

THÉORIE DES GROUPES. — *Points doubles rationnels et représentations de groupes.*
 Note (*) de Gerardo Gonzalez-Sprinberg et Jean-Louis Verdier, présentée par Jacques Tits.

Nous présentons une description géométrique de la correspondance de McKay entre représentations de sous-groupes finis de $SL(2, \mathbb{C})$ et diagrammes de Dynkin.

We give a geometrical description of the McKay correspondence between representations of finite subgroups of $SL(2, \mathbb{C})$ and Dynkin diagrams.

0. INTRODUCTION. — Soit G un sous-groupe fini de $SL(2, \mathbb{C})$, $G \neq \{1\}$, $\text{Irr}(G) = \{\rho_1, \dots, \rho_r\}$, l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles non triviales de G . Notons c la représentation canonique de G dans \mathbb{C}^2 donnée par l'inclusion $G \subset SL(2, \mathbb{C})$, et ρ_0 la représentation triviale. On définit la $(r+1) \times (r+1)$ -matrice $A = (a_{ij})$ par la formule de décomposition :

$$c \otimes \rho_i = \sum a_{ij} \rho_j,$$

où a_{ij} dénote la multiplicité de ρ_j dans $c \otimes \rho_i$.

Par ailleurs soit V un germe de \mathbb{C}^2 en 0, et notons $S = V/G$ la singularité quotient de V par G , qui est un point double rationnel ([1], [2]). Soit $q: X \rightarrow S$ une résolution minimale de S , $D \subset X$ le diviseur exceptionnel, $\text{Irr}(D)$ l'ensemble de composantes irréductibles de D . On associe à G un diagramme de Dynkin $\Gamma(G)$ en prenant le graphe dual de D dont les sommets sont en bijection avec $\text{Irr}(D)$; ce diagramme est l'un des suivants : $A_n (n \geq 1)$, $D_n (n \geq 4)$, E_6 , E_7 , E_8 [2].

J. McKay a remarqué que la matrice $2I - A$ (où I est la matrice identité) est la matrice de Cartan du diagramme de Dynkin complété $\tilde{\Gamma}(G)$ de $\Gamma(G)$ (cf. Appendix III de [3]). Du point de vue des représentations de groupes cette propriété a été analysée par R. Steinberg [4].

La remarque de McKay permet de définir de façon purement combinatoire une bijection entre l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles de G et l'ensemble des sommets de $\tilde{\Gamma}(G)$, qui induit une bijection de $\text{Irr}(G)$ sur $\text{Irr}(D)$, bijection définie à automorphisme de diagramme près.

Cette bijection possède la propriété suivante : les degrés des représentations appartenant à $\text{Irr}(G)$ coïncident avec les coefficients de la plus grande racine dans le système de racines de $\tilde{\Gamma}(G)$, qui coïncident aussi avec les coefficients du cycle fondamental Z associé à X (voir définition du cycle fondamental dans [2]).

Nous présentons ici un ensemble de résultats permettant peut-être de mieux comprendre ces phénomènes.

1. ÉNONCÉS. — Soit Δ le \mathbb{Z} -module libre engendré par les éléments de $\text{Irr}(D) = \{d_1, \dots, d_r\}$, et Δ^* le dual de Δ ; pour chaque $d \in \text{Irr}(D)$ soit $e_d \in \Delta$ l'élément correspondant. On note $(b_d)_{d \in \text{Irr}(D)}$ la base duale. On a un morphisme $I: \Delta \rightarrow \Delta^*$ défini par la matrice d'intersection $((d_i, d_j))$, où (\cdot) dénote le nombre d'intersection dans X .

Soit $\delta: \text{Pic}(X) \rightarrow \Delta^*$ [où $\text{Pic}(X)$ est le groupe de Picard de X] l'application qui à chaque $L \in \text{Pic}(X)$ associe $\sum_i \deg(L|_{d_i}) b_{d_i}$.

On considère l'anneau de Grothendieck $K(X)$ (resp. le groupe de Grothendieck $K_0(D)$) des classes de \mathcal{O}_X -modules cohérents localement libres (resp. cohérents à support dans D).

Pour tout $d \in \text{Irr}(D)$, on note $[d] \in K(X)$ la classe de \mathcal{O}_d comme \mathcal{O}_X -module. Finalement, soit $1 + c_1 : \text{Pic}(X) \rightarrow K(X)$ l'application canonique. Avec les notations précédentes on a :

1.1. PROPOSITION. — (i) Il existe une application $\varphi : \Delta^* \rightarrow K(X)$ et une seule telle que pour tout $L \in \text{Pic}(X)$ on ait $c_1(L) = \varphi \delta(L)$. L'application φ est injective; on a $K(X) = \mathbf{Z} \cdot 1 \oplus \varphi(\Delta^*)$ et $(\varphi(\Delta^*))^2 = 0$.

(ii) L'image de $K_0(D)$ dans $K(X)$ est le sous-groupe $\varphi(I(\Delta))$. On a $[d] = \varphi I(e_d)$.

Dans la suite on identifie Δ^* à son image par φ . On a donc $K(X) = \mathbf{Z} \cdot 1 \oplus \Delta^*$.

Notons $K^G(V)$ [resp. $K^G(0)$] le sous-groupe de $K(V)$ des classes de \mathcal{O}_V -modules G -équivariants (resp. G -équivariants et à support dans 0). Soit $R(G)$ l'anneau de représentations de G . Soit $p : V \rightarrow S = V/G$ le morphisme canonique.

1.2. PROPOSITION. — (i) L'application qui à une représentation ρ de G dans E_ρ associe le \mathcal{O}_V -module G -équivariant $\mathcal{O}_V \otimes_{\mathbf{C}} E_\rho$ induit un isomorphisme d'anneaux $R(G) \simeq K^G(V)$ qui permet d'identifier ces anneaux.

(ii) Soit \mathcal{I}_S l'idéal maximal au point singulier de S . La classe du module G -équivariant $p^*(\mathcal{O}_S/\mathcal{I}_S)$ est $(c-2)$. L'image de $K^G(0)$ dans $K^G(V) = R(G)$ est l'idéal engendré par $(c-2)$.

(iii) L'idéal $(c-2)R(G)$ est un \mathbf{Z} -module libre engendré par $(2-c)\rho$, $\rho \in \text{Irr}(G)$. On a la relation :

$$c-2 = \sum_{\rho \in \text{Irr}(G)} \text{deg } \rho \cdot (2-c)\rho.$$

Soit $\tilde{V} = (V \times_S X)_{\text{red}}$ le produit fibré réduit de V et X au-dessus de S ; on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{V} & \xrightarrow{P_2^*} & X \\ P_1^* \downarrow & & \downarrow q \\ V & \xrightarrow{p} & S \end{array}$$

où P_1^* , P_2^* dénotent les projections canoniques.

On considère les morphismes canoniques suivants :

$P_1^* : K^G(V) \rightarrow K^G(\tilde{V})$; $P_{2,*}^* : K^G(\tilde{V}) \rightarrow K^G(X)$; et $\text{Inv} : K^G(X) \rightarrow K(X)$ qui à $M \in K^G(X)$ associe le sous-module M^G des invariants par l'action de G .

1.3. THÉORÈME. — Soit G un groupe dont le diagramme est l'un des suivants : $A_n (n \geq 1)$, $D_n (n \geq 4)$, E_6 , E_7 . Soit $\pi : R(G) \simeq K^G(V) \rightarrow K(X)$ l'application composée $\text{Inv} \circ P_{2,*}^* \circ P_1^*$ qui à $M \in K^G(V)$ associe $(P_{2,*}^* \circ P_1^*(M))^G$.

Alors :

(i) L'application π est un isomorphisme de \mathbf{Z} -modules.

(ii) $\pi((c-2)R(G)) = I(\Delta)$.

(iii) Par passage au quotient, π induit un isomorphisme d'anneaux :

$$R(G)/(c-2)R(G) \rightarrow K(X)/K_0(D)K(X)$$

(iv) Pour tout $\rho \in \text{Irr}(G)$ il existe un unique $d_\rho \in \text{Irr}(D)$ tel que $\pi(\rho) - \text{deg } \rho = d_\rho$. L'application $\rho \mapsto d_\rho$ est bijective.

(v) $\pi(c-2)$ est la classe du cycle fondamental $[Z]$, et pour tout $\rho \in \text{Irr}(G)$, $\pi((2-c)\rho) = [d_\rho]$.
 Finalement on déduit de la proposition 1.2 et du théorème :

1.4. COROLLAIRE. — On a :

$$[Z] = \sum_{\rho \in \text{Irr}(G)} \deg \rho [d_\rho]$$

Ce théorème a été démontré par des calculs explicites sur les équations de S et X . La vérification des mêmes assertions pour E_8 est en cours.

(*) Remise le 6 juillet 1981.

- [1] F. KLEIN, *The Icosahedron and the General 5th Degree Equation*, 1884, Dover reprint, 1956
- [2] M. ARTIN, *Amer. J. Math.*, 88, 1966, p. 129-136
- [3] P. SLODOWY, *Simple Singularities and Simple Algebraic Groups (Springer Lecture Notes, n° 815, 1980)*.
- [4] R. STEINBERG, *Subgroups of SU_2 and Dynkin Diagrams* (preprint).

G. G.-S. : Département de Mathématiques,
 Bât. 425, Faculté de Sciences d'Orsay, 91405 Orsay Cedex;
 J.-L. V. : Centre de Mathématiques, École normale supérieure, E.R.A. n° 589,
 45, rue d'Ulm, 75230 Paris Cedex 05.