Université Grenoble Alpes
M1MF

Théorie de Galois, contrôle continu n°1
le 9 mars 2023, durée 1h30

Aucun document ni appareil électronique n'est autorisé. **Chaque réponse doit être justifiée***; la qualité de la rédaction sera un élément d'appréciation des copies.*

I Autour du cours

1. Le réel $x = \dfrac{\sqrt[4]{\frac{7}{2}} + \sqrt[3]{5}}{1 - 2\sqrt{3}}$ est-il constructible à la règle et au compas?

2. Trouver tous les entiers n entre 60 et 69 tels que le polygone régulier à n côtés soit constructible à la règle et au compas (justifier).

3. a) Soit n entier ≥ 1, et soit L/K une extension séparable finie. On suppose que tout $x \in L$ est de degré au plus n sur K. Montrer que $[L : K] \leq n$.

b) Montrer que la conclusion est encore vraie si on ne suppose plus L/K finie.

II

Soient E/K une extension de corps et L/K, L'/K deux sous-extensions algébriques linéairement disjointes de E/K. On se donne s un plongement de L/K et s' un plongement de L'/K. On souhaite montrer qu'il existe un unique plongement de LL'/K qui prolonge à la fois s et s'.

1. Montrer que s'il existe un tel plongement est unique.

2. Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base de L/K. Montrer qu'on *définit* bien une application $t\colon LL' \to \overline{K}$ en posant : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tous $i_1, \ldots, i_n$ distincts dans I, et pour tous $x'_1, \ldots, x'_n$ dans L',

$$t\Big(\sum_{j=1}^{n} x'_j e_{i_j}\Big) = \sum_{j=1}^{n} s'(x'_j) s(e_{i_j}).$$

Justifier que t est K-linéaire.

3. Montrer que pour tous $x \in L$ et $x' \in L'$, on a $t(xx') = s(x)s'(x')$.

4. Montrer que t prolonge s et s'.

5. Montrer enfin que t est un plongement de LL'/K.

T.S.V.P.

III

On pose $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{3})$.

1. Déterminer tous les plongements de $L/\mathbb{Q}$.

2. Déterminer le groupe de Galois de L sur $\mathbb{Q}$.

3. L'élément $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ de L est-il primitif dans $L/\mathbb{Q}$?

4. Le polynôme $X^6 - 72$ est-il irréductible sur $\mathbb{Q}$? *Indication:* on pourra introduire $\beta = \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3}$.

◇ ◇ ◇

$\boxed{\textit{Barème indicatif: } 6/\,7/7}$