T.D. Cours à Dakar, décembre 2014.
Frédéric Faure.

***TD4.* Suspension du Cat map.**

On considère $f \in SL_2\mathbb{Z}$ suivant :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} & \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \end{cases}$$

Soit une “fonction toit” $\tau \in C^\infty\left(\mathbb{R}^2_{q,p}; \mathbb{R}^{+*}\right)$ périodique en q, p, i.e.

$$\tau(q+1, p) = \tau(q, p+1) = \tau(q, p), \quad \forall q, p$$

Par exemple $\tau(q,p) = \sin(2\pi q) + 2$. On définit M, la variété compacte C^∞ de dimension 3 (appelée Sol manifold) par le quotient

$$M := \left(\mathbb{R}^2_{q,p} \times \mathbb{R}_z\right) / \sim$$

avec les identifications suivantes pour tous $(q, p, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(q, p, z + \tau(x)) \sim (f(q,p), z)$$

$$(q+1, p, z) \sim (q, p+1, z) \sim (q, p, z)$$

On définit le champ de vecteur $X := \frac{\partial}{\partial z}$ sur $\mathbb{R}^3_{q,p,z}$. Alors X définit un champ de vecteur C^∞ sur M. On note $\varphi_t : M \rightarrow M$ le flot associé. On va montrer que **ce flot est Anosov et calculer ses directions instables/stables $E_u(q,p,z)$ et $E_s(q,p,z)$ en tout point.**

1. Soit $\Phi(q,p,z) = (f(q,p), z - \tau(x))$ la fonction qui sert à identifier $\Phi(q,p,z) \sim (q,p,z)$ pour la construction de M. Calculer Φ^n et Φ^{-n} pour $n \in \mathbb{N}$.
2. On note $\lambda_+ > 1, \lambda_+^{-1} < 1$ les valeurs propres de la matrice de f et $(q', p') \in \mathbb{R}^2$ les coordonnées d'un point (q, p) sur les axes propres. Calculer la matrice différentielle $D\Phi^n$ et $D\Phi^{-n}$ en utilisant les coordonées (q', p', z) (que l'on utilisera toujours dans la suite).
3. Rappel de cours : on a pour tout point $p \in M$,

   $$E_u(p) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (D\varphi_t)_{/\varphi_{-t}(p)} E_0, \quad E_s(p) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (D\varphi_{-t})_{/\varphi_t(p)} E_0$$

   où E_0 est un sous espace de dimension 1 arbitraire fixé et $D\varphi$ agit ici sur les sous espaces. En coordonnées, on considère le vecteur tangent initial $v_+(0) = (1, 0, 0)$. Montrer que l'on a

   $$E_u(q', p', z) = \mathrm{Vect}\left((D\Phi^n)_{\Phi^{-n}(q',p',z)} v_+(0)\right)$$

   et déduire l'expression de $z_+(q', p')$ qui est composante du vecteur $v_+(q', p', z) = (1, 0, z_+(q', p'))$ appartenant à $E_u(q', p', z)$. Calculer de meme $z_-(q', p')$, composante du vecteur $v_-(q', p', z) = (0, 1, z_-(q', p'))$ appartenant à

   $$E_s(q', p', z) = \mathrm{Vect}\left(\left(D\Phi^{-n}\right)_{\Phi^n(q',p',z)} v_-(0)\right)$$

4. Montrer que $z_+(q', p')$ est C^∞ par rapport à q' mais Lipschitz et pas C^1 en général, par rapport à p'.
5. Application : on prend $\tau(q,p) = \sin(2\pi q) + 2$. Comparer à la fonction de Weierstrass. Tracer la fonction $z_+(q', p')$ en fonction de q' puis p'.
6. Pour la même construction, mais partant d'une application linéaire hyperbolique $f \in SL_n(\mathbb{Z})$ en dimension plus grande, discuter les résultats obtenus et leur régularité.