

Feuille no 7

Exercice 7.1

Soit une paire de particules de spin $1/2$ ayant un spin total égal à 0 ; chaque particule a un moment cinétique orbital nul. (De telles paires peuvent être créées par diffusion d'un faisceau de protons de faible énergie par un gaz d'hydrogène). Lorsque les particules sont éloignées l'une de l'autre, on mesure, par exemple, la composante z du spin de la première particule S_{z1} et, par la suite, la même composante de la seconde particule S_{z2} . Puisque le spin total est nul, les deux composantes doivent être opposées, c'est-à-dire si la première mesure donne $+\hbar/2$, la seconde donnera certainement $-\hbar/2$. Donc la mesure du spin de la première particule influence le résultat de la mesure du spin de la seconde particule bien que les deux particules soient loin l'une de l'autre et n'interagissent pas entre elles. Autrement dit, d'après la mécanique quantique, les deux particules ne sont pas indépendantes ; l'indépendance implique une théorie des variables cachées.

- 1) Quelles sont les prédictions de la mécanique quantique pour la mesure de la composante $S_{\phi 2}$ du spin de la seconde particule à un angle ϕ par rapport à l'axe z , ayant auparavant déterminé la composante S_{z1} du spin de la première particule.
- 2) En déduire la valeur moyenne du produit $S_{z1} S_{\phi 2}$:

$$E_Q(\phi) = \langle S_{z1} S_{\phi 2} \rangle$$

3) Supposons qu'une théorie locale à variable cachée soit valide. On note λ la variable cachée et $p(\lambda) d\lambda$ la probabilité pour que lors d'une expérience une valeur de l'intervalle $[\lambda, \lambda + d\lambda]$ soit réalisée. Le résultat de la mesure de la composante z du spin de la première particule est désigné par $S_{z1}(\lambda)$ où les seules valeurs autorisées sont $\pm\hbar/2$. De même, le résultat de la mesure de la composante ϕ du spin de la seconde particule est noté $S_{\phi 2}(\lambda)$. La valeur moyenne du produit $S_{z1}(\lambda) S_{\phi 2}(\lambda)$ est :

$$E_{loc}(\phi) = \int S_{z1}(\lambda) S_{\phi 2}(\lambda) p(\lambda) d\lambda$$

Considérons une seconde expérience qui mesure comme précédemment la composante z du spin de la première particule mais où le deuxième appareil de mesure est placé à un angle θ par rapport à l'axe z :

$$E_{loc}(\theta) = \int S_{z1}(\lambda) S_{\theta 2}(\lambda) p(\lambda) d\lambda$$

Supposant les directions z , ϕ et θ coplanaires, démontrer le théorème de Bell :

$$|E_{loc}(\phi) - E_{loc}(\theta)| \leq \frac{\hbar^2}{4} + E_{loc}(\theta - \phi)$$

4) Application : tracer sur un même graphe $\frac{4}{\hbar^2} |E_Q(\phi) - E_Q(\theta)|$ et $1 + \frac{4}{\hbar^2} E_Q(\theta - \phi)$ pour $\theta = 2\phi$ en fonction de ϕ . Conclusion.

Solution des exercices de la feuille no 7

Exercice 7.1

1) On se place dans l'espace des spins.

Pour calculer la probabilité que la mesure de S_{ϕ_2} donne $+\hbar/2$ ($-\hbar/2$), il est préférable d'utiliser les vecteurs propres de \hat{S}_ϕ :

$$\begin{aligned} |+\phi\rangle &= \cos(\phi/2) |+_z\rangle + \sin(\phi/2) |-_z\rangle \\ |-\phi\rangle &= -\sin(\phi/2) |+_z\rangle + \cos(\phi/2) |-_z\rangle \end{aligned}$$

Supposons que la première mesure, celle de la composante z du spin de la première particule, donne le résultat $+\hbar/2$. Alors la seconde particule est dans l'état $|2 : -_z\rangle$:

$$|2 : -_z\rangle = \sin(\phi/2) |2 : +\phi\rangle + \cos(\phi/2) |2 : -\phi\rangle \quad (1)$$

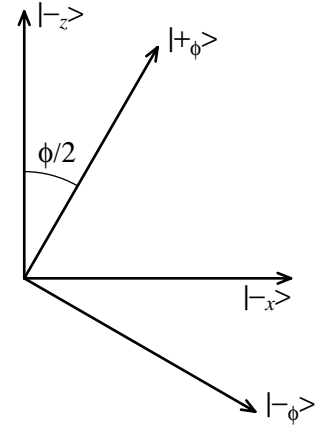


Figure 7.1

Soit $P_{++}(\phi)$ la probabilité que la seconde mesure donne $+\hbar/2$ et $P_{+-}(\phi)$ celle de trouver $-\hbar/2$. Les expressions de ces probabilités se déduisent de l'équation (1) :

$$P_{++}(\phi) = \sin^2(\phi/2) \quad ; \quad P_{+-}(\phi) = \cos^2(\phi/2)$$

Si le résultat de la première mesure est $-\hbar/2$, on obtient, de manière analogue :

$$P_{-+}(\phi) = \cos^2(\phi/2) \quad ; \quad P_{--}(\phi) = \sin^2(\phi/2)$$

On a bien $P_{++}(\phi) + P_{+-}(\phi) = P_{-+}(\phi) + P_{--}(\phi) = 1$.

Remarque

Si le résultat de la première mesure n'est pas connu avant la seconde mesure, alors les 4 probabilités déterminées précédemment doivent être multipliées par 1/2. En effet, la fonction d'onde (normée à l'unité) du système des deux particules a pour expression :

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|1 : +_z\rangle |2 : -_z\rangle - |1 : -_z\rangle |2 : +_z\rangle]$$

Dans ce cas, c'est la somme des 4 probabilités qui doit être égale à 1.

2) Si l'on suppose que la particule 1 est dans l'état $|+_z\rangle$, la valeur moyenne de $\hat{S}_{z1} \hat{S}_{\phi_2}$ a pour expression :

$$E_Q(\phi) = \left(+\frac{\hbar}{2}\right) \left(+\frac{\hbar}{2}\right) P_{++}(\phi) + \left(+\frac{\hbar}{2}\right) \left(-\frac{\hbar}{2}\right) P_{+-}(\phi) = -\frac{\hbar^2}{4} \cos \phi$$

On doit retrouver la même expression si la particule 1 est dans l'état $|-_z\rangle$. En effet

$$E_Q(\phi) = \left(-\frac{\hbar}{2}\right) \left(+\frac{\hbar}{2}\right) P_{-+}(\phi) + \left(-\frac{\hbar}{2}\right) \left(-\frac{\hbar}{2}\right) P_{--}(\phi) = -\frac{\hbar^2}{4} \cos \phi$$

On retrouve également la même expression si l'on ne sait pas, avant la seconde mesure, dans quel état est la première particule :

$$\begin{aligned} E_Q(\phi) &= \left(+\frac{\hbar}{2}\right) \left(+\frac{\hbar}{2}\right) \frac{P_{++}(\phi)}{2} + \left(+\frac{\hbar}{2}\right) \left(-\frac{\hbar}{2}\right) \frac{P_{+-}(\phi)}{2} \\ &+ \left(-\frac{\hbar}{2}\right) \left(+\frac{\hbar}{2}\right) \frac{P_{-+}(\phi)}{2} + \left(-\frac{\hbar}{2}\right) \left(-\frac{\hbar}{2}\right) \frac{P_{--}(\phi)}{2} = -\frac{\hbar^2}{4} \cos \phi \end{aligned}$$

3) Par définition, on a :

$$E_{\text{loc}}(\phi) - E_{\text{loc}}(\theta) = \int \left[S_{z1}(\lambda) S_{\phi2}(\lambda) - S_{z1}(\lambda) S_{\theta2}(\lambda) \right] p(\lambda) d\lambda$$

Les composantes des spins des deux particules sont opposées :

$$S_{\phi1}(\lambda) = -S_{\phi2}(\lambda) \quad \text{et} \quad S_{\theta1}(\lambda) = -S_{\theta2}(\lambda)$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} E_{\text{loc}}(\phi) - E_{\text{loc}}(\theta) &= - \int S_{z1}(\lambda) \left[S_{\phi1}(\lambda) - S_{\theta1}(\lambda) \right] p(\lambda) d\lambda \\ E_{\text{loc}}(\phi) - E_{\text{loc}}(\theta) &= - \int S_{z1}(\lambda) S_{\phi1}(\lambda) \left[1 - \frac{4}{\hbar^2} S_{\phi1}(\lambda) S_{\theta1}(\lambda) \right] p(\lambda) d\lambda \end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'égalité $(S_{\phi1}(\lambda))^2 = \hbar^2/4$.

$$\Rightarrow \quad \left| E_{\text{loc}}(\phi) - E_{\text{loc}}(\theta) \right| \leq \int \left| S_{z1}(\lambda) S_{\phi1}(\lambda) \left[1 - \frac{4}{\hbar^2} S_{\phi1}(\lambda) S_{\theta1}(\lambda) \right] p(\lambda) \right| d\lambda$$

Remarquant que $p(\lambda)$ est toujours positif et que $|S_{z1}(\lambda) S_{\phi1}(\lambda)| = \hbar^2/4$, on obtient :

$$\left| E_{\text{loc}}(\phi) - E_{\text{loc}}(\theta) \right| \leq \int \frac{\hbar^2}{4} \left[1 - \frac{4}{\hbar^2} S_{\phi1}(\lambda) S_{\theta1}(\lambda) \right] p(\lambda) d\lambda = \frac{\hbar^2}{4} + \int S_{\phi1}(\lambda) S_{\theta2}(\lambda) p(\lambda) d\lambda$$

ce qui démontre le théorème de Bell :

$$\left| E_{\text{loc}}(\phi) - E_{\text{loc}}(\theta) \right| \leq \frac{\hbar^2}{4} + E_{\text{loc}}(\theta - \phi)$$

4) Sur la figure 7.2, la courbe en trait plein représente $\frac{4}{\hbar^2} |E_{\text{Q}}(\phi) - E_{\text{Q}}(\theta)|$ et la courbe en pointillés $1 + \frac{4}{\hbar^2} E_{\text{loc}}(\theta - \phi)$, avec $\theta = 2\phi$.

On en conclut que l'inégalité de Bell est violée pour $0 < \phi < \pi/2$.

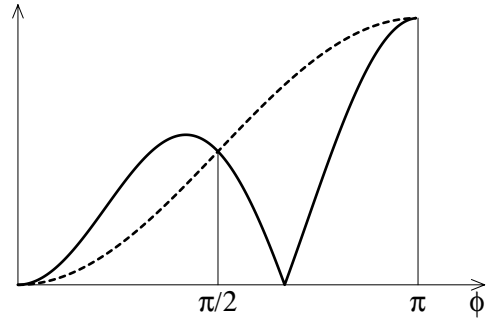


Figure 7.2