

Contrôle continu du 29 septembre 2006

Durée: 2 heures
Sans document; les exercices sont indépendants.
On justifiera soigneusement les réponses.

Question de cours

1. Soient G un groupe, H un sous-groupe distingué de G . Décrire l'ensemble G/H , montrer l'existence de la loi quotient sur G/H et montrer que cette loi fait de G/H un groupe.

Exercices

2. Soient $\phi: G \rightarrow F$ un morphisme de groupes, et X une partie de G . Montrer que l'image par ϕ du sous-groupe engendré par X est le sous-groupe de F engendré par $\phi(X)$.

3. Soient G un groupe et x un élément d'ordre 2 dans G . On note C le centre de G . Montrer que le sous-groupe $\langle x \rangle$ est distingué dans G si et seulement si $x \in C$.

4. Déterminer, s'il en existe, tous les sous-groupes H du groupe $G = \mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$, qui vérifient $G/H \simeq \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

5. Soit G un groupe. On note $\text{Aut } G$ l'ensemble des *automorphismes* de G , c'est-à-dire des isomorphismes de G dans lui-même.

a) Montrer que $\text{Aut } G$ est un groupe pour la composition des applications.

Pour $g \in G$, on note i_g l'application $x \mapsto gxg^{-1}$ de G dans G . On note $\text{Int } G$ l'ensemble des applications i_g , où $g \in G$.

b) Montrer que pour tout $g \in G$, on a $i_g \in \text{Aut } G$.

c) Soit $\varphi: G \rightarrow \text{Aut } G$ l'application $g \mapsto i_g$. Montrer que φ est un morphisme et écrire sa factorisation canonique. Quel isomorphisme de groupes obtient-on?

d) Étant donné $a \in \text{Aut } G$ et $g \in G$, expliciter l'automorphisme $a \circ i_g \circ a^{-1}$.

e) Le sous-groupe $\text{Int } G$ de $\text{Aut } G$ est-il distingué?

T.S.V.P.

6. On note G le groupe abélien $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, et H le sous-groupe de G engendré par $h = (\bar{1}, \bar{2})$.

a) Le groupe G est-il cyclique?

b) Déterminer le sous-groupe H et l'indice $[G:H]$.

c) Soit $g = (\bar{1}, \bar{1})$. Déterminer l'ordre de la classe \bar{g} de g dans le groupe G/H .

d) Le groupe G/H est-il cyclique?
