MAT302 Examen

le 26 juin 2023 de 12h15 à 14h15

Tous documents et dispositifs électroniques sont interdits. **Toutes les réponses doivent être justifiées** *et la qualité de la rédaction sera prise en compte.*

Exercice 1. Étudier la convergence des séries $(\sum u_n)$ suivantes, où on pose, pour $n \geq 2$:

$$\text{a) } u_n = \frac{(-2)^n \cos n}{3^n + n}\ ; \qquad \text{b) } u_n = \frac{e^{n+1}}{n!}\ ; \qquad \text{c) } u_n = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n^2}.$$

Exercice 2. Soit $\alpha > 0$. Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$.

1. Étudier en fonction de α la convergence absolue de la série $(\sum u_n)$.
2. Étudier en fonction de α la convergence simple de la série $(\sum u_n)$.

Exercice 3. Les intégrales généralisées suivantes sont-elles convergentes ?

$$\text{a) } \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^{2/3}(x-2)^{2/3}}\ ; \qquad \text{b) } \int_1^{+\infty} \sqrt{x}\, e^{-x} dx\,.$$

$\boxed{\textit{T.S.V.P.}}$

Exercice 4. On considère la fonction $f\colon t \mapsto \dfrac{\ln|1-t^3|}{t^3}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f sur $\mathbb{R}_+$.

2. Montrer que la fonction $F\colon x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ est bien définie sur $[0,1]$ (cad. que chaque $F(x)$ correspond à une intégrale généralisée convergente).

3. Soit $x \in]0,1[$. En intégrant par parties, exprimer $F(x)$ à l'aide de l'intégrale d'une fraction rationnelle sur $[0,x]$.

4. Trouver la décomposition en éléments simples de $\dfrac{3}{1-t^3}$.

5. Calculer une primitive de $t \mapsto \dfrac{3}{1-t^3}$ sur l'intervalle $[0,1[$.

6. En déduire une expression de $F(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

7. Montrer que $F(1) = -\dfrac{3}{4}\ln 3 - \dfrac{\pi\sqrt{3}}{12}$.

Barème indicatif : 4.5/3/ 3.5/ 9