GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE. — *Sur la règle de McKay en caractéristique positive.* Note de **Gerardo Gonzalez-Sprinberg** et **Jean-Louis Verdier,** présentée par Jacques Tits.

Nous étudions la validité de la règle de McKay pour le produit de modules réflexifs sur les points doubles rationnels en caractéristique positive.

ALGEBRAIC GEOMETRY. — On McKay's rule in positive characteristic.

We study the validity of McKay's rule for the product of reflexive modules over the rational double points in positive characteristic.

INTRODUCTION. — Soit $O \in S$ un point double rationnel ([1], [8]), où S est le spectre d'un anneau local complet $\mathcal{O}_S$ de dimension 2 sur un corps k algébriquement clos, d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, tel que $\mathcal{O}_S/\mathfrak{m} \simeq k$. Si k est de caractéristique nulle un tel anneau est l'anneau des invariants d'un groupe fini $G \subset SL(2, k)$ qui opère linéairement sur $k[[x, y]]$ ([7], [5], [4]). En ce cas il existe une correspondance bijective (dite de McKay) entre les sommets du graphe de Dynkin complété $\Gamma(S)$ associé à S et les classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de G, ou encore les classes d'isomorphisme de $\mathcal{O}_S$-modules réflexifs (i. e. isomorphes à leurs biduaux) indécomposables sur $\mathcal{O}_S$ ([9], [6], [3]). Cette correspondance permet de reconstruire le graphe de Dynkin (i. e. les arêtes) en ce sens que le produit tensoriel par la représentation canonique $G \rightarrow SL(2, k)$ fournit un graphe isomorphe au graphe associé au point singulier ([9], [6]). Si k est un corps de caractéristique positive p la correspondance bijective entre sommets de $\Gamma(S)$ et $\mathcal{O}_S$-modules réflexifs indécomposables reste valable [3], mais on ne dispose plus, en général, du groupe G. Le candidat naturel à le remplacer, le groupe fondamental qui classifie les revêtements finis étalés de $S-O$, ne coïncide pas en général avec celui qu'on a en caractéristique nulle (si son ordre est divisible par p), et la classification des points doubles rationnels en caractéristique 2, 3 et 5 est plus compliquée [2]. On caractérise un $\mathcal{O}_S$-module réflexif Ω (unique à isomorphisme près) qui joue le rôle, en caractéristique positive, de la représentation canonique de G en caractéristique nulle. On démontre que, sauf cas exceptionnels que nous étudions, la correspondance de McKay préserve la structure multiplicative; dans les cas où cette structure est préservée, on peut donc, à partir de l'anneau $\mathcal{O}_S$, reconstruire l'anneau des représentations d'un groupe qui, lui, a pratiquement disparu. La plupart de ces résultats ont été obtenus en décembre 1984, et ont été présentés à la conférence de Géométrie algébrique à la Rabida (Espagne).

Les démonstrations seront publiées prochainement.

1. LE MODULE CANONIQUE Ω.

PROPOSITION-DÉFINITION (1.1). — (i) *On a* $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_S}(\mathfrak{m}, \mathcal{O}_S) \simeq k$; *par suite il existe un* $\mathcal{O}_S$-*module* Ω *de rang* 2, *unique à isomorphisme près, extension non triviale de* $\mathfrak{m}$ *par* $\mathcal{O}_S$:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow \Omega \rightarrow \mathfrak{m} \rightarrow 0.$$

(ii) *Soit* $\Omega^* = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\Omega, \mathcal{O}_S)$ *le dual de* Ω. *On a* $\Omega \simeq \Omega^*$, *donc* Ω *est réflexif.*

Soit $q : \tilde{S} \rightarrow S$ une désingularisation minimale de S, $\mathrm{Pic}(\tilde{S})$ le groupe de Picard de $\tilde{S}$, $\mathrm{Irr}\, D = \{ d_1, \ldots, d_n \}$ l'ensemble des classes, dans $\mathrm{Pic}(\tilde{S})$, des composantes irréductibles du diviseur exceptionnel $D = q^{-1}(O) \subset \tilde{S}$.

Notons $(\,.\,)$ la forme intersection dans $\mathrm{Pic}(\tilde{S})$, $\mathrm{Pic}_0(\tilde{S})$ le sous-groupe de $\mathrm{Pic}(\tilde{S})$ engendré par les diviseurs à support dans D, et $\{d_i^\vee, 1 \leqq i \leqq n\}$ la base de $\mathrm{Pic}(\tilde{S})$ qui s'identifie, par la matrice intersection, à la base duale de $\{d_i, 1 \leqq i \leqq n\}$ [1]; on a donc $(d_i \,.\, d_j^\vee) = \delta_{ij}$.

On note $\mathrm{Pic}^+(\tilde{S})$ [resp. $\mathrm{Pic}_0^+(\tilde{S})$] les éléments de $\mathrm{Pic}(\tilde{S})$ [resp. de $\mathrm{Pic}_0(\tilde{S})$] positifs par rapport à la base $\{d_i^\vee\}$ [resp. $\{d_i\}$]. La classe dans $\mathrm{Pic}(\tilde{S})$ du cycle fondamental est désignée par $\mathscr{Z}$, suivant la tradition [1]. Si M est un $\mathcal{O}_S$-module, son transformé strict sur $\tilde{S}$ est le $\mathcal{O}_{\tilde{S}}$-module $\tilde{M} := q^* M/T$, où T désigne la $\mathcal{O}_{\tilde{S}}$-torsion de $q^* M$, et on note $c_1(M)$ la première classe de Chern de $\tilde{M}$, qui appartient à $\mathrm{Pic}(\tilde{S})$.

Proposition (1.2). — (i) *Le module* Ω *ne possède pas de facteur libre.*

(ii) *On a* $c_1(\Omega) = -\mathscr{Z}$.

Remarque (1.3). — La proposition précédente montre que le module canonique Ω défini en (1.1) est isomorphe, en caractéristique nulle, au module réflexif associé à la représentation canonique du groupe G, car le caractère de Chern est le même pour les deux et ce dernier classifie les classes d'isomorphisme de $\mathcal{O}_S$-modules réflexifs (th. (2.2) de [6] et th. (1.11) de [3]). On a aussi $\Omega \simeq (\Omega_S^1)^{**}$ (i.e. le bidual du module des différentielles sur S); or en caractéristique 2, 3 ou 5 ce dernier isomorphisme n'est plus valable, car Ω_S^1 possède un facteur libre, ce qui n'est pas le cas pour Ω.

On dispose d'une autre caractéristique de Ω:

Proposition (1.4). — *Le module* Ω *est le deuxième syzygie de l'idéal maximal* $\mathfrak{m}$: *on a une suite exacte:*

$$0 \to \Omega \to \mathcal{O}_S^3 \to \mathfrak{m} \to 0.$$

2. La règle de McKay. — Si M et N sont des $\mathcal{O}_S$-modules réflexifs, leur produit réflexif, noté M.N, est par définition l'enveloppe réflexive de leur produit tensoriel, ou encore $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(M^*, N)$, où M^* est le dual de M.

En caractéristique nulle, le module Ω est isomorphe au module réflexif correspondant à la représentation canonique du groupe G [remarque (1.3)]; le produit réflexif défini précédemment correspond au produit tensoriel de représentations de G. La règle dite de McKay établit (en caractéristique 0) que si $\{M_1, \ldots, M_n\}$ est la famille des classes d'isomorphisme de $\mathcal{O}_S$-modules réflexifs indécomposables non triviaux, alors on a, pour chaque i,

$$(*) \qquad c_1(\Omega \,.\, M_i) = 2\, c_1(M_i) + d_i,$$

où d_i est l'élément de la base de $\mathrm{Pic}_0(\tilde{S})$ correspondant à M_i, i.e. tel que $d_i^\vee = c_1(M_i)$. Si cette règle est vérifiée, alors la correspondance bijective $M_i \mapsto d_i$ établit un isomorphisme de graphes [i.e. une égalité de la matrice (a_{ij})] définie par $c_1(\Omega \,.\, M_i) = \sum a_{ij} d_j^\vee$, avec la matrice intersection associée à la désingularisation $q : \tilde{S} \to S$) car l'expression de chaque d_i dans la base duale est $(-2 d_i^\vee + \sum_{j \to i} d_j^\vee)$, où $j \to i$ désigne la famille des indices j tels que d_j soit voisin de d_i. Nous étudions la validité de la règle $(*)$ sur un corps de caractéristique positive, en prenant pour Ω le module canonique défini en (1.1). On a les résultats suivants:

Théorème (2.1). — (i) *Soit* M *un module réflexif indécomposable non libre sur* S, $d^\vee = c_1(M)$. *On a:*

$$c_1(M \,.\, \Omega) = 2\, c_1(M) + \delta(M),$$

où $\delta(M) = 0$ *ou* d.

(ii) *Si le corps de base k est de caractéristique positive p, et si* (rang M, p) = 1, *alors on a* $\delta(M) = d$.

COROLLAIRE (2.2). — *La règle de McKay est vraie pour les points doubles rationnels de type* A_n *en toute caractéristique, de type* D_n *en caractéristique* $\neq 2$, *de type* E_6 *ou* E_7 *en caractéristique* $\neq 2$ *et* 3, *de type* E_8 *en caractéristique* $\neq 2$, 3 *et* 5.

La démonstration du théorème (2.1) repose sur un passage de caractéristique p à caractéristique 0, et sur l'existence d'une désingularisation simultanée des points doubles rationnels.

En caractéristique 2, 3 et 5, la règle de McKay n'est pas vérifiée pour certains modules réflexifs indécomposables :

THÉORÈME (2.3). — *Soit* S *un point double rationnel de type :*

(i) D_n, E_6, E_7 *ou* E_8, *sur un corps de caractéristique* 2. *Alors on a* $\Omega^2 = 2\Omega$.

(ii) E_6, E_7 *ou* E_8 *sur un corps de caractéristique* 3 (*resp.* E_8 *sur un corps de caractéristique* 5). *Alors, il existe un* $\mathcal{O}_S$-*module réflexif indécomposable,* M, *de rang* 3 (*resp. de rang* 5) *tel qu'on ait* $\Omega . M = 2M$.

La démonstration du théorème (2.3) repose sur la caractéristique de Ω comme deuxième syzygie de l'idéal maximal $\mathfrak{m}$, et sur la classification des points doubles rationnels en caractéristique 2, 3 et 5 obtenue par M. Artin [2].

Reçue le 18 juillet 1985.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] M. ARTIN, On isolated rational singularities of surfaces, *Amer. J. Math.*, 88, 1966, p. 129-136.

[2] M. ARTIN, Coverings of the rational double points in characteristic *p*, *Complex Analysis and Algebraic Geometry*, 11-22, Tokyo, 1977.

[3] M. ARTIN et J.-L. VERDIER, Reflexive modules over rational double points, *Math. Ann.*, 270, 1985, p. 79-82.

[4] E. BRIESKORN, Rationale singularitäten komplexer Flächen, *Inv. Math.*, 4, 1968, p. 336-358.

[5] P. DU VAL, *Homographies, quaternions and rotations*, Oxford, Clarendon Press, 1964.

[6] G. GONZALEZ-SPRINBERG et J.-L. VERDIER, Construction géométrique de la correspondance de McKay, *Ann. scient. Ec. Norm. Sup.*, 4^e^ série, 16, 1983, p. 409-449.

[7] F. KLEIN, *The icosahedron and the general 5th degree equation*, 1889, Dover reprint, 1956.

[8] J. LIPMAN, Rational singularities with applications to algebraic surfaces and unique factorisation, *Publ. Math. I.H.E.S.*, n° 36, 1969, p. 195-279.

[9] J. MCKAY, Graphs, singularities and finite groups, *Proc. of Symp. in Pure Math.*, 37, 1980, p. 183-186.

G. G.-S. : *Département de Mathématiques, Faculté des Sciences de Tours* et *Centre de Mathématiques, École normale supérieure, U.A. n°* 040762, 45, *rue d'Ulm*, 75230 *Paris Cedex* 05;

J.-L. V. : *Centre de Mathématiques, École normale supérieure, U.A. n°* 040762, 45, *rue d'Ulm*, 75230 *Paris Cedex* 05.