

TD n°9

*Théorie des perturbations dépendant du temps*  
*Mesure du rapport gyromagnétique du neutron*

Références : [1] chapitre XIII et complément A-XIII.

On prépare un faisceau de neutrons, de vitesse  $v$ , dirigé suivant l'axe  $x$ . Ce faisceau est plongé dans un champ magnétique  $\vec{B}_0$  constant et uniforme dirigé selon  $z$ . On note  $|+_z\rangle, |-_z\rangle$ , les états propres de la projection  $\hat{S}_z$  du spin du neutron suivant l'axe  $z$ .

On note

$$\vec{\mathcal{M}} = \gamma \vec{S}$$

son moment magnétique, avec  $\gamma = \frac{ge}{2M}$ , où  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{Coulomb}$  est la charge élémentaire, et  $M = 1,6 \cdot 10^{-27} \text{kg}$  est la masse du neutron et  $g$  est appelé **le rapport gyromagnétique du neutron** que l'on étudie dans ce problème.

Les neutrons sont initialement dans l'état  $|-_z\rangle$ . Ils traversent ensuite une zone où règne un champ magnétique oscillant  $\vec{B}_1$  dont les composantes sont :

$$\vec{B}_1 = \begin{cases} B_{1x} = B_1 e^{-|x|/a} \cos(\omega t) \\ B_{1y} = B_1 e^{-|x|/a} \sin(\omega t) \\ B_{1z} = 0 \end{cases}$$

On suppose  $B_1$  constant et  $B_1 \ll B_0$  (en toute rigueur  $B_1$  devrait être variable pour assurer  $\text{div} \vec{B} = 0$ ). Dans tout le problème *on traite le mouvement spatial des neutrons classiquement*. La seule partie quantique concerne l'évolution de leur état de spin.

1. Soit un neutron dont le mouvement spatial est  $(x = vt, y = 0, z = 0)$ . Donner l'expression du Hamiltonien  $\hat{H}_{spin}(t)$  qui caractérise l'évolution quantique de son état de spin en présence des champs  $\vec{B}_0$  et  $\vec{B}_1$ , (en fonction de  $\gamma, \vec{S}, \vec{B}_0$  et  $\vec{B}_1$ ) (il s'agit de l'interaction du moment magnétique avec le champ magnétique) ?
2. On posera  $\omega_0 = -\gamma B_0$  et  $\omega_1 = -\gamma B_1$ . Donner l'expression de la matrice  $2 \times 2$  représentant  $\hat{H}_{spin}(t)$  dans la base  $\{|+_z\rangle, |-_z\rangle\}$  (en fonction de  $\omega, \omega_0, \omega_1, \hbar, v, t, a$ ) ? Aide : voir note de bas de page.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>on rappelle que :  $\hat{S}_x \equiv_{(\text{base } |\pm_z\rangle)} \left(\frac{\hbar}{2}\right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $\hat{S}_y \equiv_{(\text{base } |\pm_z\rangle)} \left(\frac{\hbar}{2}\right) \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$  et  $\hat{S}_z \equiv_{(\text{base } |\pm_z\rangle)} \left(\frac{\hbar}{2}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

3. On note  $c_{-+}$  l'amplitude de probabilité de la transition du neutron vers l'état  $|+_z\rangle$  à l'instant  $t = +\infty$  (loin de la zone d'interaction), sachant qu'à  $t = -\infty$ , il était dans l'état  $|-_z\rangle$ . En traitant  $\vec{B}_1$  comme une perturbation, et en appliquant la théorie des perturbations dépendant du temps au premier ordre, montrer que :

$$c_{-+} \simeq \frac{-i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega_0 t} \langle +_z | \hat{H}_{spin}(t) | -_z \rangle dt$$

4. Calculer  $c_{-+}$ ? Aide :  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\Omega t} e^{-\alpha|t|} dt = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \Omega^2}$ .  
On mesure le flux de neutrons qui sont passés dans l'état  $|+\rangle$  (par exemple par un dispositif de Stern Gerlach muni de compteurs à neutrons), donc la probabilité  $P_{-+}$  qu'ils aient effectué cette transition. Montrer qu'en fonction de  $\omega$ ,  $P_{-+}$  a un comportement résonant ; tracer  $P_{-+}$  en fonction de l'écart à la résonance ( $\omega_0 - \omega$ ). Quelle est l'ordre de grandeur et l'interprétation de la largeur de la courbe de résonance  $\Delta\omega_0$ , en fonction de  $v$  et  $a$  ?
5. On rajoute sur le trajet du faisceau une deuxième zone de champ oscillant  $\vec{B}'(t)$ , identique à la première, mais décalée d'une distance  $b$  ( $b \gg a$ ) le long de  $x$  :

$$\vec{B}' = \begin{cases} B'_x = B_1 e^{-|x-b|/a} \cos(\omega t) \\ B'_y = B_1 e^{-|x-b|/a} \sin(\omega t) \\ B'_z = 0 \end{cases}$$

Quelle est la nouvelle expression de  $\langle +_z | \hat{H}_{spin}(t) | -_z \rangle$  ?

Calculer la nouvelle valeur de l'amplitude de probabilité de transition  $c_{-+}$  dans le passage au travers des deux zones et montrer que l'on obtient l'ancienne expression de  $c_{-+}$  multipliée par le facteur  $(1 + e^{i(\omega_0 - \omega)b/v})$ . Calculer la nouvelle probabilité  $P_{-+}$  et tracer son allure ?

6. Expliquer pourquoi il est préférable d'utiliser deux zones de champ décalées de  $b$  plutôt qu'une seule, si l'on veut mesurer avec précision  $\omega_0$  ? Quel est alors l'ordre de grandeur de la précision obtenue  $\Delta\omega_0$  ? Exprimer l'ordre de grandeur de la précision obtenue sur le facteur gyromagnétique  $\Delta g$  ?
7. Application numérique : le faisceau de neutron a une vitesse  $v = 100m/s$ . La valeur du rapport gyromagnétique du neutron est actuellement mesurée avec la précision :

$$g = -3,8240836 \pm 1,76.10^{-6}$$

Dans un champ de  $B_0 = 1$  Tesla, quelle doit être l'ordre de grandeur de la longueur  $b$  pour atteindre cette précision ?

## Références

- [1] C. Cohen-Tanoudji, B. Du, and F. Lalo. *Mécanique quantique*.