

Feuille no 5

Exercice 5.1

Il existe de nombreux faits expérimentaux montrant que les noyaux possèdent une structure en couches, c'est-à-dire qu'ils peuvent être construits, comme les atomes, en remplissant les couches successives d'un puits de potentiel.

Nous allons nous intéresser à un de ces faits :

En physique atomique, on observe que l'énergie d'ionisation, nécessaire pour extraire un électron d'un atome neutre, présente des discontinuités au voisinage de $Z = 2, 10, 18, 36, 54$ et 86 . Ces discontinuités sont associées au remplissage des couches $1s, 2s, 2p, \dots$ du potentiel dans lequel sont plongés les électrons. De même en physique nucléaire, les énergies nécessaires pour séparer un neutron ou un proton du noyau présentent des discontinuités pour les valeurs suivantes de N ou Z , appelées *nombre magiques* : $2, 8, 20, 28, 50, 82$ et 126 . Par analogie avec la physique atomique, l'existence des nombres magiques suggère qu'il existe un potentiel nucléaire moyen dans lequel, en première approximation, les nucléons se meuvent indépendamment les uns des autres.

Pour essayer d'expliquer ces nombres magiques, nous allons utiliser l'oscillateur harmonique isotrope¹.

1) Donner les niveaux d'énergie individuels des nucléons ainsi que leur multiplicité. (On tiendra compte des deux états de spin d'un nucléon).

2) A quelle valeurs des nombres magiques aboutit ce modèle de l'oscillateur harmonique ?

Exercice 5.2

Soit l'expérience décrite figure 5.1. Un faisceau d'électrons émis par un filament chauffé est accéléré par une grille à la tension V_0 puis est rendu parallèle à l'axe Ox par une lentille électrostatique. Ce faisceau arrive sur une plaque (mobile suivant Oz) percée de deux fentes parallèles à Oy et séparées de d . On mesure à une distance D le nombre d'électrons reçus par un détecteur placé à une distance z le long de Oz.

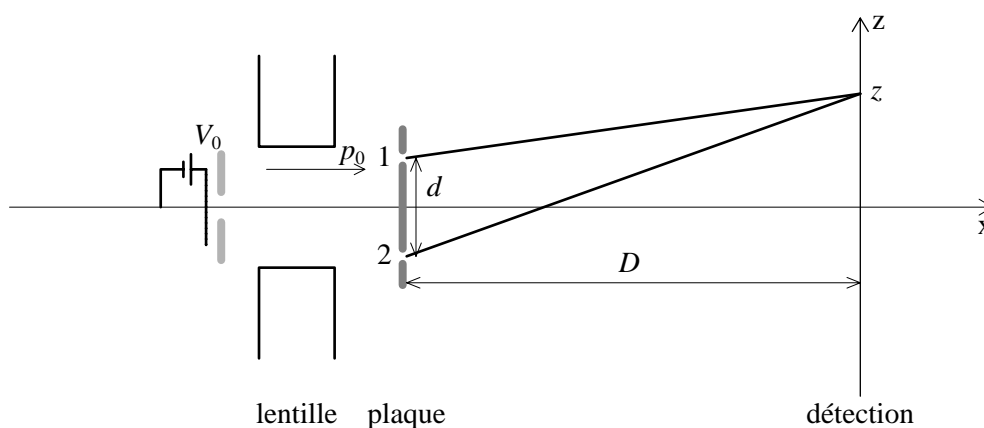


Figure 5.1

On observe une figure d'interférences identique à celle produite par un faisceau lumineux de longueur d'onde h/p_0 . La distance δz entre un minimum et un maximum d'intensité est égale à :

$$\delta z = \frac{\lambda D}{2d} = \frac{hD}{2p_0 d} \quad (\text{avec } p_0 = \sqrt{2mV_0})$$

¹Ce potentiel joue un rôle important en physique nucléaire dans la mesure où il représente, comme le potentiel Ze^2/r en physique atomique, une bonne première approximation simple du champ moyen.

La plaque doit être considérée comme un objet quantique. Sa position ζ dans la direction Oz possède une indétermination caractérisée par un écart quadratique σ_ζ . Si cet écart est trop grand, le système de franges sera brouillé. Pour observer l'interférence, il faut donc que l'on ait :

$$\sigma_\zeta < \eta \delta z \quad \text{avec } 0 < \eta < 1 \quad (1)$$

Une valeur raisonnable de η est $\eta = 1/3$.

1) Montrer que l'on peut, par une mesure de l'impulsion q transférée à la plaque dans la direction Oz, déterminer par quelle fente l'électron est passé. On notera q_1 (q_2) l'impulsion transmise à la plaque par l'électron passant par la fente 1 (2).

Pour simplifier le calcul de la cinématique de la collision, on supposera que la masse M de la plaque est beaucoup plus grande que la masse m de la particule.

2) Les impulsions q_1 et q_2 possèdent une indétermination caractérisée par un écart quadratique σ_q . Pour que l'on puisse trancher entre les deux cas, électron passant par la fente 1 ou par la fente 2, montrer que σ_q doit satisfaire l'inégalité :

$$\sigma_q < \eta' p_0 \frac{d}{D} \quad \text{avec } \eta' < 1 \quad (2)$$

(On pourra prendre $\eta' = \eta$).

3) A partir des inégalités (1) et (2), montrer que :

$$\sigma_\zeta \sigma_q < \eta \eta' \frac{h}{2}$$

4) Le résultat précédent implique que l'on peut observer une interférence tout en sachant par quelle fente est passé l'électron. Or le phénomène d'interférences disparaît si l'on ferme une des deux fentes. Résoudre ce paradoxe.

Solution des exercices de la feuille no 5

Exercice 5.1

1) Les niveaux d'énergie sont donnés par :

$$E_N = (N + 3/2) \hbar\omega$$

avec $N = 2n + l \in \mathbb{N}$ si l'on utilise les coordonnées sphériques ou $N = n_x + n_y + n_z$ si l'on utilise les coordonnées cartésiennes.

2) A chaque niveau de N donné, correspondent des états individuels avec un moment orbital $l = N, N - 2, \dots, 1(0)$.

Chacun des états avec un moment orbital l donné est $(2l + 1)$ fois dégénéré. On en déduit la dégénérescence du niveau caractérisé par N :

$$G(N) = \sum'_{l \leq N} (2l + 1) = \frac{(N + 1)(N + 2)}{2}$$

où Σ' signifie que l'on ne somme que sur les valeurs de l ayant la parité de N .

En coordonnées cartésiennes, on obtient évidemment le même résultat :

$$G(N) = \sum_{n_x=0}^N \sum_{n_y=0}^{N-n_x} 1 = \frac{(N + 1)(N + 2)}{2}$$

car $n_z = N - n_x - n_y$.

Le nombre maximal de nucléons (neutrons ou protons) qui peuvent occuper le niveau N est donc $n(N) = 2G(N) = (N + 1)(N + 2)$.

Le nombre maximal de de nucléons qui peuvent occuper tous les niveaux de 0 à N est noté $M(N)$. Les nombres magiques prédits par le modèle sont indiqués dans le tableau 5.1.

N		$n(N)$	$M(N)$
5	————— 3p, 2f, 1h	42	112
4	————— 3s, 2d, 1g	30	70
3	————— 2p, 1f	20	40
2	————— 2s, 1d	12	20
1	————— 1p	6	8
0	————— 1s	2	2

Tableau 5.1

Conclusion : seuls les 3 premiers nombres magiques sont reproduits.

Pour décrire les autres nombres magiques, il est nécessaire d'introduire, en plus du potentiel central, un fort couplage entre le moment cinétique orbital \vec{l} et le spin \vec{s} des nucléons individuels (cf cours de physique subatomique).

Exercice 5.2

1) Soit q_1 (q_2) l'impulsion transmise à la plaque par l'électron passant par la fente 1 (2).

La conservation de l'énergie et de l'impulsion s'écrit si la particule est passée en 1 (voir figure 5.1) :

$$\frac{p_0^2}{2m} = \frac{q_1^2}{2M} + \frac{p_1^2}{2m} \simeq \frac{1}{2m} (p_{1x}^2 + p_{1z}^2)$$

α_1 étant l'angle de diffusion supposé petit, on aura :

$$q_1 = -p_{1z} \simeq -|\vec{p}_1| \alpha_1 \sim -p_0 \alpha_1 \quad \text{avec } \alpha_1 \sim \frac{z - d/2}{D}$$

De même, si la particule passe en 2, on aura :

$$q_2 \sim -p_0 \alpha_2 \quad \text{avec} \quad \alpha_2 \sim \frac{z + d/2}{D}$$

Conclusion

On peut donc, par mesure de l'impulsion q de la plaque suivant Oz, distinguer les deux cas et déterminer par quelle fente est passée la particule.

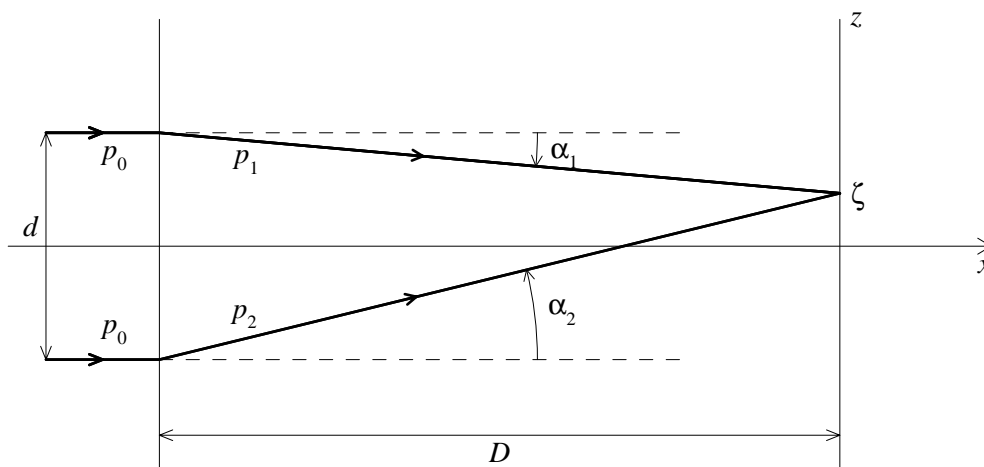


Figure 5.1

2) La conclusion précédente n'est vraie qu'à la condition que l'écart σ_q soit nettement inférieur à la différence entre q_1 et q_2 . Or $q_1 - q_2 = p_0 d/D$. Donc :

$$\sigma_q < \eta' p_0 \frac{d}{D}$$

3) Pour que les conditions sur σ_ζ et σ_q soient réalisées, nous devons avoir :

$$\sigma_q \sigma_\zeta < \eta \eta' \delta z p_0 \frac{d}{D} = \eta \eta' \frac{h}{2}$$

soit $\sigma_q \sigma_\zeta < h/18$ pour $\eta = \eta' = 1/3$.

4) Il s'agit d'un faux paradoxe. En effet, la relation d'incertitude de Heisenberg interdit la connaissance simultanée de la position et de l'impulsion de la plaque au-delà d'une certaine précision : autrement dit, $\sigma_q \sigma_\zeta \geq \hbar/2$, ce qui est en contradiction avec le résultat trouvé à la question précédente.

Inversement, il est possible de mesurer par quelle fente est passé l'électron, mais alors la relation d'incertitude de Heisenberg entraîne qu'on ne peut plus observer de figure d'interférence en raison de l'indétermination sur ζ .