Couplage Spin - Orbite

$$\hat{H} = \vec{S} \cdot \vec{L}$$

soit $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$

$\longrightarrow \vec{J}^2 = (\vec{L} + \vec{S})^2 = \vec{L}^2 + \vec{S}^2 + 2\,\vec{L}\cdot\vec{S}$

$\longrightarrow H = \frac{1}{2}\left(\vec{J}^2 - \vec{L}^2 - \vec{S}^2\right)$

espace de Hilbert total : $\mathcal{H} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dim } 2l+1}}{\mathcal{H}_l} \otimes \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dim } 2s+1 = 2}}{\mathcal{H}_s}$: dim $2\cdot(2l+1)$

sur $\mathcal{H}$, $\vec{S}^2 = s(s+1)\cdot \mathrm{Id} = \frac{3}{4}\,\mathrm{Id}$

$\vec{L}^2 = l(l+1)\cdot \mathrm{Id}$

et d'après la théorie du couplage,

$$\mathcal{H}_l \otimes \mathcal{H}_s = \mathcal{H}_{j=l-\frac{1}{2}} \oplus \mathcal{H}_{j=l+\frac{1}{2}}$$

- Sur $\mathcal{H}_{j=l-\frac{1}{2}}$, de dim $= 2j+1 = 2(l-\frac{1}{2})+1 = 2l$

on a $\vec{J}^2 = j(j+1)\,\mathrm{Id} = (l-\frac{1}{2})(l+\frac{1}{2})\,\mathrm{Id} = (l^2 - \frac{1}{4})\,\mathrm{Id}$

donc $H = \frac{1}{2}\left(\cancel{l^2} - \frac{1}{4} - \cancel{l^2} - l - \frac{3}{4}\right)\mathrm{Id}$

$= -\frac{1}{2}\left(l + \frac{3}{4}\right)\mathrm{Id}$

- Sur $\mathcal{H}_{j=l+\frac{1}{2}}$, de dim $= 2j+1 = 2(l+\frac{1}{2})+1 = 2l+2$,

on a $J^2 = j(j+1)\,\mathrm{Id} = (l+\frac{1}{2})(l+\frac{3}{2}) = (l^2 + 2l + \frac{3}{4})\,\mathrm{Id}$

$H = \frac{1}{2}\left(\cancel{l^2} + 2l + \cancel{\frac{3}{4}} - \cancel{l^2} - l - \cancel{\frac{3}{4}}\right)\mathrm{Id} = \frac{l}{2}\,\mathrm{Id}$.

Conclusion : Il y a deux niveaux :

$E_+ = \frac{l}{2}$, multiplicité $(2l+2)$ et $E_- = -\frac{1}{2}(l+\frac{3}{4})$ de multiplicité $(2l)$.