

Provided for non-commercial research and educational use.
Not for reproduction, distribution or commercial use.

Serdica

Bulgariacae mathematicae
publicationes

Сердика

Българско математическо
списание

The attached copy is furnished for non-commercial research and education use only.
Authors are permitted to post this version of the article to their personal websites or
institutional repositories and to share with other researchers in the form of electronic reprints.
Other uses, including reproduction and distribution, or selling or
licensing copies, or posting to third party websites are prohibited.

For further information on
Serdica Bulgaricae Mathematicae Publicationes
and its new series Serdica Mathematical Journal
visit the website of the journal <http://www.math.bas.bg/~serdica>
or contact: Editorial Office
Serdica Mathematical Journal
Institute of Mathematics and Informatics
Bulgarian Academy of Sciences
Telephone: (+359-2)9792818, FAX:(+359-2)971-36-49
e-mail: serdica@math.bas.bg

ESPACES A COURBURE STANILOV QUASI-CONSTANTE

VALENTIN BOJU, LOUIS FUNAR

Soit $(M; g)$ un espace de Riemann de dimension $n = \dim M \geq 4$. Pour un vecteur A de l'espace tangent M_p , $A \neq 0$, nous notons :

$$C(A, \omega, r) = \{V \subset M_p; V \text{ sous-espace vectoriel de l'espace } M_p; \dim V = r, \angle(A, V) = \omega\}.$$

On sait [3] que la courbure Stanilov d'un sous-espace vectoriel V est donnée par

$$S_r(V) = \sum_{1 \leq i < j \leq r} K(A_i, A_j),$$

où $\{A_1, \dots, A_r\}$ est une base orthonormée du sous-espace V , $K(A_i, A_j)$ désignant la courbure sectionnelle de la facette plane (A_i, A_j) .

Supposons qu'il existe $\omega \in (0; \pi/2)$, $X \in M_p$, $X \neq 0$ et $r \in N$, de sorte que

$$(1) \quad S_r(V) = S_r(V') = (\text{notation}) E, \forall V, V' \in C(X, \omega, r).$$

Soit $\{X_1, \dots, X_n\}$, une base orthonormée telle que $X_n = X$. Nous avons

$$E = \sum_{1 \leq q < p \leq r} A_q^i A_p^j A_p^k A_q^l B_{ijkl},$$

où $A_q = A_q^i X_i$, $q = 1, \dots, r$, $\{A_1, \dots, A_r\}$ étant une base orthonormée d'un $V' \in C(X, \omega, r)$. Pour $2 \leq r \leq n-2$, utilisant la méthode exposée dans [1] pour les espaces QC, il résulte :

$$R_{ijkl} = 0, R_{ijhi} = 0, \forall i, j, k, l \text{ distincts, } i, j, k, l = 1, \dots, n;$$

$$R_{\alpha\beta\beta\alpha} = R_{\gamma\delta\delta\gamma} = (\text{notation}) H, \alpha, \beta, \gamma, \delta \leq n-1, \alpha \neq \beta, \gamma \neq \delta;$$

$$R_{n\alpha\alpha n} = R_{n\beta\beta n} = (\text{notation}) L, \alpha, \beta \leq n-1 \text{ et, aussi:}$$

$$E = (r-1)(\sin^2 \omega)H + (r-1)(\cos^2 \omega)L + C_{r-1}^2 H,$$

donc :

Théorème 1. *S'il existe $X \in M_p$, $X \neq 0$, $\omega \in (0; \pi/2)$ et $r \in N$, $2 \leq r \leq n-2$, de sorte que nous ayons (1), alors nous avons une relation de type (1) $\forall \omega' \in [0; \pi/2]$, $r' \in N$, où $2 \leq r' \leq n-2$.*

Définition. *Un espace de Riemann est un espace S_r -QC s'il existe un champ vectoriel régulier $X \in D^1(M)$ et une fonction $\omega: M \rightarrow (0; \pi/2)$ de sorte que $S_r(V) = S_r(V')$, $\forall V, V' \in C(X_p, \omega(p), r)$, pour chaque $p \in M$.*

Corollaire 1. *Un espace de Riemann $(M; g)$ est S_r -QC si et seulement si $(M; g)$ est un espace QC ([1]).*

Corollaire 2. Les fonctions L et H sont différentiables; pour $L=H$ un espace S_r -QC est à courbure constante H .

Maintenant nous pouvons donner un résultat de type Schur; à savoir:

Corollaire 3. Si un espace de Riemann est r -Stanilov isotrope (c'est-à-dire: pour chaque $p \in M$ $S_r(V) = S_r(V')$, $\forall V, V' \subset M_p$, $\dim V = \dim V' = r$), alors il est à courbure constante (pour $n \geq 3$).

Soit $\overset{\circ}{R}$ la courbure scalaire, R_{ij} les composantes du tenseur de Ricci, W_{jkl}^i les composantes du tenseur de Weyl par rapport à une base orthonormée $\{X_1, \dots, X_n\}$ (locale) de champs vectoriels, de sorte que $X_n = X$, où X est le champ distingué.

Théorème 2. Nous avons: $R_{ij} = 0$, $\forall i \neq j$; $R_{11} = \dots = R_{n-1, n-1} = L + (n-2)H$; $R_{nn} = (n-1)L$; $\overset{\circ}{R} = (n-1)(n-2)H + 2(n-1)L$; $W_{jkl}^i = 0$, $\forall i, j, k, l = 1, \dots, n$.

Corollaire 4. Soit $(M; g)$ un espace S_r -QC. Si $(M; g)$ est un espace Einstein, alors il est à courbure constante.

Corollaire 5. Un espace S_r -QC est conformément euclidien.

Remarque 1. Pour $L \neq H$, un espace S_r -QC admet un groupe de mouvements à s paramètres, où $s \leq 1 + n(n-1)/2$ [4, p. 103].

Remarque 2. Utilisant une technique un peu modifiée, il résulte que les résultats établis restent valables pour $2 \leq r \leq n-1$, $n \geq 3$.

Remarque 3. Les conditions imposées par (1) sont plus faibles que celles données dans [1], mais assurent la propriété d'un espace d'être à courbure QC.

Remarque 4. Comme l'on constate immédiatement, si la condition (1) est satisfaite pour un nombre fini de sous-espaces $V \in C(X, w, r)$, convenablement choisis, alors il résulte, aussi, le Théorème 1.

BIBLIOGRAPHIE

1. V. Boju, M. Popescu. Espaces à courbure quasi-constante. *J. Diff. Geometry*, **13**, 1978, 373—383.
2. L. P. Eisenhart. *Riemannian Geometry*. Princeton, 1925.
3. Gr. Stanilov. Généralisation de la courbure riemannienne et quelques applications. *Bull. Inst. Math. Acad. Bulg. Sci.*, **14**, 1973, 211—241 (en bulgare).
4. Gh. Vranceanu. *Leçons de géométrie différentielle*, II^e vol. Bucarest, 1977 (en roumain).

Université de Craiova
Craiova Roumania
Collège „N. Balcescu”
Craiova Roumania

Received 18. 1. 1982
Revised 2. 8. 1982