Université Grenoble Alpes

Examen de MAT133

Janvier 2022

Durée : 2h00

Sans calculatrice, ni document *(No calculator, no document)* .

Le barème est donné à titre indicatif *(The rating scale is tentative)*

Exercice 1 (5 points)

(1) Pour chacune des fonctions suivantes, donner le domaine de définition, puis calculer la dérivée. Les domaines de dérivabilité ne sont pas demandés. (*For any of the following maps, find its domain of definition, then compute its derivative. The domain of derivability has not to be given*).

$$f(x) = 3xe^{x^2-x}$$

$$g(x) = 5\sqrt{x^2+1}$$

$$h(x) = \ln(x^3+x^2)$$

(2) Calculer les dérivées partielles premières de $f(x, y) = 3xy^2 + e^{xy} - 6x$. (*Compute the partial derivatives of f*)

Exercice 2 (5 points)

(1) Pour chacune des fonctions suivantes, donner le domaine de définition et calculer une primitive (*For any of the following maps, find its domain of definition and compute a primitive of it).*

$$f(x) = \frac{3x}{1+5x^2}$$

$$g(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$h(x) = (x+1)e^{x^2+2x}$$

(2) Calculer les intégrales suivantes *(Compute the following integrals).*

$$\int_0^1 (4t^3 + t - 3)dt$$

$$\int_0^1 \frac{e^t}{e^t+1}dt$$

Exercice 3 (4 points)

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 9 \end{pmatrix}$.

(1) Calculer si possible *(Compute if possible)* $A \times B$ et $B \times A$. En cas d'impossibilité, expliquer

pourquoi c'est impossible *(If it is not possible to compute it, explain why it not possible).*

(2) Montrer que A est inversible et calculer son inverse A^{-1} *(Show that A is inversible and compute its inverse).*

(3) On pose $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice identité. Calculer $A \times (A - 2I)$, puis retrouver le résultat de la question (2) *(Compute $A \times (A - 2I)$, then recover the result of question (2)).*

Exercice 4 (6 points)
On considère la suite *(the sequence)* définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 4u_n - 3$.

(1) Calculer u_1 et u_2. En déduire que (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique *(Show that (u_n) is not an arithmetic sequene, or a geometric one).*

(2) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 1$.

2a) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n. Montrer que (v_n) est une suite géométrique.

2b) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.

2c) La suite (u_n) est-elle décroissante ? croissante ?

(3) Déterminer le plus petit entier *(Find the smallest integer)* $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N \geq 10000$.

Indications numériques (Numerical help) : $\dfrac{\ln(999)}{\ln(4)} \sim 4,98$; $\dfrac{\ln(9999)}{\ln(4)} \sim 6,64$.