

Plan du cours d'Algèbre 2, M1, 2015-16

Représentations des groupes finis

Introduction, repères historiques

Ch 1 Représentations et caractères (I)

I PREMIÈRES DÉFINITIONS

- A) Les représentations de G
- B) L'algèbre $\mathbb{C}[G]$
- C) Morphismes de représentations

II REPRÉSENTATIONS IRRÉDUCTIBLES, RÉDUCTIBILITÉ

- A) Représentations irréductibles
- B) Complète réductibilité
- C) Le lemme de Schur

III MORPHISMES (2)

IV CARACTÈRES (1)

- A) Définitions, premières propriétés
- B) *Intermède: une famille de représentations polynomiales associée à une représentation donnée, leurs caractères*
Éléments sur l'algèbre des séries formelles et sur les polynômes symétriques

V ORTHOGONALITÉ ET APPLICATION AUX REPRÉSENTATIONS

- A) Orthogonalité et décomposition des représentations, formule de Molien
- B) La décomposition canonique d'une représentation
- C) Décomposition de la représentation régulière

Ch 2 Le cas abélien et la transformée de Fourier (discrète)

I LE GROUPE DUAL ET LE CAS ABÉLIEN

- A) Le groupe dual d'un groupe fini
- B) La transformée de Fourier sur G abélien fini
- C) Application: structure des groupes abéliens finis et du groupe dual

II LA TRANSFORMÉE DE FOURIER : DEUX CAS NOTABLES

- A) Point de vue matriciel, endomorphisme associé et la transformée de Fourier discrète (TFD)
- B) Un autre exemple: la transformée de Walsh
- C) La TFD : traduction polynomiale
- D) La transformée de Fourier rapide (FFT et FWT)
- E) Application de la FFT au calcul du produit de polynômes

Ch 3 Algèbre $\mathbb{C}[G]$ et caractères (II)

I LE CENTRE DE $\mathbb{C}[G]$ ET L'ALGÈBRE $\mathbb{C}[G]$

- A) Une base orthonormée de $\text{Cent}\mathbb{C}[G]$
- B) Structure de l'algèbre $\mathbb{C}[G]$

II LA TABLE DES CARACTÈRES DE G

- A) Définition et propriétés
 - B) Exemples: \mathfrak{A}_4 et \mathfrak{S}_4
- Rappel: théorèmes de Sylow

III APPLICATION: CRITÈRE DE SIMPLICITÉ

Ch 4 Intégralité et applications

I ENTIERS ALGÈBRIQUES

- A) Définition, premiers exemples
- B) L'anneau des entiers
- C) Conjugués des entiers algébriques

II INTÉGRALITÉ DES CARACTÈRES

III LE THÉORÈME $p^a q^b$ DE BURNSIDE

- A) Un critère de non-simplicité
- B) Groupes résolubles
- C) Le théorème de Burnside

Ch 5 Compléments (*sous réserve*)

- A) Rappel: l'extension cyclotomique $\mathbb{Q}(\zeta)$
- B) Des zéros dans la table de G
- C) Rationalité
- D) Les groupes simples de petit cardinal

Références principales:

- Jean-Pierre Serre, *Représentations linéaires des groupes finis* ch1,2,5,6, sans produit tensoriel
- Pierre Colmez, *Éléments d'analyse et d'algèbre*, 2009 ou 2011, chI,1. et 2., et annexe H2
- Gabriel Peyré, *L'algèbre discrète de la transformée de Fourier*, 2004, ch I, II, VII et VIII.