Une famille de représentations polynomiales associée à une représentation donnée, et leurs caractères

On se donne (V,ρ) une représentation de dimension n du groupe fini G. Dans la suite on se donne une base $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ de V, et pour tout $g\in G$, on note $R_{\mathcal{B}}(g)$ la matrice de $\rho(g)$ dans $\mathcal{B}$.

On note A l'algèbre $\mathbb{C}[X_1,\cdots,X_n]$, et, pour tout $d\in\mathbb{N}$, H_d le sous–espace vectoriel des polynômes homogènes de degré d, de sorte que $A=\oplus_{d\in\mathbb{N}}H_d$. Une base de H_d est formée des monômes $X_1^{i_1}\dots X_n^{i_n}$ tels que $i_k\in\mathbb{N}$ et $\sum_{k=1}^n i_k=d$. Ainsi H_d est de dimension $\begin{pmatrix} d+n-1 \\ d\end{pmatrix}$ finie (le nombre de n–uplets $(i_k)_k$ est le nombre de façons de répartir d boules indiscernables dans n tiroirs).

Proposition 1 *On définit une action linéaire de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *sur* A *(par automorphismes d'algèbres) en posant: pour tous* $M\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *et* $P\in A$, $\Phi(M)(P)(X)=P(X'_1,\dots,X'_n)$*, où le vecteur ligne* X' *est défini comme le produit* $X\cdot M$.

dém: On a bien sûr $\Phi(I_n)=\mathrm{id}_A$. Pour $M\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ donnée, la propriété universelle de l'anneau de polynômes A assure que $\Phi(M)$ est l'unique morphisme de $\mathbb{C}$–algèbres qui envoie chaque indéterminée X_i sur $X'_i=\sum_{k=1}^n m_{ki}X_k$ *(cad., on copie l'action de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *sur la base canonique de* $\mathbb{C}^n$*, et on la prolonge à tout* A*).* Soient $M,M'\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrons que $\Phi(MM')=\Phi(M)\circ\Phi(M')$. Pour cela, il est suffisant que ces morphismes coïncident en chaque X_i. Or, on a $\Phi(M')(X_i)=Q(X)=\sum_{k=1}^n m'_{ki}X_k$, donc par définition $\Phi(M)\circ\Phi(M')$ envoie X_i sur $\Phi(M)(Q)(X)=\sum_{k=1}^n m'_{ki}(\sum_{l=1}^n m_{lk}X_l)=\sum_{l=1}^n(\sum_{k=1}^n m_{lk}m'_{ki})X_l=\Phi(MM')(X_i)$, ce qui conclut.

Or ces identités entraînent que $\Phi(M)$ et $\Phi(M^{-1})$ sont inverses l'un de l'autre, donc dans $\mathrm{Aut}(A)$: l'action Φ se fait par automorphismes d'algèbre.

De plus, cette action sur A envoie les X_i sur des polynômes homogènes de degré 1, et les produits sur les produits des images, donc elle stabilise chaque composante H_d; on note Φ_d le morphisme qui donne l'action induite sur H_d. En posant $\rho_d^{\mathcal{B}}=\Phi_d\circ R_{\mathcal{B}}$, on définit donc **des représentations** $(H_d,\rho_d^{\mathcal{B}})$ **de** G, qui dépendent du choix de la base $\mathcal{B}$. Clairement $\rho_0^{\mathcal{B}}$ est triviale et $\rho_1^{\mathcal{B}}$ est équivalente à ρ.

Proposition 2 *Si* $\mathcal{B}'$ *est une autre base de* V *et* P *désigne la matrice de passage de* $\mathcal{B}$ *à* $\mathcal{B}'$*, alors pour tout* $d\in\mathbb{N}$*, les deux représentations* $(H_d,\rho_d^{\mathcal{B}})$ *et* $(H_d,\rho_d^{\mathcal{B}'})$ *de* G *sont équivalentes, via l'isomorphisme* $\Phi_d(P)$.

dém: Soit $d\in\mathbb{N}$. On a pour tout $g\in G$: $R_{\mathcal{B}'}(g)=P^{-1}R_{\mathcal{B}}(g)P$, donc $\rho_d^{\mathcal{B}'}(g)=\Phi_d\big(R_{\mathcal{B}'}(g)\big)=\Phi_d(P)^{-1}\circ\Phi_d\big(R_{\mathcal{B}}(g)\big)\circ\Phi_d(P)=\Phi_d(P)^{-1}\circ\rho_d^{\mathcal{B}}(g)\circ\Phi_d(P)$, *cqfd.*

On note $\chi_{V,d}$ **le caractère** (commun) de ces représentations de G sur H_d $(d\in\mathbb{N})$.

Proposition 3 *Soit $g \in G$.*
1) On a $\chi_{V,0} = 1$, $\chi_{V,1} = \chi_V$, $\chi_{V,2}(g) = \frac{1}{2}\big(\chi_V(g^2) + \chi_V(g)^2\big)$.
2) On a $\dfrac{1}{\det(\mathrm{id}_V - X\rho(g))} = \displaystyle\sum_{d\geq 0} \chi_{V,d}(g)X^d$, *dans l'algèbre* $\mathbb{C}[[X]]$ *des séries formelles.*

dém: Par la prop. 2, on peut choisir n'importe quelle base $\mathcal{B}$ de V pour calculer le caractère $\chi_{V,d}$ de $\rho_d^{\mathcal{B}}$. L'élément g étant fixé, on choisit $\mathcal{B} = (e_i)_i$ une base de vecteurs propres pour $\rho(g)$: pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$ on a $\rho(g)(e_i) = \lambda_i e_i$. Alors $\rho_d(g)$ envoie chaque monôme $X_1^{i_1} \ldots X_n^{i_n}$ de H_d sur son multiple $(\lambda_1^{i_1} \cdots \lambda_n^{i_n})X_1^{i_1} \ldots X_n^{i_n}$, de sorte que

$$\chi_{V,d}(g) = \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in\mathbb{N}^n,\, \sum_k i_k = d} \lambda_1^{i_1} \ldots \lambda_n^{i_n}\,.$$

1) Le résultat est immédiat pour $d = 0$ ou 1. Pour $d = 2$, on a $\chi_{V,2}(g) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n} \lambda_i\lambda_j = \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^n \lambda_i^2) + \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^n \lambda_i)^2 = \frac{1}{2}\big(\chi_V(g^2) + \chi_V(g)^2\big)$.
2) La matrice de $\mathrm{id}_V - X\rho(g)$ dans $\mathcal{B}$ est diagonale de coefficients les $1 - X\lambda_i$ ($1 \leq i \leq n$), donc son déterminant est $\prod_{i=1}^n (1 - X\lambda_i)$, polynôme de coefficient constant 1, et d'inverse dans $\mathbb{C}[[X]]$ la série formelle produit (de Cauchy) $\prod_{i=1}^n \big(\frac{1}{1-X\lambda_i}\big) = \prod_{i=1}^n \big(\sum_{k\geq 0} \lambda_i^k X^k\big)$. On obtient la série formelle $\sum_{d\geq 0} c_d X^d$, avec $c_d = \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in\mathbb{N}^n, \sum_k i_k = d} \lambda_1^{i_1} \ldots \lambda_n^{i_n}$, c'est–à–dire $\sum_{d\geq 0} \chi_{V,d}(g)X^d$.

Remarques 1. Pour $g = 1$, la formule 2) s'écrit $\frac{1}{(1-X)^n} = \sum_{d\geq 0} \dim H_d X^d$ (c'est la *série de Hilbert de l'algèbre graduée A*); on retrouve la valeur $\dbinom{d+n-1}{d}$ de $\dim H_d$ en dérivant $n-1$ fois la série $\dfrac{1}{1-X} = \displaystyle\sum_{d\geq 0} X^d$.

2. Notons K_d le polynôme symétrique $\sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in\mathbb{N}^n, \sum_k i_k = d} X_1^{i_1} \ldots X_n^{i_n}$, S_j le $j^{\text{ème}}$ polynôme de Newton $\sum_{i=1}^n X_i^j$ et $D(X) = \prod_{i=1}^n (1 - X_i X)$. En égalant les séries formelles $(\frac{1}{D})'$ et $\frac{-D'}{D} \times \frac{1}{D}$ de $A[[X]]$, on obtient les relations $dK_d = \sum_{j=1}^d S_j K_{d-j}$ ($d \geq 1$). Après évaluation de chaque X_i en λ_i, il vient la *relation de récurrence*

$$d\chi_{V,d}(g) = \sum_{j=1}^{d} \chi(g^j)\chi_{V,d-j}(g)\,. \qquad (*)$$

On a ainsi (ou par calcul direct) $\chi_{V,3}(g) = \frac{1}{2}\chi_V(g)\chi_V(g^2) + \frac{1}{6}\chi_V(g)^3 + \frac{1}{3}\chi_V(g^3)$,..
Exercice: a) Pour $G = \mathfrak{S}_3$ et $V = \mathbb{C}^3$ la représentation canonique, calculer les séries formelles associées aux $\chi_{V,d}(\sigma)$ (une par classe de conjugaison de $\mathfrak{S}_3$).
b) De même pour $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $V = \mathbb{C}^2$, où $\bar{1}$ agit par $-\mathrm{id}_V$; montrer que $\chi_d(\bar{1}) = (-1)^d(d+1) = (-1)^d\chi_d(\bar{0})$ (et que $A^G = \mathbb{C}[X_1^2, X_2^2, X_1X_2]$, non factoriel).