Université Joseph Fourier. Grenoble. Master 1, Physique, 2013-14

Examen de mécanique quantique, janvier 2014.

Durée 3h00. Documents interdits. Calculatrice autorisée. 1 feuille manuscrite autorisée. Le signe ($\star$) signifie que le problème peut être traité à cet endroit sans avoir nécessairement résolu les questions qui précèdent. **Encadrer les résultats demandés.**

1 Particule sur un fil circulaire

On considère une particule de masse m libre de se déplacer sur un fil circulaire unidimensionel de rayon r.

1. ($\star$) Exprimer le Hamiltonien $H = \frac{p^2}{2m}$ du système en fonction du moment angulaire $\hat{L}_z$ où l'axe z est perpendiculaire au plan de l'anneau et le moment d'inertie I de la particule par rapport au centre.
2. ($\star$) Trouver les niveaux d'énergie E_n, leur multiplicité et les fonctions stationnaires associées.
3. ($\star$) Trouver une expression semi-classique des niveaux d'énergie en utilisant la formule de Weyl : "Le nombre N de niveaux d'énergie inférieure à E est égal au nombre de quanta $h = 2\pi\hbar$ que contient l'espace de phase correspondant". Comparer au résultat exact.

2 Atome à deux niveaux avec une perturbation harmonique

Considérons un atome décrit par deux états quantiques ψ_a et ψ_b d'énergie respective $E_a < E_b$ (Hamiltonien $\hat{H}_0$). A la date $t = 0$, on suppose que l'atome est dans l'état ψ_a. A partir de la date $t = 0$, le Hamiltonien de l'atome est $\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \hat{H}_p(t)$ avec une perturbation dépendant du temps.

1. ($\star$) En notant l'état quantique à une date ultérieure t sous la forme $\psi(t) = c_a(t)\, e^{-iE_a t/\hbar}\psi_a + c_b(t)\, e^{-iE_b t/\hbar}\psi_b$, exprimer les dérivées $\dot{c}_a(t)$ et $\dot{c}_b(t)$ sans approximation, en fonction des éléments de matrice $\langle\psi_a|\hat{H}_p(t)\,\psi_a\rangle$,$\langle\psi_a|\hat{H}_p(t)\,\psi_b\rangle$ etc. et $\omega_{ba} = (E_b - E_a)/\hbar$.
2. On suppose que la perturbation est harmonique :

$$\hat{H}_p(t) = \hat{A}\exp(i\omega t) + \hat{A}^+\exp(-i\omega t)$$

où $\hat{A}$ est indépendant du temps. On écrit les éléments de matrice $A_{ab} = \langle\psi_a|\hat{A}\psi_b\rangle$, etc..., et on pose $\Delta\omega = \omega - \omega_{ba}$. On suppose que $|\Delta\omega| \ll \omega$, ainsi la fréquence ω est proche de la fréquence de résonance ω_{ba}. Dans les équations de la question (1), on négligera les termes de hautes fréquences $\exp(\pm i(\omega + \omega_{ba})t)$ et $\exp(\pm i\omega t)$. Ecrire les expressions de $\dot{c}_a(t)$ et $\dot{c}_b(t)$ alors obtenues. Quelle justification pouvez vous donner à cette approximation ?

Tournez la page S.V.P.

3. ($\star$) On admet que les solutions de l'équation obtenues en (2) sont :

$$\begin{aligned} c_a(t) &= e^{i\Delta\omega t/2}\left(\cos\left(\Omega\frac{t}{2}\right) - i\left(\frac{\Delta\omega}{\Omega}\right)\sin\left(\Omega\frac{t}{2}\right)\right) \\ c_b(t) &= \frac{-2i\overline{A_{ab}}}{\hbar\Omega}\exp\left(-i\Delta\omega\frac{t}{2}\right)\sin\left(\Omega\frac{t}{2}\right) \end{aligned}$$

   avec la fréquence de Rabi

$$\Omega = \left((\Delta\omega)^2 + \frac{|A_{ab}|^2}{4\hbar^2}\right)^{1/2}$$

   Tracer l'allure de Ω en fonction de $\Delta\omega$. Donner la probabilité $P_{ba}(t)$ de trouver l'atome dans l'état b à la date t, en fonction de $|A_{ab}|^2, \Omega$ et tracer l'allure de $P_{ba}(t)$ en fonction de t.

4. ($\star$) Calculer la même probabilité de transition $P_{ba}^{(1)}(t)$ au premier ordre des perturbations dépendant du temps et comparer au résultat de la question (3).

3 Addition de moments cinétiques

On veut étudier le moment cinétique total d'un électron dans le niveau d'énergie $n = 2$ et orbitale $l = 1$ de l'atome d'hydrogène.

1. ($\star$) Identifier les deux moments cinétiques à coupler. Pour chaque moment cinétique, donner les opérateurs d'échelle associés, donner une base des états ainsi que l'action de ces opérateurs sur cette base. Donner l'expression d'un état de moment cinétique total $\vec{J}$ « maximal ».
2. En utilisant les opérateurs d'échelle trouver l'expression des autres états propres pour le moment cinétique total exprimés dans la base précédente.