

GÉOMÉTRIE ALGÈBRE. — Une formule pour les singularités isolées de surfaces.  
 Note (\*) de Gerardo González-Sprinberg, présentée par Henri Cartan.

On donne une formule de l'invariant local d'Euler pour les singularités isolées de surface; on démontre que la valeur de cet invariant pour un point normal d'une surface est inférieure ou égale à 1 et qu'on a égalité si et seulement si le point est lisse.

*We give a formula of the local Euler invariant for the isolated singularities of surfaces and we prove that the value of this invariant for a normal point of a surface is less than or equal to 1, and that there is equality if and only if the point is non singular.*

Soit  $S$  une surface réduite plongée dans  $\mathbb{C}^N$  et soit  $0$  un point singulier isolé de  $S$ . Notre but est d'obtenir une expression de l'invariant local d'Euler  $Eu_0(S)$  de  $S$  au point  $0$  en utilisant une résolution de  $S$ . Pour une définition de  $Eu_0(S)$ , voir [1] et [2]. Le point singulier  $0$  étant isolé, on a la formule suivante de A. Dubson pour  $Eu_0(S)$  (voir [3], [4]) :  $Eu_0(S) = \chi(S \cap H \cap B_\delta)$ , où le second membre est la caractéristique d'Euler-Poincaré topologique de l'intersection de la boule  $B_\delta$  de centre  $0$  et de rayon  $\delta > 0$  assez petit, avec une section hyperplane de  $S$  obtenue comme intersection de  $S$  avec un hyperplan en position générale  $H$  assez proche de  $0$  mais qui ne contient pas  $0$ .

Soient  $S_0$  l'éclaté de l'idéal maximal  $\mathcal{M}$  de  $0$  dans  $S$ , et  $\bar{S}_0$  le normalisé de  $S_0$ . Notons  $\bar{E}$  le diviseur exceptionnel dans  $\bar{S}_0$  défini par  $\mathcal{M}\mathcal{C}_{\bar{S}_0}$ ,  $|\bar{E}|$  le schéma réduit correspondant. Considérons la transformée stricte  $\bar{D}$ , dans  $\bar{S}_0$ , d'une section hyperplane  $S \cap H_0$  de  $S$ , où  $H_0$  maintenant est un hyperplan de  $\mathbb{C}^N$  qui contient  $0$ . Alors on a le fait suivant :

LEMME. — Avec les notations précédentes, si  $H_0$  est un hyperplan en position générale alors  $|\bar{E}|$  et  $\bar{D}$  se coupent transversalement en des points lisses de  $\bar{S}_0$ .

Considérons maintenant une résolution  $X$  de  $S_0$  qui soit une bonne résolution  $\pi : X \rightarrow S$ , c'est-à-dire telle que les composantes irréductibles du diviseur exceptionnel relatif à  $\pi$  soient lisses et à croisements normaux. Soient  $Z_0$  le cycle associé au diviseur exceptionnel dans  $X$  défini par  $\mathcal{M}\mathcal{C}_X$ , et  $|Z_0|$  le cycle réduit associé. Notons  $K$  le diviseur canonique de  $X$ , et  $(\cdot, \cdot)$  la forme intersection de  $\text{Pic}(X)$ .

THEOREME. — Avec les notations précédentes on a l'égalité suivante :

$$Eu_0(S) = (Z_0, (Z_0 - |Z_0| - K)).$$

Démonstration. — Soit  $H_\varepsilon$  un hyperplan de  $\mathbb{C}^N$  d'équation  $a_1 z_1 + \dots + a_N z_N = \varepsilon$ . Nous allons calculer  $\chi(S \cap H_\varepsilon \cap B_\delta)$  avec  $|\varepsilon| > 0$  assez petit, qui est égal à  $\chi(\pi^{-1}(S \cap H_\varepsilon \cap B_\delta))$ . Si  $H_0$  est un hyperplan en position générale qui contient  $0$ , alors le cycle associé à  $\pi^{-1}(S \cap H_0)$  est de la forme  $Z_0 + R$ , où  $R$  est le cycle associé à la transformée stricte dans  $X$  de  $S \cap H_0$ . En vertu du lemme précédent, on sait que  $R$  et  $|Z_0|$  sont transverses, car  $X$  est une résolution de  $S_0$ , donc aussi de  $\bar{S}_0$ , et pour  $H_0$  en position générale la transformée stricte  $\bar{D}$  est déjà transverse au diviseur exceptionnel réduit  $|\bar{E}|$  dans  $\bar{S}_0$ . Soit  $M$  l'intérieur de la variété  $\mathbb{C}^\times$  de dimension 2 à bord  $\bar{M} = \pi^{-1}(S \cap H_\varepsilon \cap B_\delta)$ ; alors la caractéristique d'Euler-Poincaré à support compact  $\chi_c(M)$  est égale à  $\chi(\bar{M})$ , car  $\chi(\partial\bar{M}) = 0$ , où  $\partial\bar{M}$  est le bord de  $\bar{M}$ . En vertu de la transversalité des composantes irréductibles de  $|\pi^{-1}(S \cap H_0)|$ , l'équation locale de  $\pi^{-1}(S \cap H_\varepsilon)$  est de la forme ou bien  $x^m y^n = \varepsilon$  ou bien  $x^m = \varepsilon$ , où  $x, y$  sont des coordonnées

locales de  $X$ . Soient  $I$  l'ensemble des points singuliers de  $|\pi^{-1}(S \cap H_0)|$  (i.e. les points d'intersection des composantes irréductibles de  $|\pi^{-1}(S \cap H_0)|$ ), et  $V_P$  un voisinage ouvert de chaque  $P \in I$ . Alors on a

$$\chi_c(M) = \left( \sum_{P \in I} \chi_c(V_P \cap M) \right) + \chi(\bar{M} - \bigcup_{P \in I} V_P).$$

Pour chaque  $P$ ,  $V_P \cap M$  est un revêtement d'un cylindre, car localement  $V_P \cap M$  est défini par  $x^m y^m = \varepsilon$ ,  $|x| < r$ ,  $|y| < r$ , avec  $r > 0$  assez petit. Par conséquent  $\chi_c(V_P \cap M) = 0$ . Soient  $Z_0 = \sum_i m_i E_i$ , où les  $E_i$  sont les composantes irréductibles du diviseur exceptionnel. Alors on a

$$\chi(\bar{M} - \bigcup_{P \in I} V_P) = \sum m_i \chi(E_i - (E_i \cap I)),$$

car on a déjà enlevé les parties correspondant aux points de  $I$ , et ce qui reste est union de revêtements d'ordre  $m_i$  de  $(E_i - (E_i \cap (\bigcup_{P \in I} V_P)))$ . Maintenant calculons

$$\chi(E_i - (E_i \cap I)) = \chi(E_i) - \text{card}(E_i \cap I);$$

en vertu de la transversalité des composantes irréductibles de  $\pi^{-1}(S \cap H_0)$ , on a

$$\text{card}(E_i \cap I) = \left( \sum_{j \neq i} (E_i \cdot E_j) \right) + (E_i \cdot R).$$

Étant donné que  $(E_i \cdot (Z_0 + R)) = 0$ , alors  $(E_i \cdot R) = -(E_i \cdot Z_0)$ . D'autre part on a  $\chi(E_i) = -(E_i \cdot (E_i + K))$ . Finalement, avec les notations prises, on a  $|Z_0| = \sum_i E_i$ . Par suite

$$\begin{aligned} \sum_i m_i \chi(E_i - (E_i \cap I)) &= \sum_i m_i [-(E_i \cdot (E_i + K)) - \left( \sum_{j \neq i} (E_i \cdot E_j) \right) + (E_i \cdot Z_0)] \\ &= \sum_i m_i [(E_i \cdot Z_0) - (E_i \cdot |Z_0|) - (E_i \cdot K)] = (Z_0 \cdot (Z_0 - |Z_0| - K)), \end{aligned}$$

d'où le théorème. ■

**COROLLAIRE.** — Soit  $0$  un point normal d'une surface  $S$ . Alors on a l'inégalité  $Eu_0(S) \leq 1$ , et  $0$  est lisse si et seulement si  $Eu_0(S) = 1$ .

*Démonstration.* — Nous allons montrer que si  $0$  est singulier alors on a  $Eu_0(S) \leq 0$ , ce qui implique ce qu'on veut démontrer car si  $0$  est lisse alors  $Eu_0(S) = 1$ . Soit  $\pi : X \rightarrow S$  une bonne résolution du point singulier  $0$  telle que  $\mathcal{H}C_X$  soit inversible, et soit  $\pi_n : X_n \rightarrow S$  la résolution minimale. Soit  $X = X_0 \xrightarrow{\sigma_1} X_1 \rightarrow \dots \rightarrow X_{n-1} \xrightarrow{\sigma_n} X_n \rightarrow \dots \rightarrow X_m$  une suite de contractions de droites projectives de self-intersection  $-1$  qui aboutit à la résolution minimale  $X_m$  (si  $X_0 = X_m$ , cette suite est vide). Notons  $\pi_n : X_n \rightarrow S$  la composition  $\pi_n \circ \sigma_m \circ \dots \circ \sigma_{n+1}$ . Soit  $S \cap H_0$  une section hyperplane générique passant par  $0$ ; alors le diviseur  $\pi_n^{-1}(S \cap H_0)$  est de la forme  $Z_n + R_n$ , où  $Z_n$  est à support dans la fibre exceptionnelle de  $X_n$  relative à  $\pi_n$  et  $R_n$  est la transformée stricte. On a  $(\sigma_n)_* Z_{n-1} = Z_n$ . Notons  $E_n$  la droite dans  $X_{n-1}$  qui est contractée par  $\sigma_n$ ; en conséquence on a  $Z_{n-1} = \sigma_n^* Z_n + r E_n$ , où  $r$  est un entier non négatif (qui est nul si  $\mathcal{H}C_X$  est inversible au point  $P_n = \sigma_n(E_n)$ ). Puisqu'on a supposé que  $0$  est un point singulier normal, alors la fibre exceptionnelle d'une résolution est connexe et de dimension 1, donc  $E_n$  coupe effectivement d'autres composantes  $C_1, \dots, C_t$  de la fibre exceptionnelle dans  $X_{n-1}$ . Soit  $\bar{C}_i = \sigma_n(C_i)$  et posons  $s = [\sum_i \text{mult}(\bar{C}_i, P_n)] - 1$ . Par suite on a

$$\begin{aligned}
|Z_{n-1}| &= \sigma_n^* |Z_n| - s E_n, \text{ et } s \text{ est non négatif. Si } K_i \text{ est le diviseur canonique de } \\
&X_i (i=0, \dots, m), \text{ alors on a } K_{n-1} = \sigma_n^* K_n + E_n. \text{ De ces trois relations on déduit} \\
(Z_{n-1} \cdot (Z_{n-1} - |Z_{n-1}| - K_{n-1})) \\
&= ((\sigma_n^* Z_n + r E_n) \cdot (\sigma_n^* Z_n - \sigma_n^* |Z_n| - \sigma_n^* K_n + (r+s-1) E_n)) \\
&= (Z_n \cdot (Z_n - |Z_n| - K_n)) - r(r+s-1).
\end{aligned}$$

Comme  $r$  et  $s$  sont non négatifs, alors  $r(r+s-1) \geq 0$ , d'où

$$(Z_{n-1} \cdot (Z_{n-1} - |Z_{n-1}| - K_{n-1})) \leq (Z_n \cdot (Z_n - |Z_n| - K_n)),$$

pour  $n=1, \dots, m$ . On a donc (théorème) l'inégalité  $\text{Eu}_0(S) \leq (Z_m \cdot (Z_m - |Z_m| - K_m))$ . Le cycle  $Z_m - |Z_m|$  est effectif, donc  $(Z_m \cdot (Z_m - |Z_m|)) \leq 0$ . Soit  $C$  une composante irréductible de genre (arithmétique)  $g$  de  $Z_m$ ; sa self-intersection  $(C \cdot C)$  est négative, donc le nombre  $-(C \cdot K_m) = 2 - 2g + (C \cdot C)$  est positif si et seulement si  $g=0$  et  $(C \cdot C) = -1$ . Or, en ce cas  $C$  est une droite projective de self-intersection  $-1$ , ce qui n'est pas possible car  $X_m$  est la résolution minimale. Donc on a  $-(Z_m \cdot K_m) \leq 0$  et par conséquent  $\text{Eu}_0(S) \leq 0$ . ■

*Remarques.* — On peut affaiblir l'hypothèse de normalité; en effet il suffit de supposer que  $0 \in S$  est une singularité isolée telle que si  $f: \bar{S} \rightarrow S$  est la normalisation alors chaque point de  $f^{-1}(0)$  est singulier (ce qui équivaut à dire que dans la fibre exceptionnelle de la résolution minimale il n'y a pas de points isolés). En ce cas on a aussi  $\text{Eu}_0(S) \leq 0$ .

Si  $S$  a une singularité en  $0$  qui n'est pas normale, même si c'est une singularité isolée,  $\text{Eu}_0(S)$  peut être positif. Par exemple, si  $S$  est l'union de  $n$  plans dans  $\mathbb{C}^4$  qui se coupent en un point  $0$ , alors  $\text{Eu}_0(S) = n$ .

*Quelques exemples.* — (1) Si  $S$  est une singularité rationnelle (voir [5]), alors la résolution minimale  $X$  de  $S$  majore l'éclaté de l'idéal maximal  $\mathcal{M}$ , et le cycle  $Z_0$  défini par  $\mathcal{M}\mathcal{C}_X$  est le cycle fondamental, i.e. l'unique cycle qui est minimal parmi les cycles positifs  $Z$  à support dans la fibre exceptionnelle satisfaisant à la condition  $(Z \cdot E_i) \leq 0, \forall i$ . Le cycle fondamental peut être calculé avec la seule donnée du graphe dual pondéré associé à la résolution minimale, et en conséquence du théorème précédent  $\text{Eu}_0(S)$  aussi. Soient  $Z_0 = \sum m_i E_i$ ,  $(E_i \cdot E_i) = -s_i$  et  $(Z_0 \cdot E_i) = -d_i$ , où  $s_i$  et  $d_i$  sont des entiers non négatifs. Chaque  $E_i$  est une droite rationnelle, donc la formule du genre implique  $(E_i \cdot K) = s_i - 2$ . Alors on trouve  $\text{Eu}_0(S) = \sum [m_i(2 - d_i - s_i) + d_i]$ . Cette formule généralise le calcul fait pour les singularités quotients de surfaces [6].

(2) On appelle singularité cyclique une singularité normale de surface dont le graphe dual de la résolution minimale  $X$  forme un cycle fermé et où chaque composante irréductible de la fibre exceptionnelle est une courbe rationnelle lisse sauf dans le cas particulier où il n'y a qu'une seule composante, qui a un point double ordinaire. Ces singularités apparaissent dans les surfaces de Hilbert-Blumenthal. Le cycle fondamental  $Z$  est réduit; soient  $Z = E_1 + \dots + E_r$  et  $(E_i \cdot E_i) = -s_i$ . Si  $(Z \cdot Z) \leq -2$  alors  $\mathcal{M}\mathcal{C}_X = \mathcal{C}_X(-Z)$  (i.e.  $\mathcal{M}\mathcal{C}_X$  est inversible et  $Z_0 = Z$ ) [7]; on a donc  $\text{Eu}_0(S) = -(Z \cdot K)$ , ce qui est égal à  $\sum (2 - s_i)$  si  $r > 1$  et égal à  $-s_1$  si  $r = 1$ . Si  $(Z \cdot Z) = -1$ , alors  $\mathcal{M}\mathcal{C}_X$  n'est pas inversible, et il faut éclater un point de la résolution minimale; en ce cas on trouve  $\text{Eu}_0(S) = -1$ .

(3) Singularités coniques. Soit  $C$  une courbe lisse de genre  $g$ , et soit  $L$  un fibré en droites sur  $C$  de degré  $-d$  avec  $d$  positif. Soit  $X$  l'espace total du fibré  $L$ ;  $C$  est plongée dans  $X$  par la section nulle et sa self-intersection est  $-d$ . On considère la surface

$S = \text{Spec}(\bigoplus_{n \geq 0} H^0(C, L^{\otimes -n}))$  obtenue en contractant  $C$  dans  $X$ . Elle a un point singulier isolé  $0$ . La surface  $X$  est la résolution minimale de  $S$ . Posons

$$k = \min \{ n > 0 \mid \dim H^0(C, L^{\otimes -n}) > 0 \};$$

alors on a  $\mathcal{M}\mathcal{C}_X = \mathcal{C}_X(-kC)$ . Si le système linéaire associé à  $H^0(C, L^{\otimes -k})$  est sans points fixes, alors  $\mathcal{M}\mathcal{C}_X$  est inversible et on a  $\mathcal{M}\mathcal{C}_X = \mathcal{C}_X(-kC)$ . Par conséquent on a

$$\text{Eu}_0(S) = (kC \cdot ((k-1)C - K_X)) = k(2 - 2g - dk).$$

En particulier si  $L^{-1}$  est très ample alors on a  $\text{Eu}_0(S) = 2 - 2g - d$ ; par exemple si  $g \geq 3$ , si  $C$  n'est pas hyperelliptique et si  $L^{-1} = K_C$ , alors  $\text{Eu}_0(S) = 0$ . Si le système linéaire associé à  $H^0(C, L^{\otimes -k})$  a des points fixes, alors  $\text{Eu}_0(S)$  ne dépend pas seulement de  $g, d$  et  $k$ . Par exemple, si  $L^{-1}$  est le fibré associé au diviseur effectif  $\sum m_i P_i$  sur une courbe  $C$  de genre  $g > 0$  avec  $P_i \neq P_j$  si  $i \neq j$  et avec  $\sum m_i = g$ , et si  $\sum m_i P_i$  n'est pas un diviseur spécial (i.e.  $\dim H^0(C, L^{-1}) = 1$ ), alors  $\mathcal{M}\mathcal{C}_X$  n'est pas inversible et on a  $\text{Eu}_0(S) = 2 - 3g - \sum (m_i - 1)$ .

(\*) Remise le 3 mars 1980.

- [1] R. D. MACPHERSON, *Ann. of Math.*, 100, n° 2, 1974, p. 423-432.
- [2] G. GONZÁLEZ-SPRINBERG, *L'obstruction locale d'Euler et le théorème de MacPherson (Séminaire E.N.S., 1978-1979)*.
- [3] A. DUBSON, *Classes caractéristiques des variétés singulières (Séminaire E.N.S., 1978-1979)*.
- [4] LÊ DŨNG TRÁNG et B. TEISSIER, *Variétés polaires locales et classes de Chern des variétés singulières*, Preprint École Polytechnique 1979.
- [5] M. ARTIN, *Amer. J. Math.*, 88, 1966, p. 129-137.
- [6] G. GONZÁLEZ-SPRINBERG, *Comptes rendus*, 288, série A, 1979, p. 989.
- [7] U. KARRAS, *Math. Ann.*, 215, 1975, p. 117-129; H. LAUFER, *Amer. J. Math.*, 99, 1977, p. 1257-1295.

*Département de Mathématiques, Université de Metz,  
Ile de Saulcy, 57000 Metz  
et Centre de Mathématiques,  
École polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex.*