

GÉOMÉTRIE ALGÈBRE. — Calcul de l'invariant local d'Euler pour les singularités quotient de surfaces. Note (*) de Gerardo Gonzalez-Sprinberg, présentée par Henri Cartan.

Nous calculons l'invariant local d'Euler pour les singularités obtenues comme quotient de \mathbb{C}^2 par l'action d'un sous-groupe fini de $GL(2, \mathbb{C})$. Le résultat est exprimé en fonction de la dimension de plongement ou des self-intersections des composantes irréductibles du diviseur exceptionnel de la résolution minimale de chaque singularité.

We compute the local Euler invariant for the singularities obtained as a quotient of \mathbb{C}^2 by the action of a finite sub-group of $GL(2, \mathbb{C})$. The result is expressed in terms of the embedding dimension or of the self-intersections of the irreducible components of the exceptional divisor of the minimal resolution of each singularity.

L'invariant local d'Euler a été introduit par R. D. MacPherson dans sa démonstration de l'existence de classes de Chern (homologiques) pour les variétés singulières [1]. Il s'agit d'un nombre entier $Eu_x(X)$ associé à chaque point x d'une variété algébrique réduite X . Cet invariant local mesure l'obstruction à prolonger en une section non nulle le champ de vecteur radial, section du fibré tangent de Nash, lequel est défini sur le transformé de Nash de X (pour une définition précise voir [1] et [2]). On dispose maintenant de plusieurs formules qui proviennent de points de vue différents ([2] à [7]), mais son calcul effectif est en général assez compliqué. Nous allons étudier des exemples où la combinaison de plusieurs techniques rend ce calcul possible.

Soit X une singularité quotient de surface, i. e. le quotient de \mathbb{C}^2 par l'action d'un sous-groupe fini G de $GL(2, \mathbb{C})$, et notons O son seul point singulier ([8], [9], [10]). Ces singularités ont été étudiées par E. Brieskorn [10] en s'appuyant sur un résultat de D. Prill [9], qui classe plus généralement les singularités quotient en dimension n en termes des sous-groupes petits G de $GL(n, \mathbb{C})$ (i. e. tels que G ne contienne aucune pseudo-réflexion). Parmi ces singularités quotient de surfaces, on trouve comme cas particuliers les $C_{n,q}$ [suivant la notation de Brieskorn (*loc. cit.*)], quotients par un groupe cyclique fini d'ordre n ; celles-ci interviennent dans la méthode de désingularisation des surfaces de Jung et sont munies d'une action du tore de dimension deux, elles sont aussi appelées singularités toriques ou éventails [11]. On trouve aussi comme cas particuliers les singularités de Klein (bien que H. A. Schwarz les ait étudiées avant Klein [12]).

Considérons plus généralement une surface X plongée dans \mathbb{C}^e , et soit O un point singulier isolé de X . En ce cas on a la formule suivante pour $Eu_0(X)$ [3].

$$(i) \quad Eu_0(X) = \chi(X \cap H \cap B_\varepsilon),$$

où le second membre est la caractéristique d'Euler-Poincaré topologique de l'intersection de la boule B_ε de centre O et de rayon $\varepsilon > 0$ assez petit, avec une section hyperplane de X obtenue comme intersection de X avec un hyperplan générique H assez proche de O mais qui ne contient pas O . Pour calculer $Eu_0(X)$ en ayant une résolution de X il faudrait connaître ou bien l'image inverse de $X \cap H \cap B_\varepsilon$, ou bien le diviseur exceptionnel au-dessus de O et l'information supplémentaire donnée par la transformée stricte d'une section hyperplane générique de X passant par O .

Revenons au cas où X est une singularité quotient de surface; en ce cas on peut calculer $Eu_0(X)$ à l'aide du revêtement ramifié qui définit X . Plus précisément, soit $z_i(u, v)$, $1 \leq i \leq e$, un système minimal générateur de l'algèbre des invariants de $\mathbb{C}[u, v]$ par l'action de G . Le nombre e , dimension de plongement de X en O , a été calculé par Brieskorn (*ibid.*). On dispose d'un modèle de X plongé dans \mathbb{C}^e , et d'un morphisme $\varphi : \mathbb{C}^2 \rightarrow X$ défini par les

polynômes $z_i(u, v)$, $1 \leq i \leq e$. La restriction de φ à $\mathbb{C}^2 - \{(0, 0)\}$ est un revêtement de $X - \{0\}$ de degré égal à $|G|$, où $|G|$ est l'ordre de G . En conséquence on a :

$$(ii) \quad \chi(X \cap H \cap B_e) = \chi(\varphi^{-1}(X \cap H \cap B_e)) / |G|.$$

Soit H l'hypérplan d'équation $\lambda_1 z_1 + \dots + \lambda_e z_e = c$, où z_1, \dots, z_e sont les coordonnées de \mathbb{C}^e , où les coefficients λ_i sont des nombres complexes non nuls génériques et où $|c|$ est assez petit. Alors $\varphi^{-1}(H \cap X)$ est la courbe plane V_c d'équation $f(u, v) = \lambda_1 z_1(u, v) + \dots + \lambda_e z_e(u, v) = c$, et on a la formule suivante [13] :

$$(iii) \quad \chi(V_c \cap \varphi^{-1}(B_e)) = 1 - \mu,$$

où μ est le nombre de Milnor de V_0 à l'origine. Il résulte des formules (i), (ii) et (iii) le :

LEMME. — Avec les notations précédentes on a

$$Eu_0(X) = (1 - \mu) / |G|.$$

Donc on est ramené au calcul du nombre de Milnor d'une courbe plane déterminée par un système générateur des invariants. Le calcul complet de ces invariants pour les sous-groupes petits G de $GL(2, \mathbb{C})$ a été donné par O. Riemenschneider [14].

Soient C_i , $i=1, \dots, r$, les composantes irréductibles du diviseur exceptionnel de la résolution minimale de X . Le graphe dual de la résolution minimale de X représente chaque C_i (qui est un \mathbb{P}^1) par un sommet, et une arête entre deux sommets représente le seul point d'intersection des deux composantes. Notons $-b_i$ la self-intersection de C_i ; on a $b_i \geq 2$, $i=1, \dots, r$ [10]. Dans la proposition suivante on utilisera les notations précédentes et celles de [14] pour les sous-groupes de $GL(2, \mathbb{C})$. Pour les nombres de self-intersection $-b_i$, $1 \leq i \leq r$, (voir [10], p. 348).

PROPOSITION. — L'invariant local d'Euler des singularités quotient de surfaces est le suivant :

(a) dans les cas cycliques $C_{n,q}$ ($0 < q < n$, $(n, q) = 1$), on a

$$Eu_0(X) = 3 - e = (2 - b_1) + \dots + (2 - b_r) \quad \text{avec} \quad n/q = b_1 - \lfloor b_2 - \dots - \lfloor b_r;$$

(b) dans les cas diédraux $D_{n,q}$ ($1 < q < n$, $(n, q) = 1$), on a, si $b_3 > 2$:

$$Eu_0(X) = 3 - e = (2 - b_1) + \dots + (2 - b_r) \quad \text{et si} \quad b_3 = 2 :$$

$$Eu_0(X) = 2 - e = -1 + (2 - b_1) + \dots + (2 - b_r),$$

avec

$$b_1 = b_2 - 2 \quad \text{et} \quad n/q = b_3 - \lfloor b_4 - \dots - \lfloor b_r;$$

(c) dans les cas tétraédriques T_m ($m = 6(b-2) + c$, $b \geq 2$, $c = 1, 3, 5$), octaédriques O_m ($m = 12(b-2) + c$, $b \geq 2$, $c = 1, 5, 7, 11$) et icosaédriques I_m ($m = 30(b-2) + c$, $b \geq 2$, $c = 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$), on a

$$Eu_0(X) = 3 - e = (2 - b_1) + \dots + (2 - b_r) \quad \text{si} \quad b > 2$$

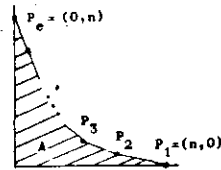
et

$$Eu_0(X) = 2 - e = -1 + (2 - b_1) + \dots + (2 - b_r) \quad \text{si} \quad b = 2.$$

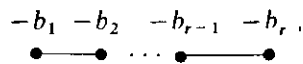
Démonstration. — Pour les cas cycliques et diédraux, on utilise la méthode de A. G. Kuchnirenko, qui permet de calculer, sous certaines hypothèses (vérifiées en ces cas), le nombre de Milnor d'une courbe en fonction du polygone de Newton associé à son équation [15]. Dans les cas $C_{n,q}$, un système minimal générateur est donné par : $z_i(u, v) = u^i v^{n-i}$, $i=1, \dots, e$; où le couple d'exposants est défini à partir de la fraction continue de Jung-Hirzebruch $n/(n-q) = a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_r}}$, par

$$P_1 = (n, 0), \quad P_2 = (n-q, 1) \quad \text{et} \quad P_{i+1} = a_i P_i - P_{i-1}, \quad 2 \leq i \leq e-1.$$

On démontre que le polygone de Newton de $f(u, v) = \lambda_1 z_1(u, v) + \dots + \lambda_e z_e(u, v)$ avec les λ_i génériques est justement la ligne polygonale qui joint successivement les points P_1, P_2, \dots, P_e , et il est immédiat de vérifier qu'il satisfait aux conditions de non dégénérescence de Kuchnirenko. Soit A l'aire du domaine délimité par le polygone de Newton et les deux axes. Alors la formule de Kuchnirenko appliquée à notre cas donne : $\mu = 2A - 2n + 1$.



Or, on a $2A = P_1 \wedge P_2 + \dots + P_{e-1} \wedge P_e$, et par récurrence sur i , on montre que $P_i \wedge P_{i+1} = n, i = 1, \dots, e-1$. Donc on trouve $2A = (e-1)n$, et étant donné que l'ordre de $C_{n,q}$ est n , on a en vertu du lemme précédent : $Eu_0(X) = (1-\mu)/n = 3-e$. On sait par ailleurs que $e = 3 + (b_1 - 2) + \dots + (b_r - 2)$, en utilisant la relation entre la fraction continue de n/q et celle de $n/(n-q)$ (voir aussi [10]) et que le graphe dual de la résolution est



d'où le résultat.

Pour les cas $D_{n,q}$, le polygone de Newton est le bord de l'enveloppe convexe du monoïde engendré par les points $P_i = ((n-q)t_i + qs_i, (n-q)t_i - qs_i)$ et $Q_i = ((n-q)t_i - qs_i, (n-q)t_i + qs_i)$ avec $2 \leq i \leq e$, et $M = (2(n-q), 2(n-q))$, où t_i et s_i sont définis par : $t_2 = a_2, t_3 = a_2 - 1, t_4 = a_3(a_2 - 1) - 1, t_{i+1} = a_i t_i - t_{i-1} (4 \leq i \leq e-1)$ et $s_2 = 1, s_3 = 1, s_4 = a_3, s_{i+1} = a_i s_i - s_{i-1} (4 \leq i \leq e-1)$, avec $n/(n-q) = a_2 - \frac{1}{a_3 - \frac{1}{\dots - \frac{1}{a_e - 1}}}$. On démontre que la suite $[(n-q)t_i + qs_i]$ est strictement croissante, que la suite $[(n-q)t_i - qs_i]$ est strictement décroissante pour $3 \leq i \leq e$, et que $t_e = q, s_e = n - q$. L'ensemble de sommets du polygone de Newton est : $\{P_i, Q_i \mid 3 \leq i \leq e\}$ si $a_2 = 2 \Leftrightarrow b_3 > 2$, et $\{M, P_i, Q_i \mid 3 \leq i \leq e\}$ si $a_2 > 2 \Leftrightarrow b_3 = 2$.

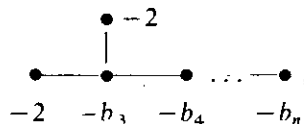
Dans les deux cas on vérifie que les conditions de non-dégénérescence sont satisfaites. En calculant $2A$ on trouve les valeurs suivantes :

$$4(n-q)q(e-2) \text{ si } a_2 = 2 \quad \text{et} \quad 4(n-q)q(e-1) \text{ si } a_2 > 2.$$

En appliquant la formule de Kuchnirenko on a

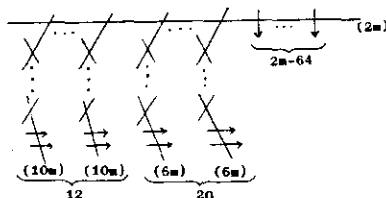
$$1 - \mu = 4(n-q)q(3-e) \text{ si } a_2 = 2 \quad \text{et} \quad 1 - \mu = 4(n-q)q(2-e) \text{ si } a_2 > 2.$$

En utilisant le lemme précédent et étant donné que l'ordre de $D_{n,q}$ est $4(n-q)q$, que $e = 3 + (b_1 - 2) + \dots + (b_r - 2)$ et que le graphe dual de la résolution minimale est

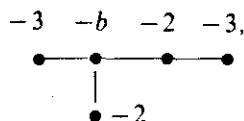


on a le résultat annoncé. Pour les autres cas on ne peut pas appliquer en général la méthode de Kuchnirenko, car le polygone de Newton est dégénéré (sauf pour $T_m (b \geq 2 \text{ et } c = 1), O_m (b \geq 2 \text{ et } c = 1), I_m (b \geq 2 \text{ et } c = 1, b = 2 \text{ et } c = 7, b = 2 \text{ et } c = 23)$). Mais on peut calculer le nombre de Milnor par d'autres méthodes, par exemple celle de N. A'Campo (cf. [16] p. 235). Nous allons donner à titre d'exemple la démonstration d'un des cas; les autres sont similaires. Considérons le cas $I_m (m = 30(b-2) + 17, b \geq 2)$. Il faut distinguer deux possibilités suivant

que $b > 2$ ou $b = 2$, car la forme des invariants est différente. Si $b > 2$, $f(u, v)$ est un polynôme de degré $10m$, avec des composantes homogènes de degré $2m, 4m, 6m$ et $10m$. Après un nombre fini d'éclatements successifs on trouve une résolution à croisements normaux avec le diagramme suivant :



où les droites représentent les diviseurs exceptionnels, les nombres entre parenthèses leur multiplicités, et les flèches les transformées strictes des branches de la courbe à l'origine. En appliquant la formule de N. A'Campo, on trouve $1 - \mu = -4m(m + 43)$; étant donné que $m = 30(b - 2) + 17$ et que l'ordre de I_m est $120m$, on trouve en appliquant le lemme précédent $\text{Eu}_0(X) = -b$. Si $b = 2$, le diagramme est différent et on trouve $\text{Eu}_0(X) = -3$. D'autre part on a $e = b + 3$ ($b \geq 2$), et le graphe dual de la résolution minimale de X est en ce cas



d'où la proposition.

(*) Remise le 2 mai 1979 et acceptée, après révision, le 11 juin 1979.

- [1] R. D. MACPHERSON, *Ann. of Math.*, 100, n° 2, 1974, p. 423-432.
- [2] G. GONZALEZ-SPRINBERG, *L'obstruction locale d'Euler et le théorème de MacPherson* (Séminaire E.N.S., 1978-1979).
- [3] A. DUBSON, *Classes caractéristiques des variétés singulières* (Séminaire E.N.S., 1978-1979).
- [4] J. P. BRASSELET, *Classes de M. H. Schwartz et classes de MacPherson* (Séminaire E.N.S., 1978-1979).
- [5] LÊ DŨNG TRÁNG, *Limites d'espaces tangents et obstruction d'Euler des surfaces* (Séminaire E.N.S., 1978-1979).
- [6] LÊ DŨNG TRÁNG et B. TEISSIER, *Variétés polaires locales et classes de Chern des variétés singulières* (Séminaire Demazure-Giraud-Teissier, 1978-1979).
- [7] R. PIENE, *Cycles polaires et classes de Chern* (Séminaire sur les singularités de surfaces, École Polytechnique, 1977-1978).
- [8] H. CARTAN, *Quotient d'un espace analytique par un groupe d'automorphismes*, dans *Algebraic Geometry and Topology*, Princeton Math. Series, 12, 1957, p. 90-102.
- [9] D. PRILL, *Duke Math. J.*, 34, 1967, p. 375-386.
- [10] E. BRIESKORN, *Invent. Math.*, 4, 1968, p. 336-358.
- [11] KEMPF, KNUDSON, MUMFORD et SAINT-DONAT, *Toroidal embeddings 1* (Springer Lecture Notes, n° 339, 1973); G. GONZALEZ-SPRINBERG, *Eventails en dimension 2 et transformé de Nash*, Publications de l'E.N.S., 1977.
- [12] H. A. SCHWARZ, *J. Reine Angew. Math.*, 75, 1872, p. 292-335; F. KLEIN, *The Icosahedron and the General 5th Degree Equation*, 1884, Dover, reprint, 1956.
- [13] J. MILNOR, *Ann. of Math. Studies*, 61 (*Singular Points of Complex Hypersurfaces*, Princeton University Press, 1968).
- [14] O. RIEMENSCHNEIDER, *Math. Z.*, 153, 1977, p. 37-50.
- [15] A. G. KUCHNIRENKO, *Invent. Math.*, 32, 1976, p. 1-31.
- [16] N. A'CAMPO, *Comm. Math. Helv.*, 50, 1975, p. 233-248.