les cycles de S, qui sont des cycles permis. Il vient :

$$\begin{aligned} IH_0(S) &= H_0(B) = \mathbb{Z} && \text{engendré par } \tilde{a} \\ IH_2(S) &= H_2(B) = \mathbb{Z} && \text{engendré par } \tilde{d}_0 \\ IH_4(S) &= H_2(B) = \mathbb{Z} && \text{engendré par } \tilde{\gamma} \\ IH_6(S) &= H_4(B) = \mathbb{Z} && \text{engendré par } [S] \end{aligned}$$

Remarques. 1) le cycle $\tilde{\ell}$ n'est pas un cycle permis

2) le morphisme $\alpha : IH_*(S) \rightarrow H_*(S)$ s'exprime naturellement en fonction des générateurs. On retrouve, pour $i = 2$, le fait que α soit la multiplication par 2. On a, en effet :

$$\begin{array}{ccc} \alpha : IH_2(S) & \longrightarrow & H_2(S) \\ \parallel & & \parallel \\ \mathbb{Z}_{\tilde{d}_0} & \longrightarrow & \mathbb{Z}_{\tilde{\ell}} \end{array}$$

et l'image de \tilde{d}_0 (élément de $IH_2(S)$), dans $H_2(S)$, est $\tilde{d}_0 = 2\tilde{\ell}$, où $\tilde{\ell}$ est générateur de $H_2(S)$.

§.4. Classes de Chern d'un espace de Thom sur une variété lisse B.

1. Classe de Chern de X.

On note toujours $\pi : X \rightarrow B$ la projection de X sur B ; soit T_X , resp. T_B , le fibré tangent à X , resp. B , et T_V le fibré tangent vertical défini par exactitude de la suite de fibrés de base X :

$$0 \rightarrow T_V \rightarrow T_X \rightarrow \pi^* T_B \rightarrow 0$$

On en déduit, dans $H^*(X)$:

$$(15) \quad c^*(T_X) = c^*(T_V) \cup c^*(\pi^* T_B).$$

D'autre part, les fibres de $\pi : X \rightarrow B$ sont des courbes rationnelles lisses, isomorphes à \mathbb{P}^1 . La restriction de T_V à chacune de ses fibres est un faisceau de degré 2. Par conséquent le faisceau des sections de T_V est le faisceau $\mathcal{O}_X(B_0 + B_\infty)$ canoniquement associé au diviseur $B_0 + B_\infty$ de X , et on a :

$$(16) \quad c^*(T_V) = c^*(\mathcal{O}_X(B_0 + B_\infty)) = 1 + \eta_{B_0} + \eta_{B_\infty}.$$

Par dualité de Poincaré, il vient :

$$c^*(T_V) \cap [X] = [X] + b_{0_*} + b_{\infty_*}.$$

En notant toujours $\psi : H_i(B) \rightarrow H_{i+2}(X)$ le morphisme précédemment décrit dans la suite de Gysin (12), on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^i(B) & \xrightarrow{\cdot \cap [B]} & H_{4-i}(B) \\ \pi^* \downarrow & & \downarrow \psi \\ H^i(X) & \xrightarrow{\cdot \cap [X]} & H_{6-i}(X) \end{array}$$

D'où, par dualité de Poincaré,

$$\begin{aligned} c^*(\pi^* T_B) \cap [X] &= \pi^*(c^* T_B) \cap [X] \\ &= \psi(c^*(T_B) \cap [B]) \\ &= \psi(c_*(T_B)). \end{aligned}$$

Des formules (15) et (16), on déduit donc :

$$(17) \quad \underline{c_*(X) = ([X] + b_0 + b_\infty) \cdot \psi(c_* B)}$$

où, pour tout cycle c de $H_*(B)$, $\psi(c)$ est la classe du cycle $\pi^{-1}(c)$ de $H_*(X)$.

2. Classes de Chern de S.

Le morphisme de désingularisation $\sigma : X \rightarrow S$ est un isomorphisme en dehors de la fibre exceptionnelle $\sigma^{-1}(p)$. Il vient, d'après (1) :

$$\sigma_*(1_X(s)) = 1 \text{ pour tout } s \text{ de } S, s \neq p$$

$$\sigma_*(1_X)(p) = \chi(\sigma^{-1}(p)) = \chi(B).$$

D'où :

$$\sigma_*(1_X) = 1_S + (\chi(B)-1) 1_{\{p\}}.$$

En utilisant les relations de (3), on a alors :

$$c_* \sigma_*(1_X) = \sigma_* c_*(1_X) = c_*(1_S) + (\chi(B)-1) c_*(1_{\{p\}})$$

et, puisque, par définition $c_*(1_M) = c_*(M)$, pour tout M , il vient :

$$(18) \quad c_*(S) = \sigma_* c_*(X) + (1-\chi(B))\{p\}.$$

Les relations (17) et (18) permettent de calculer les classes de Chern de S dans chacun des 2 cas particuliers étudiés.

3. Application aux deux exemples.

a) Cas du plongement de Segre. $f : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^3$.

La variété B est $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. On a :

$$c^*(\mathbb{P}^1) = 1 + 2\eta_H$$

d'où

$$c_*(B) = (b_0 + 2d_1) \cdot (b_0 + 2d_2) = b_0 + 2d_1 + 2d_2 + 4a$$

et

$$\psi c_*(B) = [X] + 2p_1 + 2p_2 + 4\ell.$$

(17) devient :

$$c_*(X) = ([X] + b_0 + b_\infty) \cdot ([X] + 2p_1 + 2p_2 + 4\ell)$$

$$(19) \quad c_*(X) = [X] + (2b_\infty + 3p_1 + 3p_2) + (4d_1 + 4d_2) + 8a$$

compte tenu des relations et des tables d'intersection précédentes.

De manière analogue à (18), on remarque qu'on a :

$$\tau_{1*}(1_X) = 1_{X_1} + 1_{\delta_2}$$

$$\tau_{2*}(1_X) = 1_{X_2} + 1_{\delta_1}$$

où $\tau_1 : X \rightarrow X_1$ (resp. $\tau_2 : X \rightarrow X_2$) est le morphisme de contraction du système δ_2 (resp. δ_1) dans B_∞ . Par suite, on a :

$$(20)_1 \quad c_*(X_1) = \tau_{1*}c_*(X) - c_*(\delta'_1)$$

$$(20)_2 \quad c_*(X_2) = \tau_{2*}c_*(X) - c_*(\delta''_1)$$

où $c_*(\delta'_1) = \delta'_1 + 2a'$ et $c_*(\delta''_1) = \delta''_1 + 2a''$ (classe de Chern de \mathbb{P}^1).

A l'aide de (19), (20)_j et (13)_j, on obtient :

$$c_{*}(X_1) = [X_1] + (3p'_1 + 3p'_2) + (3d'_1 + 5d'_2) + 6a'$$

$$c_{*}(X_2) = [X_2] + (3p''_1 + 3p''_2) + (5d''_1 + 3d''_2) + 6a''$$

Or, X_1 et X_2 sont isomorphes, et on a :

$$\hat{\sigma}_{2*}^{-1} \circ \hat{\sigma}_{1*}(d'_j) = d''_j \quad j = 1, 2$$

d'autre part, dans $H_2(S)$:

$$\tilde{\ell} = \sigma_{1*}(d'_j) = \sigma_{2*}(d''_j) \quad j = 1, 2$$

On en déduit le contre-exemple : la classe $c_2(S) = 8\tilde{\ell}$ est image par

$$\sigma_{j*} : H_2(X_j) \rightarrow H_2(S)$$

de $c_2(X_j)$, pour $j = 1, 2$, et donc image par α de deux classes distinctes de $\cdot IH_2(S)$, toutes deux classes de Chern de variétés lisses, désingularisations de S .

b) Cas du plongement de Véronèse $f : \mathbb{P}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^5$

La variété B est \mathbb{P}^2 , on a :

$$c^*(B) = 1 + 3\eta_H + 3\eta_H^2 \quad \text{où } H \text{ est un hyperplan de } \mathbb{P}^2$$

$$c_{*}(B) = b_o + 3d_o + 3a$$

d'où $\psi c_{*}(B) = [X] + 3\gamma + 3\ell$ et (17) s'écrit :

$$\begin{aligned} c_{*}(X) &= ([X] + b_o + b_{\infty}) \cdot ([X] + 3\gamma + 3\ell) = \\ &= [X] + (2b_{\infty} + 5\gamma) + (6d_{\infty} + 9\ell) + 6a \end{aligned}$$

En utilisant (18) et remarquant que $\sigma_{*}(b_{\infty}) = 0$, $\sigma_{*}(d_{\infty}) = 0$ et $\chi(B) = \chi(\mathbb{P}^2) = 3$, on obtient :

$$c_*(S) = [S] + 5\tilde{\gamma} + 9\tilde{\ell} + 4\tilde{a}$$

D'où, le contre-exemple : $c_*(S)$ n'appartient pas à l'image de α ,
dont les éléments ont des coefficients pairs (d'après le §.2, 4, (b))

J.P. BRASSELET
U.A. au C.N.R.S. 751
U.F.R. de Mathématiques
Université de Lille I
59655 - Villeneuve d'Ascq FRANCE

G. GONZALEZ-SPRINBERG
Département de Mathématiques
et Informatique Scientifique
Faculté des Sciences de Tours
et
U.A. au C.N.R.S. 762
Centre de Mathématiques
Ecole Normale Supérieure
Paris FRANCE

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. BOREL et al : Intersection cohomology, Progress in Mathematics, Vol. 50 (1984).
 - [2] J.P. BRASSELET : Homologie d'intersection : définitions singulière et simpliciale, Journées singulières 1984-85, Pub. Math. de l'Ecole Polytechnique, Avril 1986.
 - [3] G. GONZALEZ-SPRINBERG : L'obstruction d'Euler locale et le théorème de Mac-Pherson, Astérisque 82-83 (1981) pp. 7-32.
 - [4] M. GORESKY et R. MAC-PHERSON : Intersection homology theory, Topology 19 (1980) pp. 135-162.
 - [5] P. GRIFFITHS et J. HARRIS : Principles of algebraic geometry, J. Wiley and sons (1978).
 - [6] R. MAC PHERSON : Chern classes for singular algebraic varieties, Ann. of Maths, 100, n°2 (1974) pp. 423-432.
 - [7] J. MILNOR : Characteristic classes, Ann. of Math studies, n°76, (1974).
 - [8] M.H. SCHWARTZ : Classes caractéristiques définies par une stratification d'une variété analytique complexe, CRAS, t.260, (1965) pp. 3262-3264 et 3535-3537.
-