
Examen MAT302
le 4 janvier 2022 de 17h à 19h

Tous documents et dispositifs électroniques sont interdits, seule une feuille A4 manuscrite est autorisée. Toutes les réponses doivent être justifiées et la qualité de la rédaction sera prise en compte.

Exercice 1. Étudier la convergence des séries $(\sum u_n)$ suivantes, où on pose, pour $n \geq 2$:

$$\text{a) } u_n = \frac{\sqrt{n+1} \cos n}{n^2 + 2n} ; \quad \text{b) } u_n = \left(1 + \frac{1}{\ln n}\right)^n ; \quad \text{c) } u_n = \frac{n^3}{e^n}.$$

Exercice 2. Pour tout entier $n \geq 2$ un entier, on pose

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \quad v_n = \frac{(-1)^n \sqrt{n} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n} + (-1)^n}.$$

1. Étudier la convergence de la série $(\sum u_n)$.
2. Calculer un équivalent simple de $w_n = u_n - v_n$. Que peut-on dire du signe de w_n ? En déduire la nature de la série $(\sum w_n)$.
3. En déduire la nature de $(\sum v_n)$. Les suites (u_n) et (v_n) sont-elles équivalentes? Quel commentaire pouvez-vous faire sur le résultat obtenu?

Exercice 3.

1. Déterminer une primitive de $x \mapsto \frac{x}{(x-1)(x+1)^2}$ sur $]1, +\infty[$.
2. Montrer que l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{x}{(x-1)(x+1)^2} dx$ converge et calculer sa valeur.

Exercice 4. Les intégrales généralisées suivantes sont-elles convergentes?

$$\text{a) } \int_0^2 \frac{\ln x}{2-x} dx ; \quad \text{b) } \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x + \sqrt{x}} dx.$$

Exercice 5. On considère la fonction $f:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\sin^3 x}{x^2}, \quad x > 0.$$

1. Montrer que f est intégrable sur $]0, +\infty[$. On pose dans la suite

$$J = \int_0^{+\infty} f(x) dx.$$

2. Linéariser $\sin^3 x$.

3. Soit $\varepsilon > 0$. À l'aide de la question 2. et d'un changement de variable, montrer que

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} f(x) dx = \frac{3}{4} \int_{\varepsilon}^{3\varepsilon} \frac{\sin x}{x^2} dx.$$

4. Montrer que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{3\varepsilon} \frac{\sin x - x}{x^2} dx = 0.$$

(on pourra utiliser un développement limité en 0)

5. En déduire la valeur de J .

<i>Barème indicatif : 4/5/ 2,5/ 3/ 5,5</i>
--