Interaction des tourbillons dans les écoulements plans faiblement visqueux

Thierry Gallay
Université de Grenoble I
Institut Fourier, UMR CNRS 5582
BP 74
F-38402 Saint-Martin-d'Hères

1 Introduction

On sait que l'équation de Navier-Stokes incompressible dans le plan $\mathbb{R}^2$ possède une solution globale *unique* pour toute donnée initiale dont le tourbillon est une mesure finie, quelle que soit la valeur du paramètre de viscosité [14]. On peut donc être tenté d'étudier le comportement de cette solution dans la limite non visqueuse, au moins sur des exemples représentatifs. Dans cet exposé, on considère le cas très particulier, mais aussi très singulier, où le tourbillon initial est une combinaison linéaire finie de masses de Dirac. On montre alors que la solution faiblement visqueuse se comporte comme une superposition de tourbillons d'Oseen légèrement déformés, dont les centres suivent la dynamique des tourbillons ponctuels de l'équation d'Euler.

L'équation de Navier-Stokes dans le plan $\mathbb{R}^2$ s'écrit

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u \;=\; \nu\Delta u - \nabla p \;, \quad \operatorname{div} u = 0 \;, \tag{1}$$

où $u(x,t) \in \mathbb{R}^2$ désigne le champ de vitesse du fluide, supposé homogène et incompressible, et $p(x,t) \in \mathbb{R}$ son champ de pression. L'unique paramètre est la viscosité cinématique $\nu > 0$, que l'on peut éliminer par changement d'échelle mais que l'on conservera ici car on s'intéresse justement à la limite non visqueuse des solutions de (1), les données initiales étant fixées. Par commodité, on travaillera en fait sur l'équation vérifiée par le tourbillon $\omega = \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1$, qui a une forme particulièrement simple :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (u \cdot \nabla)\omega \;=\; \nu\Delta\omega \;. \tag{2}$$

On supposera toujours que le tourbillon $\omega(x,t) \in \mathbb{R}$ décroît suffisamment vite lorsque $|x| \to \infty$ pour que le champ de vitesse $u(x,t) \in \mathbb{R}^2$ puisse être reconstruit par la loi de Biot-Savart

$$u(x,t) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{(x-y)^\perp}{|x-y|^2}\,\omega(y,t)\,\mathrm{d}y \;, \quad x \in \mathbb{R}^2 \;, \tag{3}$$

où l'on a noté $x^\perp = (-x_2,x_1)$ si $x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Dans la suite, on note $\mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$ l'espace des mesures (de Radon) réelles finies sur $\mathbb{R}^2$, muni de la norme de la variation totale que l'on désigne par $\|\cdot\|_{\mathrm{vt}}$. Si $\{\mu_n\}$ est une suite dans $\mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$, on dit que μ_n converge faiblement vers $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$ si $\langle \mu_n,\phi\rangle \to \langle \mu,\phi\rangle$ lorsque $n \to \infty$ pour tout $\phi \in C_0(\mathbb{R}^2)$. On note alors $\mu_n \rightharpoonup \mu$. Notre point de départ est le résultat suivant, qui affirme que le problème de Cauchy pour l'équation (2) est globalement bien posé dans l'espace $\mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$.

Théorème 1 [14] *Pour toute donnée initiale $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$, l'équation (2) possède une solution globale unique*

$$\omega \in C^0(]0,\infty[\,,L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)) \tag{4}$$

telle que $\|\omega(\cdot,t)\|_{L^1} \le \|\mu\|_{\mathrm{vt}}$ pour tout $t > 0$, et $\omega(\cdot,t) \rightharpoonup \mu$ lorsque $t \to 0+$.

Dans cet énoncé, on entend par solution de (2) une solution de l'équation intégrale associée

$$\omega(t) \;=\; e^{\nu t\Delta}\mu - \int_0^t \mathrm{div}\Big(e^{\nu(t-s)\Delta}u(s)\omega(s)\Big)\,\mathrm{d}s \;, \quad t > 0 \;, \tag{5}$$

où $e^{t\Delta}$ désigne le semi-groupe de la chaleur. Il est facile de montrer que, si $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$ et si ω vérifie (4), alors les deux membres de (5) sont bien définis et continus en temps à valeurs dans $L^1(\mathbb{R}^2)$. On peut toutefois se demander si l'unicité reste vraie si l'on suppose seulement que $\omega \in C^0(]0,\infty[\,,L^1(\mathbb{R}^2))$, au lieu de (4). Dans ce cas, on ne peut plus se baser sur l'équation intégrale (5), mais on a encore la possibilité d'utiliser la formulation faible de l'équation (2). L'unicité reste toutefois une question ouverte à ce niveau de généralité.

L'*existence* d'une solution globale de l'équation (2) pour toute donnée initiale dans $\mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$ a été établie il y a plus de vingt ans par G.-H. Cottet [9], et indépendamment par Y. Giga, T. Miyakawa et H. Osada [20]. On peut aussi mentionner le travail postérieur de T. Kato [25]. Outre l'existence, ces auteurs ont montré que la solution est unique si la partie atomique de la mesure initiale est suffisamment petite devant la viscosité. Le cas d'une masse de Dirac de taille quelconque a été traité plus récemment [18, 15], dans le cadre d'une étude du comportement asymptotique en temps des solutions régulières de (2). Enfin, l'*unicité* dans le cas général a été établie en isolant les grandes masses de Dirac de la donnée initiale et combinant les approches précédentes [16, 14]. Mentionnons au passage que la solution de (2) dépend continûment de la mesure initiale μ dans la topologie forte de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$, uniformément sur tout intervalle de temps $[0,T]$. En outre, si $\{\mu_n\}$ est une suite de données initiales convergeant faiblement vers μ et uniformément localisée dans le sens suivant :

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} |\mu_n|\Big(\{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x| > R\}\Big) \;=\; 0 \;,$$

alors la solution $\omega_n(t)$ issue de μ_n converge *fortement* vers $\omega(t)$ dans $L^1(\mathbb{R}^2)$ lorsque $n \to \infty$, uniformément sur tout intervalle de temps $[T_1,T_2] \subset\,]0,\infty[$.

Lorsque la donnée initiale $\mu = \alpha\delta_0$ est une simple masse de Dirac, placée ici à l'origine des coordonnées, l'équation (2) développe une solution autosimilaire appelée *tourbillon d'Oseen* et donnée par les formules explicites :

$$\omega(x,t) \;=\; \frac{\alpha}{\nu t}\, G\Big(\frac{x}{\sqrt{\nu t}}\Big) \;, \qquad u(x,t) \;=\; \frac{\alpha}{\sqrt{\nu t}}\, v^G\Big(\frac{x}{\sqrt{\nu t}}\Big) \;, \tag{6}$$

où

$$G(\xi) \,=\, \frac{1}{4\pi}\, e^{-|\xi|^2/4}\;, \qquad v^G(\xi) \,=\, \frac{1}{2\pi}\frac{\xi^\perp}{|\xi|^2}\Bigl(1 - e^{-|\xi|^2/4}\Bigr)\;, \qquad \xi \in \mathbb{R}^2\;. \tag{7}$$

Le paramètre $\alpha \in \mathbb{R}^2$ est appelé le *nombre de Reynolds de circulation.* Les expressions (6), (7) montrent que α est égal à l'intégrale du tourbillon $\omega(x,t)$ sur tout le plan $\mathbb{R}^2$, quantité que l'on sait conservée au cours de l'évolution. Les tourbillons d'Oseen sont les seules solutions autosimilaires de l'équation de Navier-Stokes dans $\mathbb{R}^2$ dont le tourbillon soit intégrable [18]. Elles jouent un rôle privilégié dans la dynamique de l'équation (2), aussi bien pour les temps courts (lorsque la donnée initiale contient des masses de Dirac) que dans la limite des grands temps. On sait en particulier [18] que toute solution $\omega(x,t)$ de (2) donnée par le théorème 1 vérifie

$$\lim_{t\to+\infty}\Bigl\|\omega(\cdot,t) - \frac{\alpha}{\nu t}\, G\Bigl(\frac{\cdot}{\sqrt{\nu t}}\Bigr)\Bigr\|_{L^1} \,=\, 0\;, \quad \text{où} \quad \alpha = \mu(\mathbb{R}^2)\;.$$

Le théorème 1 établit l'existence d'une solution globale unique de l'équation (2) pour toute mesure initiale et toute valeur du paramètre de viscosité. Il est très naturel de se demander ce que deviennent ces solutions dans la limite non visqueuse, car c'est dans ce régime que les structures présentes dans les données initiales (tourbillons ponctuels, nappes ou poches de tourbillon) subsistent suffisamment longtemps pour être observées et pour influencer la dynamique du système. Dans toute sa généralité, cette question est certainement fort délicate, car la limite formelle du système (2) lorsque $\nu \to 0$ est l'équation d'Euler

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + (u\cdot\nabla)\omega \,=\, 0\;, \tag{8}$$

que l'on ne sait pas résoudre à ce jour dans un espace aussi grand que $\mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$. On sait "seulement" que l'équation (8) possède une solution faible globale pour des données initiales $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^2) \cap H^{-1}(\mathbb{R}^2)$ dont la partie singulière est une mesure de signe bien défini [12, 28]. Notons que l'hypothèse $\mu \in H^{-1}(\mathbb{R}^2)$ exclut en particulier toute masse de Dirac. Si l'on souhaite en outre garantir l'unicité de la solution, comme dans le théorème 1, on doit supposer que la donnée initiale est une fonction bornée [44] ou presque bornée [45, 43].

D'un point de vue plus général, la convergence des solutions de l'équation de Navier-Stokes vers celles de l'équation d'Euler lorsque la viscosité tend vers zéro est relativement facile à établir si l'on se restreint aux solutions *régulières* et si l'on travaille dans un domaine *sans bord* [13, 40, 24, 2]. En revanche, dans le cas d'un domaine à bord, si l'on impose aux solutions de l'équation de Navier-Stokes la condition classique de non-glissement, l'apparition de *couches limites* de Prandtl dans un voisinage de la frontière constitue un obstacle redoutable, que l'on ne sait éviter qu'en se restreignant à des données analytiques et bien préparées [38, 21]. Même en l'absence de bords, la limite non visqueuse peut présenter des difficultés considérables si l'on s'intéresse à des solutions peu régulières. On peut citer, dans un ordre décroissant de régularité :

1. Les *poches de tourbillon*, dont l'exemple le plus simple en dimension deux est celui où le tourbillon est un multiple de la fonction indicatrice d'un domaine borné régulier. Le champ de vitesse est alors lipschitzien, ou presque lipschitzien si le bord de la poche présente des singularités. Les premiers résultats, dus à P. Constantin et J. Wu [7, 8] ainsi qu'à J.-Y. Chemin [5], établissent la convergence pour une classe générale de solutions incluant les poches de tourbillon en dimension deux. De nombreux raffinements ont été obtenus depuis par R. Danchin [10, 11] (étude de la régularité tangentielle, propagation des singularités, dimension supérieure), par H. Abidi et R. Danchin [1] (taux de convergence optimal), par T. Hmidi [22, 23] (estimation précise de la régularité du bord, poches singulières) et par N. Masmoudi [35] (taux optimal dans le cas tridimensionnel). Dans l'esprit de cet exposé, mentionnons également un travail récent de F. Sueur [39], où l'auteur étudie systématiquement les profils de couche limite dans la variable normale, à la frontière d'une poche de tourbillon.

2. Les *nappes de tourbillon*, où la mesure ω est concentrée sur une surface de $\mathbb{R}^3$ ou une courbe de $\mathbb{R}^2$. Dans ce cas, la composante tangentielle du champ de vitesse est discontinue sur la nappe, et ce cisaillement est à l'origine de la célèbre instabilité de Kelvin-Helmholtz pour l'équation d'Euler. De ce fait, l'étude de la limite non visqueuse présente pour les nappes de tourbillons des difficultés comparables à celles des couches limites de Prandtl, qui ne peuvent être évitées qu'en se restreignant à des données analytiques bien préparées [6, 3].

3. Les *filaments de tourbillon*, qui se réduisent en dimension deux à des tourbillons ponctuels. Cet exemple est le plus singulier de tous, car le champ de vitesse (normal) n'est pas borné au voisinage du filament. En dimension deux toutefois, la limite non visqueuse est décrite formellement par le système des tourbillons ponctuels d'Euler, qui ne présente pas d'instabilité dynamique, et on peut donc raisonnablement espérer justifier la convergence dans ce cas. Les premiers résultats rigoureux on été obtenus par C. Marchioro [31, 32], et le but de cet exposé est de montrer comment ces travaux peuvent être complétés de façon à obtenir une description très précise de la solution faiblement visqueuse lorsque la donnée initiale est une superposition de tourbillons ponctuels.

2 La solution à N tourbillons

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ un entier non nul, soient $x_1, \ldots, x_N \in \mathbb{R}^2$ des points du plan deux à deux distincts, et soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{R}^*$ des circulations non nulles. Dans toute la suite, on désigne par $\omega^\nu(x,t)$, $u^\nu(x,t)$ l'unique solution de l'équation (2), avec viscosité $\nu > 0$, pour la donnée initiale

$$\mu \,=\, \sum_{i=1}^N \alpha_i \, \delta(\cdot - x_i)\ . \tag{9}$$

Notre but est de décrire le comportement de $\omega^\nu(x,t)$ dans la limite $\nu \to 0$. On montrera en particulier que

$$\omega^\nu(\cdot,t) \xrightarrow[\nu\to 0]{} \sum_{i=1}^N \alpha_i \, \delta(\cdot - z_i(t))\ , \tag{10}$$

où les positions $z_1(t), \ldots, z_N(t)$ sont solution du système des tourbillons ponctuels d'Euler :

$$z_i'(t) \,=\, \frac{1}{2\pi} \sum_{j\neq i} \alpha_j \, \frac{(z_i(t) - z_j(t))^\perp}{|z_i(t) - z_j(t)|^2}\ , \qquad z_i(0) \,=\, x_i\ . \tag{11}$$

On rappelle que le membre de droite de (10) n'est pas à proprement parler une solution faible de l'équation d'Euler (8), car les contributions au terme non linéaire $u\cdot\nabla\omega$ provenant de l'auto-interaction des tourbillons sont trop singulières, et doivent être écartées "à la main". Il est néanmoins possible d'établir rigoureusement le système (11) à partir de l'équation (8), en prenant par exemple comme donnée initiale une superposition de N poches de tourbillons de diamètre $\epsilon > 0$, centrées aux points $x_1,\dots,x_N$ et de circulations $\alpha_1,\dots,\alpha_N$, puis en prenant la limite $\epsilon \to 0$ dans la solution de l'équation d'Euler [30, 33]. On rappelle également que le système (11) n'est pas globalement bien posé pour toutes les données initiales, car si $N \ge 3$ et si les circulations α_i ne sont pas toutes de même signe, des collisions de tourbillons peuvent se produire en temps fini pour certaines configurations exceptionnelles [34].

Notre premier résultat confirme que la solution $\omega^\nu(x,t)$ de l'équation (2) donnée par le théorème 1 converge faiblement vers une superposition de tourbillons ponctuels dans la limite non visqueuse.

Théorème 2 *On suppose que le système* (11) *est bien posé sur l'intervalle de temps* $[0,T]$*, et on note* $z_1(t),\dots,z_N(t)$ *sa solution. Alors la solution* $\omega^\nu(x,t)$ *de l'équation de Navier-Stokes* (2) *pour la donnée initiale* (9) *vérifie*

$$\omega^\nu(\cdot,t) \underset{\nu\to 0}{\rightharpoonup} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i\,\delta(\cdot - z_i(t)) \ , \quad \textit{pour tout } t \in [0,T] \ . \tag{12}$$

Cet énoncé complète des résultats similaires obtenus par C. Marchioro [31, 32], dans un cadre légèrement différent. Marchioro considère pour l'équation de Navier-Stokes (2) une donnée initiale de la forme

$$\omega_0(x) \,=\, \sum_{i=1}^{N} \omega_i^\epsilon(x) \ , \quad \epsilon > 0 \ ,$$

où pour chaque $i \in \{1,\dots,N\}$ la fonction ω_i^ϵ est une poche de tourbillon régulière, de signe bien défini, de diamètre proportionnel à ϵ, centrée au point $x_i \in \mathbb{R}^2$, et telle que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \omega_i^\epsilon(x)\,\mathrm{d}x \,=\, \alpha_i^\epsilon \underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} \alpha_i \ .$$

Il montre alors que la solution $\omega^{\nu,\epsilon}(x,t)$ de l'équation (2) converge faiblement vers le membre de droite de (10) dans la double limite $\nu \to 0$, $\epsilon \to 0$, pour autant que

$$\nu \,\le\, \nu_0\,\epsilon^\beta \ , \quad \text{pour un } \beta > 0 \ . \tag{13}$$

Cette dernière hypothèse peut en fait être relaxée si on suppose que toutes les circulations α_i sont du même signe [31]. On notera que le théorème 2 correspond au cas limite $\epsilon = 0$, $\nu \to 0$, qui est précisément exclu par la condition (13). La preuve de Marchioro consiste à décomposer pour tout temps la solution $\omega^{\nu,\epsilon}(x,t)$ en une somme de poches de tourbillons visqueuses et à contrôler l'étendue de chaque poche en calculant son moment d'inertie par rapport à un point $z_i^{\nu,\epsilon}(t)$ bien choisi, solution approximative du système (11). Cet argument ne fournit aucune information sur la forme de ces poches, et ne nous renseigne donc guère sur l'allure de la solution lorsque ν et ϵ sont petits. Le théorème 2 souffre du même défaut, mais constitue tout de même une justification propre et naturelle du système des tourbillons ponctuels (11).

Le but de cet exposé est de présenter une version quantitative du théorème 2 qui précise la vitesse de convergence dans (12) et fournisse un développement asymptotique de la solution $\omega^\nu(x,t)$ lorsque $\nu \to 0$. En s'inspirant de la méthode utilisée dans [14] pour montrer l'unicité de la solution de (2) lorsque la mesure initiale contient de grandes masses de Dirac, on commence par décomposer la solution $\omega^\nu(x,t)$ en une somme de N tourbillons de signes bien définis et de circulations $\alpha_1, \dots, \alpha_N$, qui correspondent aux atomes de la donnée initiale (9). Plus précisément, on écrit

$$\omega^\nu(x,t) \,=\, \sum_{i=1}^N \omega_i^\nu(x,t)\;, \qquad u^\nu(x,t) \,=\, \sum_{i=1}^N u_i^\nu(x,t)\;, \tag{14}$$

où pour chaque $i \in \{1,\dots,N\}$ le tourbillon $\omega_i^\nu \in C_b^0(]0,\infty[\,,L^1(\mathbb{R}^2))$ est l'unique solution de l'équation de transport-diffusion linéaire

$$\frac{\partial \omega_i^\nu}{\partial t} + (u^\nu \cdot \nabla)\omega_i^\nu \,=\, \nu \Delta \omega_i^\nu\;, \quad \text{avec} \quad \omega_i^\nu(\cdot,t) \xrightarrow[t\to 0]{} \alpha_i\, \delta(\cdot - x_i)\;. \tag{15}$$

Quant au champ de vitesse u_i^ν, il est simplement obtenu à partir de ω_i^ν par la loi de Biot-Savart (3). Par construction $\int_{\mathbb{R}^2} \omega_i^\nu(x,t)\,\mathrm{d}x = \alpha_i$ pour tout $t > 0$, et $\omega_i^\nu(x,t)$ a le signe de α_i pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ et tout $t > 0$. En outre, les estimations de la solution fondamentale de l'équation (15) obtenues par H. Osada [37] ainsi que par E. Carlen et M. Loss [4] impliquent que $\omega_i^\nu(x,t)$ est localisé de façon gaussienne pour $i = 1,\dots,N$. Pour tout $\beta \in]0,1[$, il existe en effet une constante $K(\nu,\beta) > 0$ telle que

$$|\omega_i^\nu(x,t)| \,\le\, K(\nu,\beta)\,\frac{|\alpha_i|}{\nu t}\,\exp\Bigl(-\beta\,\frac{|x-x_i|^2}{4\nu t}\Bigr)\;,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ et tout $t > 0$. Cette estimation a priori est très précise dans la limite $t \to 0$ à $\nu > 0$ fixé, mais inexploitable dans la limite $\nu \to 0$ à $t > 0$ fixé car la constante $K(\nu,\beta)$ diverge violemment lorsque $\nu \to 0$.

Dans le cas très particulier où $N = 1$, on sait que la solution $\omega^\nu(x,t)$ est un simple translaté du tourbillon d'Oseen (6) [18, 15]. On suppose donc désormais que $N \ge 2$, et que le système des tourbillons ponctuels (11) est bien posé sur l'intervalle de temps $[0,T]$. On note

$$d \,=\, \min_{t\in[0,T]}\,\min_{i\neq j}\,|z_i(t) - z_j(t)| \,>\, 0\;, \tag{16}$$

et on introduit également le temps caractéristique $T_0 = d^2/|\alpha|$, où $|\alpha| = |\alpha_1| + \dots + |\alpha_N|$. Dans la suite, on ne travaillera pas directement avec le système (11), mais plutôt avec une *régularisation visqueuse* de ce système définie ainsi :

$$(z_i^\nu)'(t) \,=\, \sum_{j=1}^N \frac{\alpha_j}{\sqrt{\nu t}}\, v^G\Bigl(\frac{z_i^\nu(t) - z_j^\nu(t)}{\sqrt{\nu t}}\Bigr)\;, \qquad z_i^\nu(0) \,=\, x_i\;, \tag{17}$$

où v^G est donné par (7). Comme le champ de vecteurs v^G est régulier et s'annule à l'origine ainsi qu'à l'infini, il est facile de vérifier que le système (17) est globalement bien posé pour toute valeur de la viscosité $\nu > 0$ et pour toutes les configurations initiales $x_1, \ldots, x_N$. En outre, ses solutions convergent très rapidement vers celles du système (11) lorsque $\nu \to 0$, tant que les tourbillons restent bien séparés. En effet, en comparant (11) et (17) et en utilisant l'hypothèse (16), on montre aisément que

$$\frac{1}{d} \max_{i=1,\ldots,N} |z_i^\nu(t) - z_i(t)| \;\le\; C\,\frac{\nu t}{d^2}\, \exp\Bigl(-\beta\,\frac{d^2}{4\nu t}\Bigr)\;, \quad 0 < t \le T\;,$$

pour tout $\beta \in \,]0,1[$, où C est une constante qui ne dépend que de β et du rapport T/T_0.

Notre objectif est de montrer que les tourbillons $\omega_i^\nu(x,t)$ se comportent dans la limite non visqueuse comme des tourbillons d'Oseen centrés aux points $z_i^\nu(t)$. En généralisant la démarche adoptée dans [14], on introduit pour chaque $i \in \{1,\ldots,N\}$ une variable autosimilaire

$$\xi \;=\; \frac{x - z_i^\nu(t)}{\sqrt{\nu t}}\;,$$

qui permet d'analyser finement la solution au voisinage du point $z_i^\nu(t)$, et on définit de nouvelles fonctions $w_i^\nu(\xi,t) \in \mathbb{R}$ et $v_i^\nu(\xi,t) \in \mathbb{R}^2$ en posant

$$\omega_i^\nu(x,t) \;=\; \frac{\alpha_i}{\nu t}\, w_i^\nu\Bigl(\frac{x - z_i^\nu(t)}{\sqrt{\nu t}}\,,t\Bigr)\;, \qquad u_i^\nu(x,t) \;=\; \frac{\alpha_i}{\sqrt{\nu t}}\, v_i^\nu\Bigl(\frac{x - z_i^\nu(t)}{\sqrt{\nu t}}\,,t\Bigr)\;. \tag{18}$$

On sait alors que $w_i^\nu(\xi,t)$ converge vers $G(\xi)$ lorsque $t \to 0$ à $\nu > 0$ fixé [14], mais on souhaite obtenir ici un développement asymptotique de $w_i^\nu(\xi,t)$ lorsque $\nu \to 0$ qui soit valable sur tout l'intervalle de temps $[0,T]$. Le premier terme de ce développement est naturellement le profil G du tourbillon d'Oseen, mais pour des raisons qui apparaîtront clairement dans la suite il est nécessaire de construire une approximation plus précise si l'on souhaite contrôler rigoureusement les restes. Pour tout $i \in \{1,\ldots,N\}$ et tout $t \in [0,T]$, on définit

$$w_i^{\mathrm{app}}(\xi,t) \;=\; G(\xi) + F(\xi) \sum_{j \neq i} \frac{\alpha_j}{\alpha_i}\, \frac{\nu t}{|z_{ij}(t)|^2} \Bigl(2\frac{|\xi \cdot z_{ij}(t)|^2}{|\xi|^2 |z_{ij}(t)|^2} - 1\Bigr)\;, \qquad \xi \in \mathbb{R}^2\;, \tag{19}$$

où $z_{ij}(t) = z_i^\nu(t) - z_j^\nu(t)$ et $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction régulière, positive, à symétrie radiale, vérifiant

$$F(\xi) \sim \begin{cases} C_1 |\xi|^2 & \text{lorsque} \quad |\xi| \to 0\;, \\ C_2 |\xi|^4\, e^{-|\xi|^2/4} & \text{lorsque} \quad |\xi| \to \infty\;, \end{cases}$$

avec $C_1, C_2 > 0$. L'expression précise de F sera donnée à la section suivante. Pour mesurer l'écart entre le tourbillon $w_i^\nu(\xi,t)$ et son approximation (19), on choisit $\beta \in \,]0,1[$ suffisamment petit et on introduit l'espace L^2 à poids noté Y et défini par la norme

$$\|w\|_Y \;=\; \Bigl(\int_{\mathbb{R}^2} |w(\xi)|^2\, e^{\beta|\xi|^2/4}\, \mathrm{d}\xi\Bigr)^{1/2}\;.$$

Nous sommes à présent en mesure d'exposer notre résultat principal :

Théorème 3 *On suppose que le système* (11) *est bien posé sur l'intervalle de temps* $[0,T]$*, et on décompose comme dans* (14) *la solution* $\omega^\nu(x,t)$ *de l'équation* (2) *pour la donnée initiale* (9)*. Alors pour* $i = 1,\ldots,N$ *les profils* $w_i^\nu(\xi,t)$ *définis par* (18) *vérifient*

$$\|w_i^\nu(\cdot,t) - w_i^{\mathrm{app}}(\cdot,t)\|_Y \;=\; \mathcal{O}\Bigl(\Bigl(\frac{\nu t}{d^2}\Bigr)^{3/2}\Bigr) \;, \quad \textit{lorsque } \nu \to 0 \;, \tag{20}$$

uniformément sur l'intervalle de temps $]0,T]$*, où* w_i^{app} *est donné par* (19) *et* d *par* (16)*.*

Remarquons tout d'abord que, si l'on ne retient que le premier terme dans l'approximation (19), alors l'estimation (20) se réduit à

$$\|w_i^\nu(\cdot,t) - G\|_Y \;=\; \mathcal{O}\Bigl(\frac{\nu t}{d^2}\Bigr) \;, \quad \text{lorsque } \nu \to 0 \;. \tag{21}$$

Ainsi, comme on pouvait s'y attendre, la solution $\omega^\nu(x,t)$ est en première approximation une superposition de tourbillons d'Oseen de circulations α_i centrés aux points $z_i^\nu(t)$. Puisque $Y \hookrightarrow L^1(\mathbb{R}^2)$ et $z_i^\nu(t) \to z_i(t)$ lorsque $\nu \to 0$, l'estimation (21) implique en particulier (12), donc le théorème 2 est une conséquence immédiate du théorème 3.

En fait, le résultat affaibli (21) est déjà non trivial, et il est peu probable qu'il soit possible de l'obtenir directement sans calculer une approximation de la solution à un ordre supérieur, comme dans (19). Il ne faut pas perdre de vue, en effet, que le champ de vitesse du tourbillon d'Oseen est très grand au voisinage de son centre, avec un maximum de l'ordre de $|\alpha|/(\nu t)^{1/2}$ à distance $(\nu t)^{1/2}$ du centre, ce qui correspond à une vitesse angulaire de l'ordre de $|\alpha|/(\nu t)$. Tant que le tourbillon est isolé et à symétrie radiale, il ne ressent pas l'effet de son propre champ de vitesse, mais une fois placé dans un champ extérieur (en l'occurence, le champ de vitesse produit par les autres tourbillons) il se déforme, perd sa symétrie, et subit alors le transport de son propre champ. Pour la raison mentionnée ci-dessus, cette auto-interaction est très forte si ν est petit, et on pourrait craindre qu'elle ne déforme le tourbillon encore d'avantage, enclenchant ainsi un violent mécanisme d'instabilité. C'est exactement le contraire qui se produit : un tourbillon d'Oseen placé dans un champ extérieur se déforme de façon que le transport par son propre champ de vitesse *compense exactement* l'étirement dû au champ imposé [42, 41].

Au premier ordre, cette déformation est décrite par le second terme de notre approximation (19). Il s'agit d'une petite correction de taille $\nu t/d^2$ au tourbillon d'Oseen, mais elle suffit à compenser l'étirement d'ordre un dû au champ de vitesse des autres tourbillons car, comme indiqué ci-dessus, l'auto-interaction a un effet très violent si ν est petit. En posant $\xi = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, on peut récrire (19) sous la forme

$$w_i^{\mathrm{app}}(\xi,t) \;=\; g(r) + f(r)\sum_{j\neq i}\frac{\alpha_j}{\alpha_i}\,\frac{\nu t}{|z_{ij}(t)|^2}\cos\Bigl(2(\theta-\theta_{ij}(t))\Bigr) \;, \tag{22}$$

où $G(\xi) = g(|\xi|)$, $F(\xi) = f(|\xi|)$, et $\theta_{ij}(t)$ est l'angle polaire du vecteur $z_{ij}(t) = z_i^\nu(t) - z_j^\nu(t)$. Cette expression montre clairement que chaque tourbillon se déforme *instantanément* en fonction des positions relatives des autres tourbillons, sans aucune inertie. Il s'agit là d'une situation quelque peu atypique, liée à notre choix de la mesure initiale (9). Des développements asymptotiques dus à L. Ting et C. Tung [42, 41] suggèrent en effet que, si l'on considère des données moins bien "préparées" que des tourbillons ponctuels, par exemple des poches de tourbillon de petit diamètre $\epsilon > 0$, alors l'état asymptotique décrit par le théorème 3 n'est pas atteint immédiatement, mais seulement après une période transitoire caractérisée par des oscillations temporelles, que l'on n'observe pas dans (22).

En conclusion, le contrôle rigoureux de la limite non visqueuse en présence de tourbillons ponctuels est possible grâce à la grande stabilité dynamique et structurelle dont jouissent les tourbillons d'Oseen. Ces mêmes propriétés ont permis de montrer l'existence et la stabilité des tourbillons de Burgers, qui sont des solutions stationnaires de l'équation de Navier-Stokes dans l'espace $\mathbb{R}^3$ en présence d'un champ d'étirement linéaire [36, 19, 27].

3 Esquisse de la démonstration

Cette dernière section est consacrée à une esquisse de la démonstration du théorème 3. Notre point de départ est l'équation vérifiée par les profils $w_i^\nu(\xi,t)$ et $v_i^\nu(\xi,t)$, que l'on notera désormais $w_i(\xi,t)$ et $v_i(\xi,t)$ pour alléger l'écriture. En remplaçant (18) dans (15), on obtient

$$t\partial_t w_i(\xi,t) + \left\{\sum_{j=1}^N \frac{\alpha_j}{\nu}\, v_j\Big(\xi + \frac{z_{ij}(t)}{\sqrt{\nu t}}\,,t\Big) - \sqrt{\frac{t}{\nu}}\, z_i'(t)\right\} \cdot \nabla w_i(\xi,t) \;=\; (\mathcal{L}w_i)(\xi,t)\;, \qquad (23)$$

où $\mathcal{L}w = \Delta w + \frac{1}{2}\xi\cdot\nabla w + w$, et où on a noté $z_i(t)$ au lieu de $z_i^\nu(t)$ dans un même souci de simplification. Le problème de Cauchy pour l'équation (23) n'est pas bien posé en $t = 0$, car la dérivée temporelle y apparaît sous la forme singulière $t\partial_t$. La façon naturelle de traiter cette difficulté est d'introduire une nouvelle variable $\tau = \log(t/T)$, de sorte que $\partial_\tau = t\partial_t$. On cherche alors une solution définie pour tout $\tau \in \,]-\infty,0]$, qui converge vers le profil G du tourbillon d'Oseen lorsque $\tau \to -\infty$ [14]. Pour ne pas compliquer les notations, on conservera ici la variable temporelle originale t.

Le membre de gauche de (23) contient des termes singuliers lorsque $\nu \to 0$, mais on peut en éliminer une partie par un choix judicieux des positions des tourbillons. En effet, les arguments heuristiques exposés à la section précédente suggèrent que la solution de (23) vérifie $w_i(\xi,t) \approx G(\xi)$ et $v_i(\xi,t) \approx v^G(\xi)$ pour tout $t \in [0,T]$ lorsque ν est suffisamment petit. Il est donc naturel de poser

$$z_i'(t) \;=\; \sum_{j=1}^N \frac{\alpha_j}{\sqrt{\nu t}}\, v^G\Big(\frac{z_{ij}(t)}{\sqrt{\nu t}}\Big)\;, \qquad i = 1,\dots,N\;,$$

et l'on obtient ainsi le système des tourbillons ponctuels régularisé (17). En remplaçant cette expression dans (23), on trouve une équation un peu moins singulière

$$t\partial_t w_i(\xi,t) + \sum_{j=1}^N \frac{\alpha_j}{\nu}\left\{v_j\Big(\xi + \frac{z_{ij}(t)}{\sqrt{\nu t}}\,,t\Big) - v^G\Big(\frac{z_{ij}(t)}{\sqrt{\nu t}}\Big)\right\} \cdot \nabla w_i(\xi,t) \;=\; (\mathcal{L}w_i)(\xi,t)\;, \qquad (24)$$

que l'on souhaite résoudre avec la donnée initiale $w_i(\xi,0) = G(\xi)$.

La première étape est d'évaluer précisément l'erreur que l'on commet en remplaçant "brutalement" $w_i(\xi,t)$ par $G(\xi)$ et $v_i(\xi,t)$ par $v^G(\xi)$ dans (24). Comme $\partial_t G = \mathcal{L}G = 0$, on obtient l'expression

$$R_i^{(1)}(\xi,t) \;=\; \sum_{j\neq i} \frac{\alpha_j}{\nu} \left\{ v^G\Big(\xi + \frac{z_{ij}(t)}{\sqrt{\nu t}}\Big) - v^G\Big(\frac{z_{ij}(t)}{\sqrt{\nu t}}\Big) \right\} \cdot \nabla G(\xi)\ .$$

On notera que la somme porte maintenant sur les indices $j \neq i$, car le terme correspondant à $j = i$ est nul. En utilisant la minoration $|z_{ij}(t)| = |z_i(t) - z_j(t)| \geq d$ et l'expression (7) de v^G, il n'est pas difficile d'obtenir un développement asymptotique de l'erreur $R_i^{(1)}$ lorsque $\nu \to 0$. On trouve

$$R_i^{(1)}(\xi,t) \;=\; \frac{\alpha_i t}{d^2} \left\{ A_i(\xi,t) + \Big(\frac{\nu t}{d^2}\Big)^{1/2} B_i(\xi,t) + \Big(\frac{\nu t}{d^2}\Big) C_i(\xi,t) + \mathcal{O}\Big(\frac{\nu t}{d^2}\Big)^{3/2} \right\}\ , \tag{25}$$

où les fonctions A_i, B_i, C_i se calculent explicitement en termes des positions relatives $z_{ij}(t)$:

$$\begin{aligned}
A_i(\xi,t) &= \frac{d^2}{2\pi} \sum_{j\neq i} \frac{\alpha_j}{\alpha_i} \frac{(\xi\cdot z_{ij}(t))(\xi\cdot z_{ij}(t)^\perp)}{|z_{ij}(t)|^4}\, G(\xi)\ ,\\
B_i(\xi,t) &= \frac{d^3}{4\pi} \sum_{j\neq i} \frac{\alpha_j}{\alpha_i} \frac{(\xi\cdot z_{ij}(t)^\perp)}{|z_{ij}(t)|^6} \Big(|\xi|^2|z_{ij}(t)|^2 - 4(\xi\cdot z_{ij}(t))^2\Big)\, G(\xi)\ ,\\
C_i(\xi,t) &= \frac{d^4}{\pi} \sum_{j\neq i} \frac{\alpha_j}{\alpha_i} \frac{(\xi\cdot z_{ij}(t))(\xi\cdot z_{ij}(t)^\perp)}{|z_{ij}(t)|^8} \Big(2(\xi\cdot z_{ij}(t))^2 - |\xi|^2|z_{ij}(t)|^2\Big)\, G(\xi)\ .
\end{aligned} \tag{26}$$

Il est important de remarquer que l'erreur $R_i^{(1)}$ ne tend par vers zéro lorsque $\nu \to 0$, en raison du terme dominant $A_i(\xi,t)$. Si l'on résout l'équation (24) sur un intervalle de temps fixé $[0,T]$, on doit donc s'attendre à ce que la solution $w_i(\xi,t)$ s'écarte du tourbillon $G(\xi)$ d'une quantité qui ne tende pas vers zéro lorsque $\nu \to 0$. On ne peut alors espérer contrôler les termes non linéaires dans (24), qui contiennent un facteur ν au dénominateur. Pour "désingulariser" le système, il est donc nécessaire de construire au préalable une solution approchée beaucoup plus précise, qui donne lieu à un terme d'erreur sensiblement plus petit que (25).

3.1 Construction d'une solution approchée

L'idée est de chercher une solution approchée de (24) sous la forme

$$\begin{aligned}
w_i^{\mathrm{app}}(\xi,t) &= G(\xi) + \Big(\frac{\nu t}{d^2}\Big) F_i(\xi,t) + \Big(\frac{\nu t}{d^2}\Big)^{3/2} H_i(\xi,t) + \Big(\frac{\nu t}{d^2}\Big)^2 K_i(\xi,t)\ ,\\
v_i^{\mathrm{app}}(\xi,t) &= v^G(\xi) + \Big(\frac{\nu t}{d^2}\Big) v^{F_i}(\xi,t) + \Big(\frac{\nu t}{d^2}\Big)^{3/2} v^{H_i}(\xi,t) + \Big(\frac{\nu t}{d^2}\Big)^2 v^{K_i}(\xi,t)\ ,
\end{aligned} \tag{27}$$

où les profils F_i, H_i, K_i sont à déterminer. Les champs de vitesse v^{F_i}, v^{H_i}, v^{K_i} seront naturellement obtenus à partir de F_i, H_i, K_i par la loi de Biot-Savart (3). On cherche donc un développement de la solution en puissances de $(\nu t/d^2)^{1/2}$, quantité sans dimension qui apparaît déjà dans (25). On notera que le développement (27) ne contient pas de terme d'ordre un, et qu'il est limité à l'ordre quatre car cette précision suffit pour démontrer le théorème 3.

Pour déterminer les profils F_i, H_i, K_i, on étudie l'erreur commise en remplaçant w_i par w_i^{app} et v_i par v_i^{app} dans (24). Au premier ordre, on trouve

$$R_i^{(2)}(\xi,t) \;=\; \frac{\alpha_i t}{d^2}\left\{v^G(\xi)\cdot\nabla F_i(\xi,t) + v^{F_i}(\xi,t)\cdot\nabla G(\xi) + A_i(\xi,t) + \mathcal{O}\Big(\frac{\nu t}{d^2}\Big)^{1/2}\right\} .$$

Soit Λ l'opérateur intégro-différentiel d'ordre un défini par

$$\Lambda w \;=\; v^G\cdot\nabla w + v\cdot\nabla G\ , \tag{28}$$

où v est le champ de vitesse associé à w par la loi de Biot-Savart. Cet opérateur a été bien étudié dans la littérature, car il intervient dans la linéarisation de l'équation de Navier-Stokes (2) autour d'un tourbillon d'Oseen [18]. On sait en particulier que Λ, défini sur son domaine maximal, est *antiadjoint* dans l'espace de Hilbert X défini par le produit scalaire

$$(w_1,w_2)_X \;=\; \int_{\mathbb{R}^2} w_1(\xi)w_2(\xi)\, e^{|\xi|^2/4}\,\mathrm{d}\xi\ . \tag{29}$$

On sait aussi caractériser le noyau de Λ, qui est constitué des fonctions à symétrie radiale et du sous-espace de dimension deux engendré par $\{\partial_1 G;\partial_2 G\}$ [26]. Comme $\mathrm{Ker}(\Lambda) = \mathrm{Im}(\Lambda)^\perp$, on ne peut résoudre l'équation $\Lambda w = f$ que pour des fonctions f orthogonales à $\mathrm{Ker}(\Lambda)$ dans X. Il est facile de vérifier que tel est le cas, pour tout $t\in[0,T]$, de la fonction $A_i(\xi,t)$ définie par (26). Comme en outre $A_i(\cdot,t)\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, on peut donc espérer trouver $F_i(\xi,t)$ tel que $\Lambda F_i(\xi,t) + A_i(\xi,t) = 0$, de sorte que $R_i^{(2)}(\xi,t) = \mathcal{O}((\nu t/d^2)^{1/2})$.

En fait, l'opérateur Λ est invariant par rotation autour de l'origine dans $\mathbb{R}^2$ [18]. On peut donc introduire des coordonnées polaires dans le plan, décomposer toutes les fonctions en série de Fourier dans la variable angulaire, et se ramener à des équations différentielles ordinaires dans la variable radiale. Après des calculs élémentaires [19, 27], on trouve que l'unique solution de l'équation $\Lambda F_i(\xi,t) + A_i(\xi,t) = 0$ est donnée par

$$F_i(\xi,t) \;=\; F(\xi)\sum_{j\neq i}\frac{\alpha_j}{\alpha_i}\,\frac{d^2}{|z_{ij}(t)|^2}\Big(2\frac{|\xi\cdot z_{ij}(t)|^2}{|\xi|^2|z_{ij}(t)|^2} - 1\Big)\ , \qquad \xi\in\mathbb{R}^2\ ,\quad t\in[0,T]\ ,$$

où $F(\xi) = f(|\xi|)$. Le profil $f : [0,\infty]\to\mathbb{R}$ vérifie $f(0) = 0$ et

$$f(r) \;=\; -\frac{1}{r}(r\Omega'(r))' + \frac{4}{r^2}\Omega(r) \;\equiv\; h(r)\Big(\Omega(r) + \frac{r^2}{4\pi}\Big)\ ,\quad r>0\ ,$$

où $h(r) = (r^2/4)(e^{r^2/4}-1)^{-1}$ et $\Omega :]0,\infty[\to\mathbb{R}$ est l'unique solution régulière de l'équation différentielle

$$-\frac{1}{r}(r\Omega'(r))' + \Big(\frac{4}{r^2} - h(r)\Big)\Omega(r) \;=\; \frac{r^2 h(r)}{4\pi}\ ,\quad r>0\ ,$$

telle que

$$\Omega(r) \;\approx\; \begin{cases} C_1 r^2 & \text{quand}\quad r\to 0\ ,\\ C_2 r^{-2} & \text{quand}\quad r\to+\infty\ ,\end{cases}$$

avec $C_1,C_2>0$ [36, 19]. Le calcul numérique donne $C_1\approx 0.121$ et $C_2\approx 5.55$.

Une fois construit le premier profil $F_i(\xi,t)$ de la solution approchée (27), on détermine le second en résolvant l'équation $\Lambda H_i(\xi,t) + B_i(\xi,t) = 0$, puis le troisième par un procédé similaire. On élimine ainsi les termes A_i, B_i, C_i dans l'expression (25), de sorte que l'erreur de notre solution approchée vérifie à présent

$$|R_i^{(4)}(\xi,t)| \,\le\, C\,\frac{|\alpha_i|t}{d^2}\,\Bigl(\frac{\nu t}{d^2}\Bigr)^{3/2}\,e^{-\beta|\xi|^2/4}\;, \qquad \xi\in\mathbb{R}^2\;,\quad t\in[0,T]\;, \tag{30}$$

pour tout $\beta \in \,]0,1[$.

3.2 Contrôle des restes

On cherche à présent une solution de l'équation (24) sous la forme

$$w_i(\xi,t) \,=\, w_i^{\rm app}(\xi,t) + \tilde w_i(\xi,t)\;, \quad v_i(\xi,t) \,=\, v_i^{\rm app}(\xi,t) + \tilde v_i(\xi,t)\;,$$

où $w_i^{\rm app}(\xi,t)$ est la solution approchée construite au paragraphe précédent. On obtient pour le reste $\tilde w_i(\xi,t)$ l'équation

$$\begin{aligned}
&t\partial_t \tilde w_i(\xi,t) - (\mathcal{L}\tilde w_i)(\xi,t) \\
&+ \frac{\alpha_i}{\nu}\Bigl(v_i^{\rm app}(\xi,t)\cdot\nabla\tilde w_i(\xi,t) + \tilde v_i(\xi,t)\cdot\nabla w_i^{\rm app}(\xi,t)\Bigr) && (31)\\
&+ \sum_{j\neq i}\frac{\alpha_j}{\nu}\,\Bigl\{v_j^{\rm app}\Bigl(\xi+\frac{z_{ij}(t)}{\sqrt{\nu t}}\,,t\Bigr) - v^G\Bigl(\frac{z_{ij}(t)}{\sqrt{\nu t}}\Bigr)\Bigr\}\cdot\nabla\tilde w_i(\xi,t) && (32)\\
&+ \sum_{j\neq i}\frac{\alpha_j}{\nu}\,\tilde v_j\Bigl(\xi+\frac{z_{ij}(t)}{\sqrt{\nu t}}\,,t\Bigr)\cdot\nabla w_i^{\rm app}(\xi,t) && (33)\\
&+ \sum_{j=1}^{N}\frac{\alpha_j}{\nu}\,\tilde v_j\Bigl(\xi+\frac{z_{ij}(t)}{\sqrt{\nu t}}\,,t\Bigr)\cdot\nabla\tilde w_i(\xi,t) && (34)\\
&+ R_i^{(4)}(\xi,t) \,=\, 0\;,
\end{aligned}$$

que l'on veut résoudre sur l'intervalle de temps $[0,T]$ avec la donnée initiale $\tilde w_i(\xi,0) = 0$. Contrairement aux apparences, ce système est essentiellement *non singulier* dans la limite $\nu \to 0$. En effet :

1. Comme le terme d'erreur $R_i^{(4)}(\xi,t)$ vérifie l'excellente borne (30), on peut espérer que la solution $\tilde w_i(\xi,t)$ sera également de taille $\mathcal{O}((\nu t/d^2)^{3/2})$, auquel cas les termes non linéaires (34) seront négligeables dans la limite $\nu \to 0$. C'est précisément dans ce but que nous avons construit l'approximation $w_i^{\rm app}(\xi,t)$ au paragraphe précédent.

2. Il est facile de vérifier que $\tilde w_i(\xi,t)$ est à moyenne nulle (en espace) pour tout $t \in [0,T]$. La loi de Biot-Savart implique alors que le champ de vitesse $\tilde v_i(\xi,t)$ décroît comme $1/|\xi|^2$ lorsque $|\xi| \to \infty$ [17]. Comme par ailleurs la solution approchée $w_i^{\rm app}(\xi,t)$ décroît de façon gaussienne à l'infini, on en déduit en utilisant la minoration (16) que les termes linéaires dans (33) ont une limite finie lorsque $\nu \to 0$.

3. Le même argument s'applique aux termes linéaires (32) dans un voisinage de l'origine, car la différence $v^G(\xi+\xi_0) - v^G(\xi_0)$ décroît comme $1/|\xi_0|^2$ lorsque $|\xi_0| \to \infty$ à ξ fixé. Dans certaines régions éloignées de l'origine, les termes (32) sont singuliers dans la limite $\nu \to 0$, mais ce sont des termes de transport par un champ de vecteurs à divergence nulle, et ils n'influenceront donc pas les estimations d'énergie que nous utiliserons pour contrôler la solution.

4. Enfin, la partie singulière du terme linéaire (31) n'est autre que $(\alpha_i/\nu)\Lambda\tilde{w}_i$, où Λ est l'opérateur (28) qui est antisymétrique dans l'espace de Hilbert X défini par (29). Une estimation d'énergie dans X ne sera donc pas affectée par la partie singulière du terme (31).

Pour contrôler la solution $\tilde{w}_i(\xi,t)$ du système (31)–(34), on utilise une estimation d'énergie dans un espace à poids bien choisi. Pour tout $t \in [0,T]$, on note

$$E(t) \;=\; \int_{\mathbb{R}^2} p(\xi,t)\Bigl(|\tilde{w}_1(\xi,t)|^2 + \cdots + |\tilde{w}_N(\xi,t)|^2\Bigr)\,\mathrm{d}\xi\;,$$

où le poids $p(\xi,t)$ est défini *en gros* de la façon suivante. On fixe une constante $K \gg 1$, et pour tout $a > 0$ on note

$$p_a(\xi) \;=\; \begin{cases} e^{|\xi|^2/4} & \text{si} \quad |\xi| \le a\;, \\ e^{a^2/4} & \text{si} \quad a \le |\xi| \le Ka\;, \\ e^{|\xi|^2/(4K^2)} & \text{si} \quad |\xi| \ge Ka\;. \end{cases}$$

On pose alors $p(\xi,t) = p_{a(t)}(\xi)$, où $a(t) = d/(3\sqrt{\nu t})$. Ainsi le poids $p(\xi,t)$ est égal à $e^{|\xi|^2/4}$ pour $|\xi| \le a(t)$, c'est-à-dire (en termes de la variable originale $x = z_i(t) + \sqrt{\nu t}\,\xi$) dans une région de l'espace localisée autour du point $z_i(t)$ et ne contenant aucun autre tourbillon. Comme expliqué ci-dessus, ce choix permet d'éliminer les contributions du terme linéaire (31), en utilisant l'antisymétrie de l'opérateur Λ. Le poids est ensuite constant dans la région où $a(t) \le |\xi| \le Ka(t)$, qui contient tous les autres tourbillons si K est assez grand, de façon à annuler les contributions des termes de transport (32). Enfin, $p(\xi,t)$ croît à nouveau de façon gaussienne pour $|\xi|$ très grand, afin que la quantité $E(t)$ fournisse un bon contrôle de la solution $\tilde{w}_i(\xi,t)$ à l'infini. En réalité, pour des raisons techniques que l'on ne discutera pas ici, il est nécessaire de modifier quelque peu la définition ci-dessus du poids $p(\xi,t)$, mais les idées essentielles restent les mêmes.

La fin de la preuve consiste naturellement à établir une inégalité différentielle pour la quantité $E(t)$ en utilisant l'équation (31)–(34) vérifiée par $\tilde{w}_i(\xi,t)$, puis à intégrer cette inégalité à l'aide du lemme de Gronwall. Tous calculs faits, on arrive à une estimation de la forme

$$E(t) \;\le\; C\Bigl(\frac{\nu t}{d^2}\Bigr)^3\;, \qquad 0 \le t \le T\;,$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de ν. En revenant à la définition de $E(t)$ et en utilisant l'expression du poids $p(\xi,t)$, on en déduit

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{\beta|\xi|^2/4}\Bigl(|\tilde{w}_1(\xi,t)|^2 + \cdots + |\tilde{w}_N(\xi,t)|^2\Bigr)\,\mathrm{d}\xi \;\le\; C\Bigl(\frac{\nu t}{d^2}\Bigr)^3\;, \qquad 0 \le t \le T\;,$$

avec $\beta = 1/K^2$. Comme $\tilde{w}_i(\xi,t) = w_i(\xi,t) - w_i^{\mathrm{app}}(\xi,t)$, ceci conclut la démonstration du théorème 3.

Références

[1] H. Abidi et R. Danchin. Optimal bounds for the inviscid limit of Navier-Stokes equations. *Asymptot. Anal.* **38** (2004), 35–46.

[2] Th. Beale et A. Majda. Rates of convergence for viscous splitting of the Navier-Stokes equations. *Math. Comp.* **37** (1981), 243–259.

[3] R. Caflisch et M. Sammartino. Vortex layers in the small viscosity limit. "WASCOM 2005"—13th Conference on Waves and Stability in Continuous Media, 59–70, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2006.

[4] E. A. Carlen et M. Loss. Optimal smoothing and decay estimates for viscously damped conservation laws, with applications to the 2-D Navier-Stokes equation. *Duke Math. J.*, **81**, 135–157 (1996), 1995.

[5] J.-Y. Chemin. A remark on the inviscid limit for two-dimensional incompressible fluids. *Comm. Partial Differential Equations* **21** (1996), 1771–1779.

[6] P.-H. Chen et W.-L. Wang. Roll-up of a viscous vortex sheet. *J. Chinese Inst. Engrs.* **14** (1991), 507–517.

[7] P. Constantin et J. Wu. Inviscid limit for vortex patches. *Nonlinearity* **8** (1995), 735–742.

[8] P. Constantin et J. Wu. The inviscid limit for non-smooth vorticity. *Indiana Univ. Math. J.* **45** (1996), 67–81.

[9] G.-H. Cottet. Équations de Navier-Stokes dans le plan avec tourbillon initial mesure. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **303** (1986), 105–108.

[10] R. Danchin. Poches de tourbillon visqueuses. *J. Math. Pures Appl.* **76** (1997), 609–647.

[11] R. Danchin. Persistance de structures géométriques et limite non visqueuse pour les fluides incompressibles en dimension quelconque. *Bull. Soc. Math. France* **127** (1999), 179–227.

[12] J.-M. Delort. Existence de nappes de tourbillon en dimension deux. *J. Amer. Math. Soc.* **4** (1991), 553–586.

[13] D. Ebin et J. Marsden. Groups of diffeomorphisms and the notion of an incompressible fluid. *Ann. of Math.* **92** (1970), 102–163.

[14] I. Gallagher et Th. Gallay. Uniqueness for the two-dimensional Navier-Stokes equation with a measure as initial vorticity. *Math. Ann.* **332** (2005), 287–327.

[15] I. Gallagher, Th. Gallay, et P.-L. Lions. On the uniqueness of the solution of the two-dimensional Navier-Stokes equation with a Dirac mass as initial vorticity. *Math. Nachr.* **278** (2005), 1665–1672.

[16] Th. Gallay. Equations de Navier-Stokes dans le plan avec tourbillon initial mesure. Séminaire EDP de l'Ecole Polytechnique 2003-2004, exposé n°XIV.

[17] Th. Gallay et C. E. Wayne. Invariant manifolds and the long-time asymptotics of the Navier-Stokes and vorticity equations on $\mathbb{R}^2$. *Arch. Ration. Mech. Anal.* **163** (2002), 209–258.

[18] Th. Gallay et C.E. Wayne. Global stability of vortex solutions of the two-dimensional Navier-Stokes equation. *Comm. Math. Phys.* **255** (2005), 97–129.

[19] Th. Gallay et C.E. Wayne. Existence and stability of asymmetric Burgers vortices. *J. Math. Fluid Mech.* **9** (2007), 243–261.

[20] Y. Giga, T. Miyakawa, et H. Osada. Two-dimensional Navier-Stokes flow with measures as initial vorticity. *Arch. Rational Mech. Anal.* **104** (1988), 223–250.

[21] E. Grenier. On the nonlinear instability of Euler and Prandtl equations. *Comm. Pure Appl. Math.* **53** (2000), 1067–1091.

[22] T. Hmidi. Régularité höldérienne des poches de tourbillon visqueuses. *J. Math. Pures Appl.* **84** (2005), 1455–1495.

[23] T. Hmidi. Poches de tourbillon singulières dans un fluide faiblement visqueux. *Rev. Mat. Iberoamericana* **22** (2006), 489–543.

[24] T. Kato : Nonstationary flows of viscous and ideal fluids in $\mathbb{R}^3$. *J. Functional Analysis* **9** (1972), 296–305.

[25] T. Kato. The Navier-Stokes equation for an incompressible fluid in $\mathbb{R}^2$ with a measure as the initial vorticity. *Differential Integral Equations* **7** (1994), 949–966.

[26] Y. Maekawa. Spectral properties of the linearization at the Burgers vortex in the high rotation limit. *J. Math. Fluid Mech.*, to appear.

[27] Y. Maekawa. On the existence of Burgers vortices for high Reynolds numbers. *J. Math. Analysis and Applications*, to appear.

[28] A. Majda. Remarks on weak solutions for vortex sheets with a distinguished sign. *Indiana Univ. Math. J.* **42** (1993), 921–939.

[29] A. Majda et A. Bertozzi. Vorticity and incompressible flow. Cambridge Texts in Applied Mathematics **27**. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[30] C. Marchioro. Euler evolution for singular initial data and vortex theory: a global solution. *Comm. Math. Phys.* **116** (1988), 45–55.

[31] C. Marchioro. On the vanishing viscosity limit for two-dimensional Navier-Stokes equations with singular initial data. *Math. Methods Appl. Sci.* **12** (1990), 463–470.

[32] C. Marchioro. On the inviscid limit for a fluid with a concentrated vorticity. *Comm. Math. Phys.* **196** (1998), 53–65.

[33] C. Marchioro et M. Pulvirenti. Vortices and localization in Euler flows. *Comm. Math. Phys.* **154** (1993), 49–61.

[34] C. Marchioro et M. Pulvirenti. Mathematical theory of incompressible nonviscous fluids. Applied Mathematical Sciences **96**, Springer-Verlag, New York, 1994.

[35] N. Masmoudi. Remarks about the inviscid limit of the Navier-Stokes system. *Comm. Math. Phys.* **270** (2007), 777–788.

[36] H. K. Moffatt, S. Kida, et K. Ohkitani. Stretched vortices—the sinews of turbulence; large-Reynolds-number asymptotics. *J. Fluid Mech.* **259** (1994), 241–264.

[37] H. Osada. Diffusion processes with generators of generalized divergence form. *J. Math. Kyoto Univ.* **27** (1987), 597–619.

[38] M. Sammartino et R. Caflisch. Zero viscosity limit for analytic solutions of the Navier-Stokes equation on a half-space. I. Existence for Euler and Prandtl equations. *Comm. Math. Phys.* **192** (1998), 433–461. II. Construction of the Navier-Stokes solution. *Comm. Math. Phys.* **192** (1998), 463–491.

[39] F. Sueur. Vorticity internal transition layers for the Navier-Stokes equations. Travail en préparation.

[40] H. Swann. The convergence with vanishing viscosity of nonstationary Navier-Stokes flow to ideal flow in $\mathbb{R}^3$. *Trans. Amer. Math. Soc.* **157** (1971), 373–397.

[41] L. Ting et R. Klein. Viscous vortical flows. Lecture Notes in Physics **374**. Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[42] L. Ting et C. Tung. Motion and decay of a vortex in a nonuniform stream. *Phys. Fluids* **8** (1965), 1039–1051.

[43] M. Vishik. Incompressible flows of an ideal fluid with vorticity in borderline spaces of Besov type. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* **32** (1999), 769–812.

[44] V. Yudovich. Non-stationary flows of an ideal incompressible fluid. *Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz.* **3** (1963), 1032–1066.

[45] V. Yudovich. Uniqueness theorem for the basic nonstationary problem in the dynamics of an ideal incompressible fluid. *Math. Res. Lett.* **2** (1995), 27–38.