

GÉOMÉTRIE ALGÈBRIQUE. — *Transformé de Nash et éventail de dimension 2.*

Note (\*) de M. Gerardo Gonzalez Spruijberg, présentée par M. Henri Cartan.

On montre qu'on peut désingulariser un éventail de dimension 2 par un nombre fini de transformations de Nash normalisées. Ceci répond à une question posée par J. Giraud et A. Hirschowitz.

*We show that it is possible to desingularize a two dimensional torus embedding by a finite number of normalized Nash transformations.*

Soit  $X$  un schéma intègre de type fini et séparé, sur un corps  $k$  de caractéristique 0. On pose  $d = \dim X$ . Soient  $\Omega_{X/k}$  le  $\mathcal{O}_X$ -module des différentielles relatives et  $\tilde{X} = \mathbf{P}(\Lambda^d \Omega_{X/k})$  le fibré projectif sur  $X$  défini par  $\Lambda^d \Omega_{X/k}$  [cf. (1)].

On considère l'ouvert  $U$  formé par les points lisses de  $X$ . Soit  $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$  l'application canonique. Alors  $\pi$  est un isomorphisme au-dessus de  $U$ .

DÉFINITION 1. — On appelle transformé de Nash de  $X$ , et on note  $\hat{X}$ , l'adhérence schématique de  $\pi^{-1}(U)$  dans  $\tilde{X}$ .

Si  $X$  est affine, on a le résultat suivant :

PROPOSITION 2. — Soient  $N$  un entier positif et  $I$  un idéal premier de  $k[Z_1, \dots, Z_N]$ . Posons  $B = k[Z_1, \dots, Z_N]$ ,  $A = B/I$ ,  $X = \text{Spec}(A)$  et  $Z = \text{Spec}(B)$ . Soient  $d = \dim(X)$  et  $c = N - d = \text{codim}_Z X$ . Soient  $f_1, \dots, f_c$  des éléments de  $I$  tels que  $df_1 \wedge \dots \wedge df_c \neq 0$  dans  $\Lambda^c \Omega_{B/k} \otimes_B K$ , où  $K$  est le corps de fractions de  $A$ . Alors le transformé de Nash  $\hat{X}$  de  $X$  s'obtient en éclatant l'idéal de  $A$  engendré par les images dans  $A$  des mineurs d'ordre  $c$  de la matrice jacobienne des  $f_1, \dots, f_c$ .

On notera que l'on n'exige pas que les  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, c$ , engendrent  $I$ . Pour un énoncé un peu plus général où l'on suppose seulement  $X$  réduit et équidimensionnel, voir (2).

Fixons maintenant les notations pour les éventails [cf. (3)]. Soient  $M$  un  $\mathbb{Z}$ -module libre de rang  $d$ ,  $M_{\mathbb{R}} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ ,  $M^{\vee}$  le dual de  $M$  et  $M_{\mathbb{R}}^{\vee} = M^{\vee} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ .

On appelle éventail l'intersection d'un cône convexe rationnel polyédral dans  $M_{\mathbb{R}}$  avec  $\mathbb{Z}^d$ . Soient  $\sigma_{\mathbb{R}} = \{x \in M_{\mathbb{R}} \mid l_i(x) \geq 0, i = 1, \dots, n\}$ , où  $l_i$  sont des formes linéaires à coefficients entiers,  $\sigma$  l'éventail  $\sigma_{\mathbb{R}} \cap \mathbb{Z}^d$ ,  $\check{\sigma}_{\mathbb{R}} = \{y \in M_{\mathbb{R}}^{\vee} \mid \langle y, x \rangle \geq 0, \forall x \in \sigma_{\mathbb{R}}\}$  et  $\check{\sigma} = \check{\sigma}_{\mathbb{R}} \cap \mathbb{Z}^d$ . On suppose que  $\sigma_{\mathbb{R}}$  ne contient aucun sous-espace vectoriel de  $M_{\mathbb{R}}$  de dimension  $> 0$ , et par suite que  $\check{\sigma}_{\mathbb{R}}$  n'est pas contenu dans un hyperplan de  $M_{\mathbb{R}}^{\vee}$ . On pose  $X_{\sigma} = \text{Spec}(k[\check{\sigma}])$ , où  $k[\check{\sigma}]$  est la  $k$ -algèbre du monoïde  $\check{\sigma}$ . Soient  $e_1, \dots, e_N$  une famille génératrice du monoïde  $\check{\sigma}$ , et  $r_i : \sum_j A_{ij} e_j = \sum_j B_{ij} e_j$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $A_{ij} \in \mathbb{N}$  et  $B_{ij} \in \mathbb{N}$ , une famille génératrice de relations. Alors on est dans la situation de la proposition 2 en prenant pour idéal  $I$  l'idéal engendré par les polynômes  $f_i = Z^{A_i} - Z^{B_i}$ ,  $i = 1, \dots, m$  où  $A_i = (A_{i1}, \dots, A_{iN})$ ,  $B_i = (B_{i1}, \dots, B_{iN})$ . Remarquons que dans ce cas  $X_{\sigma}$  est normal car  $\check{\sigma}$  est saturé.

LEMME 3. — Soit  $H$  une partie de  $\{1, \dots, N\}$  de cardinal  $d$ . Alors le mineur

$$J_H(f_1, \dots, f_c) = \det \left( \frac{\partial f_i}{\partial Z_j} \Big|_{X_{\sigma}} \right), \quad i = 1, \dots, c \text{ et } j \in H,$$

vaut

$$\frac{Z^{\Lambda_1} \dots Z^{\Lambda_c}}{Z_1 \dots Z_N} \det(R_{H}) Z_{H} x_{\sigma},$$

où  $Z_H = \prod_{j \in H} Z_j$  et  $R_{H}$  est la matrice  $(A_{ij} - B_{ij})$ ,  $i = 1, \dots, c$  et  $j \notin H$ .

Supposons que les  $f_i$ ,  $1 \leq i \leq c$  soient telles que sa matrice jacobienne soit de rang  $c$  dans  $A$  (ce qu'on peut toujours obtenir en réordonnant les  $f_i$ ). Alors le transformé de Nash  $\hat{X}_{\sigma}$  de  $X_{\sigma}$  est l'éclaté de  $X_{\sigma}$  de centre l'idéal  $\mathcal{A}$  engendré par les  $J_{H_i}(f_1, \dots, f_c)$  (prop. 2). Soit  $\tau$  le monoïdéal de  $\check{\sigma}$  correspondant à  $\mathcal{A}$ . On a la :

PROPOSITION 4. —  $\tau$  est le monoïdéal de  $\check{\sigma}$  engendré par les  $e_H = \sum_{i \in H} e_i$ , où  $H$  parcourt les parties à  $d$  éléments de  $\{1, \dots, N\}$  telles que les  $e_i$ ,  $i \in H$  soient linéairement indépendants dans  $M_{\mathbb{R}}^{\check{\sigma}}$ .

Il suffit donc, pour calculer  $\hat{X}_{\sigma}$ , de faire un choix convenable d'un ensemble de générateurs de  $\check{\sigma}$ .

Pour les éventails de dimension 2, on peut décrire facilement l'ensemble minimal de générateurs de  $\check{\sigma}$  en fonction de celui de  $\sigma$ . En effet, supposons  $\sigma_{\mathbb{R}}$  d'intérieur non vide, car sinon  $X_{\sigma}$  est lisse. Alors on peut choisir une base de  $M_{\mathbb{R}}$  de telle façon que  $\sigma_{\mathbb{R}}$  soit engendré par  $(1,0)$  et  $(p,n)$  avec  $p, n \in \mathbb{Z}$ ,  $0 \leq p < n$  et  $(n,p) = 1$ .

L'entier  $n$  est un invariant de  $\sigma$ . Soient  $\sigma'_{\mathbb{R}}$  l'enveloppe convexe de  $\sigma - \{0\}$  dans  $M_{\mathbb{R}}$  et  $\partial\sigma'_{\mathbb{R}}$  son bord. Alors l'ensemble minimal de générateurs de  $\sigma$  est l'ensemble des points à coordonnées entières appartenant aux faces bornées de  $\partial\sigma'_{\mathbb{R}}$  et on peut le décrire avec l'algorithme d'Euclide de  $n/p$ . On en déduit une description de l'ensemble minimal de générateurs de  $\check{\sigma}$ .

En général,  $\hat{X}_{\sigma}$  est recouvert canoniquement par des ouverts affines associés à des monoïdes non saturés, et on ne peut pas appliquer l'algorithme précédent pour déterminer à nouveau les ensembles minimaux de générateurs. En conséquence, il est difficile de calculer les monoïdeaux pour les transformés de Nash de ces ouverts affines.

Mais si on considère le transformé de Nash normalisé  $\hat{X}_{\sigma}^n$  de  $X_{\sigma}$ , on trouve qu'il est recouvert par des ouverts affines du même type que  $X_{\sigma}$ , et on peut démontrer le :

THÉORÈME 5. — On peut désingulariser  $X_{\sigma}$  par un nombre fini de transformations de Nash normalisées.

Idée de la preuve. — On sait que  $\hat{X}_{\sigma}^n$  est décrit par une décomposition polyédrale rationnelle (abrégé : découpage) de  $\sigma$  [cf. (3)]. On peut le décrire explicitement :

LEMME 6. — Soit  $\partial\tau'_{\mathbb{R}}$  le bord de l'enveloppe convexe de  $\tau' = \tau - 0$ . Alors le découpage de  $\sigma$  est déterminé par les droites perpendiculaires aux faces de  $\partial\tau'_{\mathbb{R}}$ .

En ayant la description de  $\partial\check{\sigma}'_{\mathbb{R}}$  en fonction de  $\partial\sigma'_{\mathbb{R}}$ , on peut démontrer le :

LEMME 7. — Soient  $P_i$ ,  $1 \leq i \leq g(\sigma)$  les éléments de l'ensemble minimal de générateurs de  $\sigma$ , avec  $P_1 = (1,0)$  et  $P_{g(\sigma)} = (p,n)$ . Soient  $l_1, \dots, l_t$  les droites du découpage de  $\sigma$ . Alors :

(a)  $t \geq 2$ ; et  $t = 2$  si et seulement si  $X_{\sigma}$  est lisse;

(b) chaque droite  $l_i$  ( $1 \leq i \leq t$ ) passe ou bien par un  $P_j$  ( $1 \leq j \leq g(\sigma)$ ) ou bien par la somme de deux points consécutifs  $P_j + P_{j+1}$  avec  $2 \leq j \leq g(\sigma) - 2$ .

Finalement on en déduit que pour chaque  $\sigma_i$  correspondant à chaque ouvert affine du recouvrement de  $\hat{X}_\sigma^n$ , le cardinal  $g(\sigma_i)$  de l'ensemble minimal de générateurs de  $\sigma_i$  est strictement plus petit que  $g(\sigma)$  (si  $X_\sigma$  n'est pas déjà lisse), d'où le théorème 5.

(\*) Séance du 27 octobre 1976.

(<sup>1</sup>) A. GROTHENDIECK, *Éléments de géométrie algébrique*, II (Pub. Math. I.H.E.S., n° 8).

(<sup>2</sup>) A. NOBILE, *Some Properties of the Nash Blowing-up*, Pac. J. Math., 60, n° 1, 1975.

(<sup>3</sup>) KEMPF, KNUDSEN, MUMFORD et SAINT-DONAT, *Toroidal Embeddings I* (Lecture Notes in math., n° 339, Springer-Verlag 1973).

Université de Paris-Sud,  
Centre d'Orsay,  
Mathématique,  
Bât. 425,  
91405 Orsay.