Université Grenoble Alpes
M1MG

Théorie de Galois, contrôle continu n°1
le 11 mars 2024, durée 1h30

Aucun document ni appareil électronique n'est autorisé. **Chaque réponse doit être justifiée**; *la qualité de la rédaction sera un élément d'appréciation des copies.*

I Autour du cours

1. Le réel $x = \dfrac{\sqrt[4]{\frac{1}{7}} + \sqrt[5]{3}}{2\sqrt{5} - 1}$ est-il constructible à la règle et au compas?

2. Montrer que le compositum de deux extensions 2-décomposables l'est aussi.

3. Soient K/k une extension de corps (pas nécessairement de dimension finie) et $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/k)$. On suppose que l'algèbre $k[\sigma]$ est de dimension finie. Montrer que σ est d'ordre fini dans le groupe $\mathrm{Gal}(K/k)$.

4. Soit L/K une extension algébrique en caractéristique $p > 0$. Soit $x \in L$. Montrer que x est séparable sur K si et seulement si on a $K(x) = K(x^{p^n})$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

II

Soit $K = \mathbb{F}_3(T)$, et $P = X^9 - TX^3 + T \in K[X]$. On note α une racine de P dans $\overline{K}$, et $L = K(\alpha)$.

Déterminer le nombre de plongements de L/K.

T.S.V.P.

III

On rappelle les formules

$$\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta, \text{ et } \cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1 \quad (\theta \in \mathbb{R}).$$

1. Résoudre en fonction de $\cos\theta$ l'équation $\cos(3\theta) = \cos(\frac{2\pi}{3})$. En déduire que les racines du polynôme $P = X^3 - 3X + 1$ sont $x_1 = 2\cos(\frac{2\pi}{9})$, $x_2 = 2\cos(\frac{4\pi}{9})$, et $x_3 = 2\cos(\frac{8\pi}{9})$, distinctes.

2. Montrer que P est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

On note L le corps de décomposition de P sur $\mathbb{Q}(j)$, où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

3. Montrer que $L = \mathbb{Q}(j)(x_1)$. Quel est le degré de x_1 sur $\mathbb{Q}(j)$?

4. Déterminer les plongements de $L/\mathbb{Q}(j)$, puis le groupe $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}(j))$.

5. Montrer que $\mathcal{B} = (1, x_1, x_2)$ est une base de L sur $\mathbb{Q}(j)$.

6. Soit σ le plongement de $L/\mathbb{Q}(j)$ tel que $\sigma(x_1) = x_2$. Donner la matrice de σ dans $\mathcal{B}$.

7. Soit x dans L tel que $\sigma(x) = jx$. Montrer que $x^3 \in \mathbb{Q}(j)$.

8. Déterminer x non nul dans L tel que $\sigma(x) = jx$. Justifier que $L = \mathbb{Q}(j)(x)$.

9. *(Question bonus)* Existe-t-il $a \in \mathbb{Q}$ tel que $\mathbb{Q}(x_1) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{a})$?

◇ ◇ ◇

Barème indicatif: 9/3/10