UNIVERSITÉ
Grenoble
Alpes

MAT302, cours n°2

Séries à termes positifs

Odile Garotta

8 septembre 2021

Chapitre 1 : Introduction aux séries

1 Motivation

1.1 Le paradoxe de Zénon d'Élée

1.2 La série harmonique

1.3 Séries entières

1.4 Des calculs étranges

2 Notions et propriétés de base

2.1 Définitions et notations

2.2 Propriétés élémentaires

L'indice n dans la sommation est un indice muet. On peut lui préférer d'autres indices comme k, p etc. et on peut aussi changer d'indice en posant par exemple $n = 2p$ pour écrire $(\sum_{n \text{ pair}} u_n) = (\sum_p u_{2p})$. Dans tous les cas, l'indice de sommation ne peut pas apparaître en dehors de la somme. S'il le fait, c'est souvent le signe d'une erreur dans le calcul ou les concepts. Cela peut aussi être dû à une mauvaise notation où n sert à deux choses différentes... ce qui amènera à une erreur à coup sûr. En particulier, la somme d'une série convergente, $\sum_n u_n$ ne peut pas dépendre de n !

La proposition suivante insiste sur le fait que la *nature* d'une série est une propriété asymptotique et ne dépend pas des premiers termes de la série (ce qui n'est évidemment pas le cas de sa *somme* en cas de convergence).

Proposition 1.1. *Soit* $(\sum_{n\geq 0} u_n)$ *une série. Pour tous rangs* n_1 *et* n_2 *dans* $\mathbb{N}$*, les séries* $(\sum_{n\geq n_1} u_n)$ *et* $(\sum_{n\geq n_2} u_n)$ *ont même nature.*

Démonstration : On regarde de nouveau les sommes partielles. Si $N \geq n_2 \geq n_1$ on a

$$\sum_{n=n_1}^{N} u_n = \sum_{n=n_2}^{N} u_n + \left(\sum_{n=n_1}^{n_2-1} u_n\right) \quad .$$

Les deux suites des sommes partielles ne diffèrent ainsi que d'une constante $\displaystyle\sum_{n=n_1}^{n_2-1} u_n$: donc l'une converge dès que l'autre converge. $\square$

Le critère de divergence suivant est important.

Proposition 1.2. *Soit* $(\sum_{n\geq 0} u_n)$ *une série de termes complexes. Si elle est convergente alors* (u_n) *tend vers* 0*. Autrement dit, si* (u_n) *ne tend pas vers* 0 *alors* $(\sum_{n\geq 0} u_n)$ *diverge. On parle alors de divergence grossière ou triviale.*

Démonstration : Par hypothèse la suite $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$ tend vers une limite S. Alors $u_n = S_n - S_{n-1}$ tend vers $S - S = 0$. $\square$

Il s'agit d'un critère de divergence puisque prouver que (u_n) tend vers 0 n'implique pas que $(\sum u_n)$ converge. Il s'agit pourtant d'une erreur très courante que beaucoup trop d'étudiants font malgré les avertissements.

Exemples : La série $1-1+1-1+1-1+\ldots$ mentionnée par Euler est donc divergente. Il est normal de ne pas pouvoir définir précisément sa somme. De même, le calcul $1+2+4+8+\ldots=-1$ ne veut donc rien dire. Pour les séries $(\sum 1/2^n)$ et $(\sum 1/n)$, le terme général tend vers $0\ldots$ et cela ne permet pas d'en déduire leur nature. D'ailleurs la première converge alors que la seconde diverge.

Nous allons passer une partie de ce cours sur les séries *à termes* *positifs*. En plus de l'aspect intuitif, une des raisons en est que leur étude est une étape clé dans l'étude générale des séries.

Définition 1.3. *Soit* $(\sum_n u_n)$ *une série de termes complexes, on dit qu'elle est* absolument convergente *si* $(\sum_n |u_n|)$ *est une série convergente de réels positifs. Dans le cas contraire, on dit qu'elle* diverge en valeur absolue.

La propriété suivante est remarquable et très utile.

Proposition 1.4. *Pour une série de terme général complexe,*

la convergence absolue entraîne la convergence dans $\mathbb{C}$*.*

⚠ La réciproque est fausse (cf. chapitre 3).

Démonstration : On utilise le *critère de convergence de Cauchy* dans $\mathbb{C}$: les sommes partielles $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$ forment une suite convergente si et seulement si elles forment une *suite de Cauchy*, c'est-à-dire si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0\ , \quad \exists N_0 \in \mathbb{N}\ , \quad \forall P > Q \geq N_0\ , \quad |S_P - S_Q| \leq \varepsilon\ .$$

Or

$$|S_P - S_Q| = \left| \sum_{n=Q+1}^{P} u_n \right| \leq \sum_{n=Q+1}^{P} |u_n| = \tilde{S}_P - \tilde{S}_Q$$

où on note $\tilde{S}_N = \sum_{n=0}^{N} |u_n|$ la somme partielle de la série $(\sum_{n\geq 0} |u_n|)$. Puisque cette série $(\sum_n |u_n|)$ converge, $(\tilde{S}_N)$ vérifie le critère de Cauchy et la majoration ci-dessus montre que c'est aussi le cas pour (S_N). $\square$

3 Les séries géométriques

Les séries géométriques forment un type de séries très simple et important. On les rencontre couramment, et elles serviront de séries de référence pour l'étude d'autres séries.

Définition 1.5. *Soit* $a \in \mathbb{C}$*. On appelle* série géométrique de raison a *une série de la forme* $(\sum_{n \geq n_0} a^n)$*.*

Le cœur de cette section est la *formule* suivante qu'il est important de connaître. Notons qu'elle semble avoir été connue des Égyptiens (papyrus de 1650 av. JC) et qu'elle apparaît comme la proposition 35 des éléments d'Euclide (300 av. JC).

Proposition 1.6. *Soient* $p \geq q$ *deux entiers de* $\mathbb{Z}$ *et soit* $a \in \mathbb{C}$ *avec* $a \neq 1$*. Alors*

$$\sum_{n=q}^{p} a^n = a^q + a^{q+1} + \ldots + a^p = \frac{a^q - a^{p+1}}{1-a} \ .$$

Démonstration : On peut démontrer cette formule par récurrence sur p ou simplement en constatant que

$$\begin{aligned} & (1-a)(a^q + a^{q+1} + \ldots + a^p) \\ = \ & a^q - a^{q+1} + a^{q+1} - a^{q+2} + \ldots + a^p - a^{p+1} \\ = \ & a^q - a^{p+1} \ . \end{aligned}$$

□

On peut retenir la formule ci-dessus par la phrase

Premier écrit moins premier pas écrit sur un moins la raison.

Bien entendu, le cas $a = 1$ est trivial mais doit toujours être traité à part.

On en déduit le résultat suivant.

Théorème 1.7. *La série géométrique* $(\sum_n a^n)$ *converge si et seulement si* $|a| < 1$*, et dans ce cas la somme est donnée par* $\sum_{n \geq n_0} a^n = a^{n_0} \frac{1}{1-a}$ *.*

Démonstration : On a $(\sum_{n \geq n_0} a^n) = (a^{n_0} \cdot \sum_{n \geq 0} a^n)$, ce qui ramène à $n_0 = 0$. Notons $(S_N = \sum_{n=0}^{N} a^n)$ les sommes partielles. Si $a = 1$, alors

$S_N = N+1 \to +\infty$ donc la série diverge. Si $a \neq 1$, alors la formule ci-dessus donne $S_N = \frac{1-a^{N+1}}{1-a}$ qui a une limite finie si et seulement si $|a| < 1$, et dans ce cas $a^{N+1} \to 0$. $\square$

Remarque : Comme $a^n \to 0$ si et seulement si $|a| < 1$, on obtient qu'une série géométrique converge *si et seulement si* son terme général tend vers 0.

Exemple : On a donc proprement justifié que $(\sum_{n\geq 1} 1/2^n)$ converge et que

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-1/2} = 1\ .$$

Chapitre 2 : Séries à termes positifs

Nous avons vu que la convergence en valeur absolue d'une série $(\sum u_n)$ implique sa convergence. De ce fait, on est ramené à l'étude d'une série de termes réels positifs $(\sum |u_n|)$. Le but de ce chapitre est de donner des outils pour étudier cette convergence.

⚠ La plupart des résultats et critères énoncés dans ce chapitre sont spécifiques aux séries *à termes positifs* et ne doivent pas être utilisés dans les cas où le signe du terme général varie. On notera quand même que :

- comme $(\sum(-u_n))$ et $(\sum u_n)$ ont même nature, on peut aussi appliquer les résultats à des séries à termes négatifs.
- comme $(\sum_{n\geq N} u_n)$ et $(\sum_{n\geq 0} u_n)$ ont même nature, on peut appliquer les résultats même si les premiers termes ne sont pas de signe constant.

En résumé, *on écrira les théorèmes dans le cadre des séries à termes positifs, mais ils restent valables si les termes sont tous* réels *et* de même signe à partir d'un certain rang.

Commençons par noter que si $(\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n)$ est une série de termes positifs, alors *les sommes partielles* $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$ *forment une suite croissante* et seuls deux comportements sont possibles : S_N tend vers l'infini et diverge, ou (S_N) est bornée et converge.

Notons ici cette caractérisation qui en découle de la convergence de la série :

Proposition 2.1. *Soit* $(\sum u_n)$ *une série de réels positifs. On note* $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$*. Alors la série* $(\sum_{n\geq 0} u_n)$ *converge si et seulement si la suite des sommes partielles* (S_N) *est majorée. Dans ce cas sa somme est* $\sup_N S_N$*.*

Démonstration : Par définition, la série $(\sum_{n\geq 0} u_n)$ converge si et seulement si la suite (S_N) admet une limite finie. Or cette suite est croissante (les u_n sont positifs) donc on sait que si elle est majorée elle converge (vers sa borne sup). $\square$

1 Critères de comparaison

En considérant la suite croissante des sommes partielles pour les séries à termes positifs on obtient un premier énoncé :

Proposition 2.2. *Soient* $(\sum u_n)$ *et* $(\sum v_n)$ ***deux séries de réels positifs*** *telles que pour tout* n $u_n \geq v_n \geq 0$*. Si* $(\sum u_n)$ *converge, alors* $(\sum v_n)$ *converge et leurs sommes respectives* U *et* V *vérifient* $U \geq V$*. Si* $(\sum v_n)$ *diverge, alors* $(\sum u_n)$ *diverge.*

Démonstration : Supposons que $(\sum u_n)$ converge. Par la proposition ci-dessus, chaque somme partielle $\sum_{n=0}^{N} v_n$ est majorée par $\sum_{n=0}^{N} u_n$, elle-même majorée par $U = \sum_{n\geq 0} u_n$. Donc la série de réels positifs $(\sum_{n\geq 0} v_n)$ converge vers un réel $V \leq U$. La deuxième partie de la proposition est la contraposée de la première. $\square$