Examen MAT302

le 18 juin 2021 de 14h30 à 16h30

Tous documents et dispositifs électroniques sont interdits, **seule une feuille A4 recto-verso manuscrite est autorisée. Toutes les réponses doivent être justifiées** *et la qualité de la rédaction sera prise en compte.*

Autour du cours. Soient b et $x_0 < b$ des réels. Étudier en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergence de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{x_0}^{b} \frac{dx}{(x-x_0)^\alpha}$ (donner l'argument complet et non le résultat du cours).

Exercice 1. Étudier la convergence des séries suivantes :

$$\text{a) } \sum_{n\geq 1}(1-e^{1/n^2})\cos n\ ; \qquad \text{b) } \sum_{n\geq 0}\frac{((2n)!)^{3/2}}{(3n+1)!}\ ; \qquad \text{c) } \sum_{n\geq 3}\frac{(-1)^n}{\ln n + (-1)^n}\,.$$

Exercice 2. On souhaite montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

1. Justifier la convergence de la série ci–dessus.
   Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2}dt$.
2. Calculer J_0.
3. Montrer que $J_n \to_{n\to\infty} 0$ (on pourra majorer la fonction sous le signe intégrale).
4. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $J_{n+1} - J_n$.
5. Pour $N \in \mathbb{N}$, en déduire une expression de $S_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{2n+1}$.
6. Conclure.

$\boxed{T.S.V.P.}$

Exercice 3. Pour $x > 0$ on pose $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^3+6x^2+9x}$.

1. Quelle est la nature de l'intégrale $\int_2^{+\infty} f(x)dx$? *On demande une réponse par une méthode rapide ne nécessitant pas le calcul d'une intégrale.*

2. Trouver la décomposition en éléments simples de $f(x)$.

3. Est–il correct d'en déduire qu'il existe des réels a, b, c tels que

$$\int_2^{+\infty} \frac{2x+1}{x^3+6x^2+9x}\,dx = a\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x} + b\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x+3} + c\int_2^{+\infty} \frac{dx}{(x+3)^2} \ ?$$

4. Montrer que $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{9}\ln\left(\frac{5}{2}\right) + \frac{1}{3}$.

Exercice 4. Les intégrales généralisées suivantes sont-elles convergentes ?

a) $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+\sqrt{t}}$; b) $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t^3)dt$ *(pour J on fera un changement de variables).*

Barème indicatif : 1,5/ 6/4,5/ 4,5/ 3,5